Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 6 – 21 dicembre 2023

1) Ricordando che $S^2 \cong \widehat{R}^2$, derivare dal teorema di Schönflies la seguente affermazione: ogni immersione $h : S^1 \to S^2$ si può estendere ad un omeomorfismo $k : S^2 \to S^2$, quindi ogni curva chiusa semplice $C \subset S^2$ sconnette S^2 in due dischi.

2) Provare con degli esempi che nel toro T^2 e nel piano proiettivo P^2 esistono curve chiuse semplici non equivalenti medianti omeomorfismi della superficie, infatti esistono curve chiuse semplici che sconnettono la superficie i due componenti e altre che non la sconnettono. Considerando inoltre l'immersione standard $T^2 \subset R^3$ come toro di rotazione, provare che esistono curve chiuse semplici in T^2 equivalenti mediante un omeomorfismo di T^2, ma non equivalenti come nodi in R^3.

3) Dimostrare che ogni varietà topologica connessa M è *omogenea*, cioè per ogni $p, q \in M$ esiste un omeomorfismo $h : M \to M$ tale che $h(p) = q$. Si può eliminare l'ipotesi della connessione?

4) Provare che $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, considerati come sottospazi topologici dello spazio $M_3(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate di ordine 3 identificato canonicamente con R^9, sono varietà topologiche di dimensioni rispettivamente 3, 8 e 9. Provare inoltre che $\mathrm{SO}(3) \cong P^3$ (si consideri l'applicazione continua $r : B^3 \to \mathrm{SO}(3)$ che associa a ogni $x \neq 0$ la rotazione $r(x)$ di $\pi\|x\|$ radianti intorno alla retta orientata generata da x).

5) Per ciascuna delle superfici S^2, T^2 e P^2, determinare:
   a) un atlante con il minor numero possibile di carte;
   b) un atlante speciale con il minor numero possibile di carte;
   c) una poligonazione con il minor numero possibile di poligoni.

6) Verificare che P^2 si può ottenere (a meno di $\cong$) incollando un nastro di Möbius e un disco mediante un omeomorfismo tra i rispettivi bordi. Usando questa rappresentazione, costruire un'immersione di P^2 in R^4 (estendere a P^2 un'immersione del nastro di Möbius in $R^3 \subset R^4$).