Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2020/2021

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (30 settembre, 2 ore)
Richiami sulle funzioni differenziabili tra aperti euclidei: differenziale e matrice jacobiana, differenziale di funzioni composte (regola della catena), diffeomorfismi e teorema della funzione inversa, teorema di Sard. Richiami sulle varietà topologiche: carte e atlanti. Carte differenziabilmente compatibili, atlanti differenziabili e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura differenziabile generata da un atlante differenziabile. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m).

Lezione 2. (5 ottobre, 2 ore)
Unioni topologiche e prodotti di varietà differenziabili, rivestimenti di varietà differenziabili. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R. Quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue.

Lezione 3. (7 ottobre, 2 ore)
Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili, varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

Lezione 4. (12 ottobre, 2 ore)
Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3, esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2.

Lezione 5. (14 ottobre, 2 ore)
Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili. Partizioni dell'unità differenziabili. Teorema di approssimazione differenziabile.

Lezione 6. (19 ottobre, 2 ore)
Immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in R^n, intorni tubolari. Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni.

Lezione 7. (21 ottobre, 2 ore)
Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni. Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà.

Lezione 8. (26 ottobre, 2 ore)
Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni. Fibrati tangenti e cotangenti come varietà differenziabili orientate. Teorema di Sard sulle varietà, teorema di immersione di Whitney, intorni tubolari.

Lezione 9. (28 ottobre, 2 ore)
Campi di vettori, forme differenziali lineari, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Parentesi di Lie, identità di Jacobi, algebra di Lie dei campi di vettori.

Lezione 10. (4 novembre, 2 ore)

Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati, caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie.

Lezione 11. (9 novembre, 2 ore)

Forme differenziali lineari, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Lezione 12. (11 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità.

Lezione 13. (18 novembre, 2 ore)

Forme chiuse e forme esatte. Lemma di Poincarè (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta).

Lezione 14. (23 novembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibili di R^m. Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata. Forme di volume e orientazioni.

Lezione 15. (25 novembre, 2 ore)

Integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: R^m con la forma di volume euclidea). Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes.

Lezione 16. (30 novembre, 2 ore)

Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^2 e R^3. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

Lezione 17. (2 dicembre, 2 ore)

Coomologia di De Rham, struttura moltiplicativa, coomologia in dimensione 0 e m. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni differenziabili. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica.

Lezione 18. (9 dicembre, 2 ore)

Successione esatta di Mayer-Vietoris. Finitezza della coomologia delle varietà compatte.

Lezione 19. (14 dicembre, 2 ore)

Numeri di Betti, caratteristica di Eulero, espressione in termini di decomposizioni poliedrali.

Lezione 20. (16 dicembre, 2 ore)

Coomologia delle sfere, teorema di non retrazione, teorema di punto fisso di Brouwer, teorema di invarianza della dimensione.

Lezione 21. (21 dicembre, 2 ore)

Teorema di separazione di Jordan in R^m. Teorema di invarianza del dominio, invarianza della dimensione, del bordo e dell'interno delle varietà con bordo.

Lezione 22. (11 gennaio, 1 ora)

Coomologia in dimensione m e orientabilità. Grado di applicazioni continue, invarianza omotopica.

Lezione 23. (13 gennaio, 2 ore)

Teorema di Hopf. Grado di applicazioni in termini di fibre regolari (anche mod 2).

Lezione 24. (18 gennaio, 2 ore)

Teorema di separazione per ipersuperfici lisce in R^m, non esistenza di ipersuperfici chiuse non orientabili in R^m.

Lezione 25. (1° marzo, 2 ore)

Metriche riemanniane, elementi di lunghezza. Spazi modello (metriche euclidee, sferiche e iperboliche). Esistenza di metriche riemanniane sulle varietà, metriche riemanniane indotte su sottovarietà.

Lezione 26. (3 marzo, 2 ore)

Dualità riemanniana tra campi di vettori e forme differenziali lineari, formule di innalzamento e abbassamento degli indici, gradiente di funzioni, dualità tra fibrato tangente e cotangente.

Lezione 27. (8 marzo, 2 ore)

Elementi di volume riemanniani in varietà orientate, esistenza e unicità, misura delle lunghezze e dei volumi. Distanza geodetica, compatibilità con la topologia.

Lezione 28. (10 marzo, 2 ore)

Applicazioni isometriche simili e conformi, isometrie, similitudini e conformità tra varietà riemanniane. Gruppi di isometrie, similitudini e conformità di una varietà riemanniana. Rivestimenti e quozienti riemanniani. Varietà omogenee e localmente omogenee.

Lezione 29. (15 marzo, 2 ore)

Connessioni affini, connessione di Levi-Civita, esistenza e unicità della derivata covariante, invarianza per similitudini. Derivata covariante in sottovarietà riemanniane.

Lezione 30. (17 marzo, 2 ore)

Campi di riferimenti ortogonali, esistenza locale, campi di riferimenti coordinati ortogonali e caratterizzazione delle metriche euclidee. Simboli di Christoffell.

Lezione 31. (22 marzo, 2 ore)

Trasporto parallelo, campi di vettori paralleli, campi di riferimenti paralleli e caratterizzazione delle metriche euclidee.

Lezione 32. (24 marzo, 2 ore)

Geodetiche, applicazione esponenziale, intorni convessi e coordinate normali. Rigidità di isometrie e similitudini. Gruppi di isotropia, varietà isotrope e localmente isotrope.

Lezione 33. (29 marzo, 2 ore)

Sottovarietà totalmente geodetiche. Sottovarietà luogo di punti fissi di isometrie sono totalmente geodetiche.

Lezione 34. (31 marzo, 2 ore)

Sottovarietà totalmente geodetiche e curve geodetiche delle sfere e degli spazi iperbolici.

Lezione 35. (7 aprile, 2 ore)

Lemma di Gauss. Isometrie riemanniane come isometrie rispetto alla distanza geodetica.

Lezione 36. (12 aprile, 2 ore)

Minimalità locale della lunghezza, equazioni di Eulero-Lagrange.

Lezione 37. (14 aprile, 2 ore)

Completezza geodetica, esistenza di archi geodetici di lunghezza minima, teorema di Hopf-Rinow e conseguenze.

Lezione 38. (19 aprile, 2 ore)

Operatore di curvatura sui campi di vettori, proprietà tensoriale, identità di Bianchi.

Lezione 39. (21 aprile, 2 ore)

Tensore di curvatura di Riemann, tensore di Ricci, proprietà di simmetria, invarianza per isometrie e similitudini.

Lezione 40. (26 aprile, 2 ore)

Curvature sezionali. Curvatura di Ricci e curvatura scalare. Curvature sezionali come curvature di superfici.

Lezione 41. (28 aprile, 2 ore)

Curvature di sottovarietà totalmente geodetiche. Curvatura delle metriche conformemente piatte, curvatura degli spazi euclidei, delle sfere e degli spazi iperbolici.

Lezione 42. (3 maggio, 2 ore)

Invarianza della curvatura per isometrie, riscalatura della curvatura per similitudini. Varietà a curvatura costante arbitraria, omogeneità e isotropia.

Lezione 43. (5 maggio, 2 ore)

Curvatura di sottovarietà riemanniane.

Lezione 44. (10 maggio, 2 ore)

Forme di connessione e di curvatura, equazioni strutturali. Isotropia implica completezza e curvatura costante.

Lezione 45. (12 maggio, 2 ore)

Spazi a curvatura costante, spazi modello e loro gruppi di isometrie. Teorema di Cartan locale, isotropia e omogeneità locale degli spazi a curvatura costante.

Lezione 46. (17 maggio, 1 ora)

Rivestimenti riemanniani e classificazione globale delle varietà a curvatura costante.