

**GEOMETRIA SUPERIORE**

*prof. Riccardo Piergallini*

***Registro delle lezioni***

*Lezione 1.* (28 settembre, 2 ore)

Introduzione al corso. Richiami sulle varietà topologiche, carte e atlanti, metrizzabilità, teorema di immersione in  $R^n$ , teoremi di invarianza della dimensione e dei domini.

*Lezione 2.* (2 ottobre, 2 ore)

Richiami sul calcolo differenziale in  $R^m$ , diffeomorfismi e teorema della funzione inversa, teorema di Sard. Carte differenziabilmente compatibili, atlanti e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura differenziabile generata da un atlante differenziabile. Varietà differenziabili, esempi ( $R^m$ ,  $S^m$ ,  $T^m$ ,  $P^m$ ).

*Lezione 3.* (9 ottobre, 2 ore)

Unioni topologiche e prodotti di varietà differenziabili, rivestimenti di varietà differenziabili. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su  $R$ . Quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue.

*Lezione 4.* (12 ottobre, 2 ore)

Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili, varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà orientabili e non orientabili (orientazioni standard su  $R^m$ ,  $S^m$  e  $T^m$ ;  $P^m$  orientabile se e solo se  $m$  è dispari).

*Lezione 5.* (16 ottobre, 2 ore)

Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in  $R^2$  e  $R^3$ , esempi di curve differenziabili e non differenziabili in  $R^2$ .

*Lezione 6.* (19 ottobre, 2 ore)

Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di  $R^n$  come grafici di funzioni differenziabili. Partizioni dell'unità differenziabili.

*Lezione 7.* (23 ottobre, 2 ore)

Immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in  $R^n$ , intorni tubolari. Teorema di approssimazione differenziabile.

*Lezione 8.* (26 ottobre, 2 ore)

Richiami di calcolo differenziale in  $R^m$ , vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni.

*Lezione 9.* (2 novembre, 2 ore)

Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni. Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

*Lezione 10.* (6 novembre, 2 ore)

Teorema di Sard sulle varietà. Trasversalità, teorema di approssimazione trasversale, intersezio-

ne di sottovarietà trasversali. Fibrato tangente come varietà differenziabile orientata. Teorema di immersione di Whitney.

*Lezione 11.* (9 novembre, 2 ore)

Campi di vettori, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili. Parentesi di Lie, identità di Jacobi, algebra di Lie dei campi di vettori. Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità.

*Lezione 12.* (13 novembre, 2 ore)

Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati, caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà.

*Lezione 13.* (16 novembre, 2 ore)

Fibrato cotangente come varietà differenziabile orientata. Forme differenziali lineari, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

*Lezione 14.* (20 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità. Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincaré (forma chiusa  $\Leftrightarrow$  localmente esatta).

*Lezione 15.* (23 novembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili, varietà differenziabili con bordo. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibile di  $R^m$ .

*Lezione 16.* (27 novembre, 2 ore)

Integrale di una  $m$ -forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una  $m$ -varietà differenziabile orientata. Forme di volume e orientazioni. Integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale:  $R^m$  con la forma di volume euclidea).

*Lezione 17.* (30 novembre, 2 ore)

Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in  $R^2$  e  $R^3$ . Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

*Lezione 18.* (4 dicembre, 2 ore)

Coomologia di De Rham, struttura moltiplicativa, coomologia in dimensione 0 e  $m$ . Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni differenziabili. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica.

*Lezione 19.* (7 dicembre, 2 ore)

Successione esatta di Mayer-Vietoris. Finitezza della coomologia delle varietà compatte. Numeri di Betti, caratteristica di Eulero, espressione in termini di decomposizioni poliedrali.

*Lezione 20.* (11 dicembre, 2 ore)

Coomologia delle sfere, teorema di non retrazione, teorema di punto fisso di Brouwer, teorema di invarianza della dimensione.

*Lezione 21.* (14 dicembre, 2 ore)

Teorema di separazione di Jordan in  $R^m$ . Teorema di invarianza del dominio, invarianza della dimensione, del bordo e dell'interno delle varietà con bordo.

*Lezione 22.* (18 dicembre, 2 ore)

Coomologia in dimensione  $m$  e orientabilità. Grado di applicazioni continue, invarianza omotopica, grado in termini di fibre regolari (anche mod 2).

*Lezione 23.* (19 dicembre, 2 ore)

Campi di vettori non singolari sulle sfere. Teorema di Hopf. Teorema di separazione per ipersuperfici lisce in  $R^m$ , non esistenza di ipersuperfici chiuse non orientabili in  $R^m$ .

*Lezione 24.* (5 marzo, 2 ore)

Metriche riemanniane, elementi di lunghezza. Spazi modello (metriche euclidee, sferiche e iperboliche). Esistenza di metriche riemanniane sulle varietà, metriche riemanniane indotte su sottovarietà.

*Lezione 25.* (7 marzo, 2 ore)

Dualità riemanniana tra campi di vettori e forme differenziali lineari, formule di innalzamento e abbassamento degli indici, gradiente di funzioni, dualità tra fibrato tangente e cotangente. Elementi di volume riemanniani in varietà orientate, esistenza e unicità, misura delle lunghezze e dei volumi.

*Lezione 26.* (12 marzo, 2 ore)

Distanza geodetica, compatibilità con la topologia. Applicazioni isometriche simili e conformi, isometrie, similitudini e conformità tra varietà riemanniane. Gruppi di isometrie, similitudini e conformità di una varietà riemanniana. Rivestimenti e quozienti riemanniani.

*Lezione 27.* (19 marzo, 2 ore)

Varietà omogenee e localmente omogenee. Connessione di Levi-Civita, esistenza e unicità della derivata covariante, invarianza per similitudini.

*Lezione 28.* (21 marzo, 2 ore)

Simboli di Christoffel, derivata covariante in coordinate. Derivata covariante in sottovarietà riemanniane. Campi di vettori paralleli, trasporto parallelo.

*Lezione 29.* (26 marzo, 2 ore)

Geodetiche, parametrizzazioni geodetiche, invarianza per similitudini locali. Applicazione esponenziale. Intorni convessi e coordinate normali. Rigidità di isometrie e similitudini.

*Lezione 30.* (28 marzo, 2 ore)

Gruppi di isotropia, varietà isotrope e localmente isotrope, isotropia e omogeneità. Isotropia forte (azione transitiva sui riferimenti ortonormali).

*Lezione 31.* (4 aprile, 2 ore)

Sottovarietà totalmente geodetiche. Sottovarietà luogo di punti fissi di isometrie sono totalmente geodetiche. Sottovarietà totalmente geodetiche e curve geodetiche delle sfere e degli spazi iperboliche.

*Lezione 32.* (9 aprile, 2 ore)

Lemma di Gauss. Isometrie riemanniane come isometrie rispetto alla distanza geodetica, geodetiche come curve di lunghezza localmente minima.

*Lezione 33.* (11 aprile, 2 ore)

Equazioni di Eulero-Lagrange, esempi di calcolo. Completezza geodetica, esistenza di archi geodetici di lunghezza minima.

*Lezione 34.* (16 aprile, 2 ore)

Teorema di Hopf-Rinow e conseguenze. Campi di riferimenti ortogonali, esistenza locale, caratterizzazione delle metriche localmente euclidee (campi di riferimenti coordinati ortogonali o paralleli).

*Lezione 35.* (18 aprile, 2 ore)

Operatore di curvatura sui campi di vettori, interpretazione geometrica, proprietà tensoriale, identità di Bianchi, espressione in coordinate locali.

*Lezione 36.* (23 aprile, 2 ore)

Tensore di curvatura di Riemann, tensore di Ricci, proprietà di simmetria, invarianza per isometrie e similitudini. Curvature sezionali, curvature di Ricci e curvatura scalare. Curvature sezionali come curvature di superfici. Curvature sezionali di sottovarietà geodetiche.

*Lezione 37.* (30 aprile, 2 ore)

Curvatura delle metriche conformemente piatte, curvatura degli spazi euclidei, delle sfere e degli spazi iperbolici. Invarianza della curvatura per isometrie, riscalatura della curvatura per similitudini. Varietà a curvatura costante arbitraria, omogeneità e isotropia.