Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2023/2024

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Programma del corso

I Parte – Elementi di topologia

Spazi topologici. Aperti e chiusi, intorni, basi di aperti e di intorni, confronto tra topologie. Operatori topologici (interno, chiusura e frontiera), sottoinsiemi densi, chiusi regolari. Sottospazi topologici, unioni topologiche, prodotti topologici, quozienti topologici. Applicazioni continue, applicazioni aperte, omeomorfismi e omeomorfismi locali, immersioni e immersioni locali. Gruppi topologici, azioni topologiche e spazi di orbite.

Proprietà topologiche. Proprietà globali e locali, invarianza per omeomorfismi e omeomorfismi locali. Assiomi di separazione, metrizzabilità, lemma di Urysohn e teorema di Tietze per spazi metrizzabili. Assiomi di numerabilità, separabilità, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità. Compattezza e compattezza locale, compattificazioni, compattificazione di Alexandroff. Compattezza negli spazi metrici, numero di Lebesgue, continuità uniforme. Completezza, teorema del punto fisso per le contrazioni, teorema di Baire. Connessione e connessione locale, connessione per archi, componenti connesse e componenti connesse per archi. Relazioni tra le proprietà topologiche, conservazione mediante applicazioni continue e operazioni topologiche.

Omotopia e rivestimenti. Equivalenza omotopica applicazioni e tra spazi, omotopia relativa, deformazioni, spazi semplicemente connessi, spazi contraibili. Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni libere discrete. Proprietà di sollevamento unico dei cammini e delle omotopie, sollevamento unico delle applicazioni continue, rivestimenti universali.

Gruppo fondamentale. Cappi in spazi puntati, composizione e omotopia tra cappi, definizione del gruppo fondamentale, indipendenza dal punto base. Omomorfismi indotti da applicazioni continue, funtorialità e invarianza omotopica. Gruppo fondamentale e rivestimenti, gruppo fondamentale della circonferenza. Presentazioni di gruppi, teorema di Van Kampen.

Topologia del piano e dello spazio. Teorema del punto fisso di Brouwer per B^2, teorema di Borsuk-Ulam per S^2. Curve di Jordan, indice di allacciamento, teoremi di Jordan e di Schönflies. Teorema di invarianza dei domini piani e della dimensione. Nodi nello spazio, gruppi dei nodi.

Curve e superfici topologiche. Varietà topologiche, carte locali e atlanti (sfere e proiezioni stereografiche, spazi proiettivi e carte affini), carte speciali, atlanti numerabili, metrizzabilità, teorema di immersione in R^n. Classificazione delle curve. Somma connessa di superfici, genere delle superfici orientabili e non orientabili, poligonazioni, caratteristica di Eulero-Poincaré, classificazione delle superfici chiuse, gruppi fondamentali delle superfici chiuse.

II Parte – Curve e superfici

Curve nel piano euclideo. Equazioni cartesiane e parametrizzazioni, lunghezza d'arco. Riferimenti e formule di Frenet. Curvatura, forma canonica locale, congruenza tra curve nel piano euclideo, rotazione totale e curvatura totale, curve di Jordan regolari.

Curve nello spazio euclideo. Equazioni cartesiane e parametrizzazioni, lunghezza d'arco. Riferimenti e formule di Frenet, curvatura e torsione, forma canonica locale, congruenza tra curve (orientate) nello spazio euclideo, condizione di planarità. Nodi regolari, intorni tubolari, teorema di Fenchel.

Superfici nello spazio euclideo. Equazioni cartesiane e parametrizzazioni locali, orientazioni e campi di versori normali. Applicazione di Gauss, operatore di forma, forme fondamentali, formule di Gauss-Weingarten. Curvatura normale e curvatura geodetica, teorema di Meusnier, curvature principali, direzioni principali e asintotiche, formula di Eulero, forma canonica locale (punti ellittici, iperbolici e parabolici, punti ombelicali e planari). Curvatura gaussiana e curvatura media, equazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi, teorema "egregium" di Gauss, isometrie e congruenze tra superfici (orientate) nello spazio. Superfici rigate, rigate sviluppabili. Superfici di rotazione, equazioni di Clairaut. Superfici a curvatura gaussiana costante (teoremi di Liebmann, Massey e Hilbert). Superfici minime, curvatura media e variazione prima dell'area.

Geometria intrinseca delle superfici. Metriche riemanniane, misura di lunghezze, angoli e aree, isometrie, conformità e similitudini. Metriche euclidee, sferiche e iperboliche. Derivata covariante, trasporto parallelo. Geodetiche, applicazione esponenziale, coordinate normali, completezza geodetica, rigidità delle isometrie. Curvatura riemanniana, superfici a curvatura costante, teorema di Minding, superfici modello (piano euclideo, sfera e piano iperbolico). Curve in superfici riemanniane, curvatura geodetica, teorema fondamentale generalizzato. Teorema di Gauss-Bonnet. Geodetiche e isometrie delle superfici modello, modelli riemanniani delle geometrie piane.

Testi di riferimento

E. Sernesi, *Geometria 2*, Boringhieri

I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e geometria*, Boringhieri

Testi consigliati

C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli

C. De Fabritiis e C. Petronio, *Esercizi svolti e complementi di topologia e geometria*, Boringhieri

M.M. Lipschutz, *Geometria differenziale*, Collana Schaum, McGraw Hill

B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press

M.P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc.