

**TEORIA DEI NODI***prof. Riccardo Piergallini***Programma del corso**

*Definizioni di base.* Nodi, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica. Nodi docili, intorni tubolari topologici, nodi lisci e poligonal. Deformazioni docili, estensione ad isotopie ambiente, deformazioni poligonal e deformazioni lisce. Classificazione di nodi lisci, nodi banali, caratterizzazione come bordi di dischi lisci. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Diagrammi di nodi lisci e poligonal, esistenza a meno di perturbazioni, movimenti di Reidemeister. Banalizzazione di nodi mediante inversione di incroci, banalità dei nodi in  $R^n$  con  $n > 3$ . Gruppo  $G(K)$  di un nodo  $K$ , presentazione di Wirtinger, abelianizzazione e numero delle componenti. Classi speciali di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Somma connessa di nodi.

*Invarianti numerici.* Indice di allacciamento, invarianza isotopica, dipendenza dall'orientazione. Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi, simmetria dell'indice di allacciamento.  $K$  banale se e solo se  $G(K)$  abeliano se e solo se  $G(K) \cong \mathbb{Z}$ . Genere  $g(K)$  di un nodo  $K$ ,  $K$  banale se e solo se  $g(K) = 0$ , additività del genere, decomposizione in nodi primi. Numero minimo di incroci  $c(K)$ ,  $K$  banale se e solo se  $c(K) = 0$ , tabelle dei nodi primi basate su  $c(K)$ . Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi. Indice di contorcimento di un diagramma, invarianza per isotopia regolare. Nodi  $n$ -colorabili, invarianza isotopica della  $n$ -colorabilità. Nodi geometrici, numero di incroci medio e indice di contorcimento medio, indice di allacciamento e integrale di Gauss, teorema di White.

*Polinomi di Kauffman e Jones.* Parentesi di Kauffman, risoluzione di incroci e stati di un diagramma, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare. Polinomio di Kauffman  $P_K(t)$ , dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e somma connessa. Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman. Polinomio di Jones  $V_K(x)$ , equazione caratteristica. Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti, polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

*Trecce e polinomio di Jones in due variabili.* Trecce e isotopia di trecce, gruppo  $\mathcal{B}_n$  delle  $n$ -trecce. Spazio  $\Gamma_n R^2$  delle  $n$ -configurazioni del piano,  $\mathcal{B}_n$  come gruppo fondamentale di  $\Gamma_n R^2$ . Trecce chiuse, teorema di Alexander, algoritmo di Vogel. Relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister, stabilizzazione di trecce, teorema di Markov. Rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura. Tracce sulle algebre di Hecke, polinomio di Jones in due variabili  $V_K(x, y)$ , equazione caratteristica, dipendenza dall'orientazione, polinomi  $V_K(x, y)$  di nodi simmetrici e somma connessa.

*Polinomio di Alexander-Conway e forme di Seifert.* Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Polinomio di Alexander  $\Delta_K(t)$ , equazione caratteristica, calcolo basato sui diagrammi. Polinomio di Conway  $\nabla_K(y)$ , equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie e alla somma connessa. Relazione tra polinomio di Alexander-Conway e genere, signature e nodi "slice".

*Invarianti di Vassiliev.* Nodi singolari, movimenti di isotopia liscia, inversione di incroci e singolarità doppie trasversali. Invarianti di Vassiliev, equazione caratteristica, invarianti di ordine finito, simboli. Diagrammi di Gauss, relazioni tra diagrammi e diagrammi base, calcolo degli invarianti di ordine finito. Teorema di Vassiliev-Kontsevich, polinomio di Conway e invarianti di Vassiliev. Grafi topologici nello spazio, movimenti di isotopia, grafi intrinsecamente annodati.

**Testi di riferimento**

W.B. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, GTM 175, Springer

A. Sossinsky, *Knots. Mathematics with a twist*, Harvard University Press

**Testi consigliati**

P.R. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge Univ. Press

C. Livingston, *Knot Theory*, The Carus Math. Monogr. 24, MAA

V.V. Prasolov e A.B. Sossinsky, *Knots, link, braids and 3-manifolds*, Math. Monogr. 154, AMS

D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing

J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer