Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno accademico 2023/2024

TOPOLOGIA APPLICATA

Prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (5 marzo, 2 ore)

Spazi topologici, applicazioni continue, omeomorfismi. Spazi euclidei. Spazi metrici, topologia indotta, continuità negli spazi metrici, applicazioni uniformemente continue e lipschitziane. Diverse distanze compatibili con la topologia euclidea.

Lezione 2. (7 marzo, 2 ore)

Equivalenza omotopica di applicazioni e spazi, deformazioni, spazi contraibili. Categoria di Lusternik-Schnirelmann e complessità topologica. Connessione e componenti connesse, unione topologica e incollamento di spazi.

Lezione 3. (12 marzo, 2 ore)

Grafi, grafi orientati, grafi semplici e senza cappi, grafi topologici. Grafi connessi e catene di spigoli semplici, classificazione omotopica dei grafi connessi. Grafi semplicemente connessi e catene di spigoli semplici chiuse, grafi aciclici, alberi, alberi generanti per un grafo.

Lezione 4. (19 marzo, 2 ore)

Grafi planari, teorema di Kuratowski, realizzazione di grafi nello spazio. Metriche su grafi, grafi pesati, catene minimali. Spazi di configurazioni, esempi nel piano e su grafi.

Lezione 5. (21 marzo, 2 ore)

Bocce, cubi e simplessi in spazi euclidei, convessi regolari, omeomorfismi e deformabilità reciproci. Teoremi del punto fisso di Brouwer e Kakutani. Equilibrio di Nash per giochi non cooperativi.

Lezione 6. (26 marzo, 2 ore)

Complessi simpliciali astratti e topologici, teorema di immersione in spazi euclidei. Sottocomplessi e suddivisioni, prodotto di complessi simpliciali. Applicazioni simpliciali, approssimazione simpliciale di applicazioni continue e omotopie.

Lezione 7. (28 marzo, 2 ore)

Simplessi orientati, catene simpliciali, operatore bordo. Omologia simpliciale, funtorialità, invarianza per isomorfismi simpliciali e suddivisioni. Omologia e componenti connesse, primo gruppo di omologia e gruppo fondamentale, classe fondamentale di una varietà orientabile.

Lezione 8. (4 aprile, 2 ore)

Omomorfismi indotti in omologia da applicazioni continue, invarianza omotopica dell'omologia simpliciale. Complessi poliedrali, triangolazioni semisimpliciali, omologia poliedrale. Esempi di calcolo.

Lezione 9. (9 aprile, 2 ore)

Omologia con coefficienti. Successione esatta di Mayer-Vietoris, gruppi di omologia delle sfere. Numeri di Betti, caratteristica di Eulero-Poincaré.

Lezione 10. (11 aprile, 2 ore)

Complessi cellulari, equivalenza omotopica con i complessi simpliciali, applicazioni cellulari, omologia cellulare. Teorema di Whitehead.

Lezione 11. (16 aprile, 2 ore)

Omologia singolare, isomorfismo con l'omologia simpliciale mediante il teorema di approssimazione simpliciale. Omologia liscia, isomorfismo con l'omologia singolare mendiate il teorema di approssimazione differenziabile. Relazione con la coomologia di De Rham mediante l'integrazione di forme su catene.

Lezione 12. (18 aprile, 2 ore)

Funzioni di Morse, indice di un punto critico. Sottovarietà differenziabili di R^n, equazioni e parametrizzazioni regolari. Decomposizione a manici di varietà differenziabili, decomposizione cellulare indotta.

Lezione 13. (23 aprile, 2 ore)

Problema del clustering. Complessi di Vietoris-Rips di insiemi finiti in spazi euclidei. Proiezioni ombra, problema dei sensori, criterio omologico di copertura.

Lezione 14. (30 aprile, 2 ore)

Complessi di Cech di insiemi finiti in spazi euclidei, Nervo di un ricoprimento, ricoprimenti buoni, equivalenza omotopica tra X e il nervo di un qualunque ricoprimento buono di X. Intorni radiali di insiemi finiti, diagrammi di Voronoi e complessi alfa.