V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (in particolare $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$A = (A \neq \varnothing, A \times A \to V : (p,q) \mapsto \overrightarrow{pq})$ <u>spazio affine</u> su V

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 1) per ogni $p \in A$ e $v \in V$ esiste unico $q \in A$ tale che $\overrightarrow{pq} = v$

cioè $\gamma_p : A \to V$ definita $\gamma_p(q) = \overrightarrow{pq}$ è biunivoca $\forall\, p \in A$

2) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ per ogni $p, q, r \in A$ (identità di Charles)

$p, q \in A \rightsquigarrow (p,q) \in A^2$ <u>vettore appl.</u> in $p \rightsquigarrow \overrightarrow{pq} \in V$ <u>vettore libero</u>

$\dim A \overset{\text{def}}{=\!=} \dim V$ <u>dimensione</u> di A come spazio affine

($\dim A = 1 \leftrightsquigarrow$ <u>retta affine</u>, $\dim A = 2 \leftrightsquigarrow$ <u>piano affine</u>)

A <u>spazio affine reale, complesso</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

<u>Note</u>: 1) A spazio affine $\Rightarrow \overrightarrow{pp} = 0_V$ e $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$, $\forall\, p, q \in A$

$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \Leftrightarrow \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$, $\forall\, p, q, r, s \in A$

2) $A \times A \to V : (p,q) \mapsto \overrightarrow{pq}$ <u>struttura affine</u>

$\leftrightsquigarrow$ azione semplicemente transitiva di $(V, +)$ su A

$\tau_v : A \to A$ definita $\tau_v(p) = p + v \overset{\text{def}}{=\!=} q$ se $v = \overrightarrow{pq}$

<u>traslazione</u> associata al vettore $v \in V$

$\rightsquigarrow \delta_{c,k} : A \to A$ definita $\delta_{c,k}(p) \overset{\text{def}}{=\!=} q$ se $\overrightarrow{cq} = k\,\overrightarrow{cp}$

<u>dilatazione</u> di centro $c \in A$ e fattore $k \in \mathbb{K}$

<u>Esempi</u>: 1) retta/piano/spazio euclidei = spazi affini reali

($V = \{[\overrightarrow{PQ}] \mid \overrightarrow{PQ}$ vett. appl.$\}$ spazio dei vettori liberi)

2) $V = (V, (v,w) \mapsto \overrightarrow{vw} = w - v)$ spazio affine su V

$A^n(\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathbb{K}^n$ <u>spazio affine numerico</u> di dim. n su $\mathbb{K}$

$L \subset A$ <u>sottospazio affine</u>

$\overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Dir} L = \{\overrightarrow{pq} \mid p, q \in L\} \subset V$ sottospazio vettoriale

<u>sottospazio direttore</u> o <u>giacitura</u> di L

e L spazio affine su $\operatorname{Dir} L$ (restrizione struttura affine di V)

$\iff \exists\, p \in L$ t.c. $\{\overrightarrow{pq} \mid q \in L\} \subset V$ sottospazio vett. ($= \operatorname{Dir} L\ \forall\, p \in L$)

<u>iperpiano affine</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{codim}_A L \overset{\text{def}}{=\!=} \dim A - \dim L = 1$

<u>Note</u>: 1) A spazio affine su V, $p \in A$, $U \subset V$ sottospazio vett.

$\rightsquigarrow L = \{q \in A \mid \overrightarrow{pq} \in U\} = \{p + u \mid u \in U\} \subset A$

unico sottospazio affine per p con $\operatorname{Dir} L = U$

2) $L_1 \subset L_2 \subset A$ sottospazi affini $\Rightarrow \operatorname{Dir} L_1 \subset \operatorname{Dir} L_2$
$\Rightarrow \dim L_1 \leq \dim L_2$ (e vale $=$ se e solo se $L_1 = L_2$)

3) $L_1, L_2 \subset A$ sottospazi affini t.c. $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \Rightarrow$
$L_1 \cap L_2 \subset A$ sottosp. affine, $\operatorname{Dir}(L_1 \cap L_2) = \operatorname{Dir} L_1 \cap \operatorname{Dir} L_2$

<u>Esempi</u>: 1) punti/rette/piani $\subset$ retta/piano/spazio euclideo

2) sottospazi affini di V = laterali dei sottospazi vett. di V
($\operatorname{Dir}(U + v) = U$ per ogni $U \subset V$ sottosp. vett. e $v \in V$)

3) $L \subset A^n(\mathbb{K})$ sottospazio affine di dimensione k
$\Leftrightarrow L = \{x \in A^n(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = B\}$ con $A \in M_{n-k,n}\mathbb{K}$,
$\operatorname{rg} A = n - k$, $B \in \mathbb{K}^{n-k}$ ($\operatorname{Dir} L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\}$)
$\Leftrightarrow L = \{x = M \cdot t + C \mid t \in \mathbb{K}^k\}$ con $M \in M_{n,k}\mathbb{K}$,
$\operatorname{rg} M = k$, $C \in \mathbb{K}^n$ ($\operatorname{Dir} L = \{x = M \cdot t \mid t \in \mathbb{K}^k\}$)

$S \subset A$ sottoinsieme $\neq \varnothing \rightsquigarrow \langle S \rangle_{\text{Aff}}$ <u>sottospazio affine generato</u> da S

$\langle S \rangle_{\text{Aff}} \stackrel{\text{def}}{=\!=}$ più piccolo sottospazio affine di A contenente S
$=\!=$ *intersezione di tutti i sottospazi affini di A contenenti S*
$=\!=$ sottosp. affine t.c. $S \subset \langle S \rangle_{\text{Aff}}$ e $\operatorname{Dir}\langle S \rangle_{\text{Aff}} = \langle \{\overrightarrow{pq} \mid p, q \in S\} \rangle$

<u>Note</u>: 1) $p_0 \in S \Rightarrow \operatorname{Dir}\langle S \rangle_{\text{Aff}} = \langle \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in S\} \rangle$ ($\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p_0 q} - \overrightarrow{p_0 p}$)
$\Rightarrow \langle S \rangle_{\text{Aff}} = \{p_0 + a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_n \overrightarrow{p_0 p_n} \mid a_i \in \mathbb{K}, p_i \in S, n \geq 0\}$

2) $S \subset V$ spazio affine su se stesso
$\Rightarrow \langle S \rangle_{\text{Aff}} = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid \sum_i a_i = 1, v_i \in S, n \geq 1\} \subsetneq \langle S \rangle$

<u>Prop</u>. A spazio affine, $L_1, L_2 \subset A$ sottospazi affini t.c. $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$
$\dim\langle L_1 \cup L_2 \rangle_{\text{Aff}} = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$
<u>relazione di Grassmann affine</u>

<u>Dim</u>. $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{Dir}\langle L_1 \cup L_2 \rangle_{\text{Aff}} = \operatorname{Dir} L_1 + \operatorname{Dir} L_2$

$L_1, L_2 \subset A$ sottospazi affini

<u>paralleli</u> ($L_1 \parallel L_2$) $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Dir} L_i \subset \operatorname{Dir} L_j$ ($\Rightarrow L_i \cap L_j = \varnothing$ o $L_i \subset L_j$)

<u>incidenti</u> $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ e L_1, L_2 non paralleli (cioè $L_i \not\subset L_j$)

<u>trasversali</u> $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ e $\operatorname{Dir} L_1 + \operatorname{Dir} L_2 = V$

<u>complementari</u> $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ e $\operatorname{Dir} L_1 \oplus \operatorname{Dir} L_2 = V$

<u>sghembi</u> $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L_1 \cap L_2 = \varnothing$ e L_1, L_2 non paralleli

Note: 1) parallelismo $\rightsquigarrow$ equiv. tra sottospazi della stessa dim.

2) L_1 retta, $|L_1 \cap L_2| > 1 \Rightarrow L_1 \subset L_2$ ($\exists!$ retta per due punti)

3) L_1, L_2 trasversali $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$ e $\langle L_1 \cup L_2 \rangle_{\mathrm{Aff}} = A$

4) L_1, L_2 complementari $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \{p\}$ e $\langle L_1 \cup L_2 \rangle_{\mathrm{Aff}} = A$

Prop. A spazio affine, $p \in A$, $L \subset A$ sottospazio affine
$\Rightarrow \exists!\, L' \subset A$ sottosp. aff. t.c. $p \in L'$, $L' \parallel L$ e $\dim L' = \dim L$

Dim. L' = unico sottospazio affine di A t.c. $p \in L'$ e $\mathrm{Dir}\, L' = \mathrm{Dir}\, L$

Teorema di Talete

A spazio affine, $L_1, L_2, H, H', H'' \subset A$ sottospazi affini
t.c. L_1 e L_2 complementari rispetto ad $H \parallel H' \parallel H''$
$L_i \cap H = \{p_i\}$, $L_i \cap H' = \{p_i'\}$, $L_i \cap H'' = \{p_i''\}$
$\overrightarrow{p_1p_1''} = k\,\overrightarrow{p_1p_1'}$ con $k \in \mathbb{K} \Rightarrow \overrightarrow{p_2p_2''} = k\,\overrightarrow{p_2p_2'}$

Dim. possiamo assumere

1) $p_1 = p_2 = p$ ($L_2 \rightsquigarrow L_2 - \overrightarrow{p_1p_2}$)

2) L_1, L_2 rette distinte e H, H', H'' iperpiani distinti
($L_1 \rightsquigarrow \langle p, p_1' \rangle_{\mathrm{Aff}}$, $L_2 \rightsquigarrow \langle p, p_2', p_2'' \rangle_{\mathrm{Aff}}$, $A \rightsquigarrow \langle H \cup L_1 \rangle_{\mathrm{Aff}}$
$H, H', H'', L_1, L_2 \subset A$ + Grassmann $\Rightarrow \dim L_2 = 1$)

3) A piano e $H, H', H'' \subset A$ rette ($A \rightsquigarrow \langle L_1 \cup L_2 \rangle_{\mathrm{Aff}}$)

$\Rightarrow \overrightarrow{pp_i''} = k_i\,\overrightarrow{pp_i'}$ e $\overrightarrow{p_1''p_2''} = \ell\,\overrightarrow{p_1'p_2'}$ (con $k_1 = k$)

$\Rightarrow k_2\,\overrightarrow{pp_2'} - k_1\,\overrightarrow{pp_1'} = \overrightarrow{pp_2''} - \overrightarrow{pp_1''} = \overrightarrow{p_1''p_2''} = \ell\,\overrightarrow{p_1'p_2'} = \ell\,\overrightarrow{pp_2'} - \ell\,\overrightarrow{pp_1'}$

$\Rightarrow k_2 = \ell = k_1 = k$ ($\overrightarrow{pp_1'}$ e $\overrightarrow{pp_2'}$ linearmente indip.)

Nota: nel piano vale anche il viceversa (criterio di parallelismo)

Teorema di Desargues

A spazio affine, $L = \langle p, q \rangle_{\mathrm{Aff}}$, $L' = \langle p', q' \rangle_{\mathrm{Aff}}$, $L'' = \langle p'', q'' \rangle_{\mathrm{Aff}}$
rette distinte tali che $L \parallel L' \parallel L''$ o $L \cap L' \cap L'' \neq \varnothing$,
$\langle p, p' \rangle_{\mathrm{Aff}} \parallel \langle q, q' \rangle_{\mathrm{Aff}} \wedge \langle p', p'' \rangle_{\mathrm{Aff}} \parallel \langle q', q'' \rangle_{\mathrm{Aff}} \Rightarrow \langle p, p'' \rangle_{\mathrm{Aff}} \parallel \langle q, q'' \rangle_{\mathrm{Aff}}$

Dim. $L \parallel L' \parallel L'' \Rightarrow \overrightarrow{qq'} = \overrightarrow{pp'} \wedge \overrightarrow{q'q''} = \overrightarrow{p'p''} \Rightarrow \overrightarrow{qq''} = \overrightarrow{pp''}$

$L \cap L' \cap L'' = \{p_0\} \Rightarrow \overrightarrow{p_0q} = k\,\overrightarrow{p_0p}$, $\overrightarrow{p_0q'} = k\,\overrightarrow{p_0p'}$, $\overrightarrow{p_0q''} = k\,\overrightarrow{p_0p''}$

$\Rightarrow \overrightarrow{qq''} = k\,\overrightarrow{pp''} \Rightarrow \langle p, p'' \rangle_{\mathrm{Aff}} \parallel \langle q, q'' \rangle_{\mathrm{Aff}}$

A spazio affine reale (cioè V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$)

$H \subset A$ iperpiano, $v \in V - \operatorname{Dir} H$

$\rightsquigarrow$ <u>semispazio</u> $\sigma(H,v) \overset{\text{def}}{=\!=} \{p + a\,v \mid p \in H, a > 0\}$

$p,q \in A \rightsquigarrow$ <u>segmento</u> $pq \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{pq} = \{p + a\,\overrightarrow{pq} \mid 0 \le a \le 1\}$

$C \subset A$ <u>convesso</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \overline{pq} \subset C$ per ogni $p,q \in C$

$S \subset A \rightsquigarrow \langle S \rangle_{\text{Con}}$ <u>involucro convesso</u> di S

$\overset{\text{def}}{=\!=}$ più piccolo convesso di A contenente S

$=\!=$ intersez. di tutti i convessi di A contenenti S

<u>Note</u>: 1) $H \subset A$ iperpiano $\rightsquigarrow$ 2 semispazi opposti uscenti da H

($p,q \in A - H$ nello stesso semispazio $\Leftrightarrow \overline{pq} \cap H = \varnothing$)

2) $p,q \in A \Rightarrow \overline{pq} = \overline{qp}$ convesso $\Rightarrow \overline{pq} = \langle p,q \rangle_{\text{Con}}$

3) sottospazi sono convessi $\Rightarrow \langle S \rangle_{\text{Con}} \subset \langle S \rangle_{\text{Aff}}$ per ogni $S \subset A$

<u>Esempi</u>: 1) p punto $\in r$ retta $\rightsquigarrow$ 2 semirette $\subset r$ uscenti da p

r retta $\subset \pi$ piano $\rightsquigarrow$ 2 semipiani $\subset \pi$ uscenti da r

2) V spazio affine su se stesso $\Rightarrow$

$\overline{vw} = \{a\,v + b\,w \mid a + b = 1, a \ge 0, b \ge 0\}$

$\langle S \rangle_{\text{Con}} = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid \sum_i a_i = 1, a_i \ge 0, v_i \in S, n \ge 1\}$

3) $H = \{x \in A^n(\mathbb{R}) \mid \sum_i a_i x_i = b\}$ iperpiano di $A^n(\mathbb{R})$

$\rightsquigarrow \sigma_\pm = \{x \in A^n(\mathbb{R}) \mid \sum_i a_i x_i \gtrless b\}$ semispazi da H

<u>Applicazioni affini</u>

$\varphi : A \to B$ con A, B spazi affini su V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

<u>applicazione affine</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi_* : V \to W$ applicazione lineare

tale che $\varphi_*(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}\ \forall\, p,q \in A$

cioè $\varphi(q) = \varphi(p) + \varphi_*(\overrightarrow{pq})\ \forall\, p,q \in A$

<u>isomorfismo affine</u> $\overset{\text{def}}{\iff} \varphi_*$ isomorfismo

$A \cong B \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \varphi : A \to B$ isomorfismo affine

$\hookleftarrow$ spazi affini <u>isomorfi</u>

<u>Note</u>: 1) φ determina univocamente $\varphi_* = \gamma_{\varphi(p)} \circ \varphi \circ \gamma_p^{-1}\ \forall\, p \in A$

$(\varphi_*(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \gamma_{\varphi(p)}(\varphi(q)) = \gamma_{\varphi(p)}(\varphi(\gamma_p^{-1}(\overrightarrow{pq}))))$

2) φ_* è iniettiva/suriettiva/invertibile
$\Leftrightarrow \varphi$ è iniettiva/suriettiva/invertibile

3) $\mathrm{id}_A : A \to A$ e $\mathrm{cost} : A \to A$ sono applicazioni affini

4) $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ affini $\Rightarrow \psi \circ \varphi : A \to C$ affine

5) $\varphi : A \to B$ isom. affine $\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1} : B \to A$ isom. affine
$\hookrightarrow \cong$ "relazione di equivalenza" tra spazi affini

<u>Prop</u>. A, B spazi affini su V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$
$\forall\, p_0 \in A\,,\ \forall\, q_0 \in B\,,\ \forall\, \psi : V \to W$ appl. lineare
$\exists!\, \varphi : A \to B$ appl. affine t.c. $\varphi(p_0) = q_0$ e $\varphi_* = \psi$

<u>Dim</u>. $\varphi = \gamma_{q_0}^{-1} \circ \psi \circ \gamma_{p_0} \Rightarrow \varphi(p) = q_0 + \psi(\overrightarrow{p_0 p})$ per ogni $p \in A$
$\Rightarrow \varphi(q) = \varphi(p) + \psi(\overrightarrow{pq})\ \forall\, p, q \in A \Rightarrow \varphi$ appl. affine e $\varphi_* = \psi$

<u>Corol</u>. $A \cong B \Leftrightarrow \dim A = \dim B$ (spazi affini sullo stesso $\mathbb{K}$)

<u>Note</u>: 1) affinità del piano/spazio euclideo = isomorfismi affini

2) $\varphi : V \to W$ applic. affine (V, W spazi affini su se stessi)
$\Leftrightarrow \varphi(v) = \varphi_*(v) + w_0$ con $\varphi_* : V \to W$ lineare, $w_0 = \varphi(0)$

3) $\varphi : A^n(\mathbb{K}) \to A^m(\mathbb{K})$ applicazione affine
$\Leftrightarrow \varphi(x) = M \cdot x + C$ con $M \in M_{m,n}\mathbb{K}$ e $C \in A^m(\mathbb{K})$

<u>Prop</u>. $\varphi : A \to B$ applicazione affine

1) $A' \subset A$ sottosp. affine $\Rightarrow B' = \varphi(A') \subset B$ sottosp. affine

2) $B' \subset B$ sottosp. affine $\Rightarrow A' = \varphi^{-1}(B') \subset A$ sottosp. affine
$\rightsquigarrow \varphi_| : A' \to B'$ applicazione affine

<u>Dim</u>. 1) $\mathrm{Dir}\, A'$ sottosp. vett. $\Rightarrow \mathrm{Dir}\, B' = \varphi_*(\mathrm{Dir}\, A')$ sottosp. vett.
2) $\mathrm{Dir}\, B'$ sottosp. vett. $\Rightarrow \mathrm{Dir}\, A' = \varphi_*^{-1}(\mathrm{Dir}\, B')$ sottosp. vett.

<u>Note</u>: 1) $\varphi : A \to B$ appl. affine $\Rightarrow \varphi$ conserva il parallelismo
cioè: $A_1 \parallel A_2 \subset A \Rightarrow \varphi(A_1) \parallel \varphi(A_2) \subset B$
$B_1 \parallel B_2 \subset B \Rightarrow \varphi^{-1}(B_1) \parallel \varphi^{-1}(B_2) \subset A$

2) $\varphi : A \to B$ appl. affine tra spazi affini reali
$\Rightarrow \varphi(\overline{pq}) = \overline{\varphi(p)\varphi(q)}$ per ogni $p, q \in A$
$C \subset A$ convesso $\Rightarrow \varphi(C)$ convesso

Trasformazioni affini

A spazio affine su V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$\operatorname{Aff} A \stackrel{\text{def}}{=} (\{\varphi : A \to A \mid \varphi \text{ isomorfismo affine}\}, \circ)$
↳ gruppo delle affinità di A

$\operatorname{Tra} A \stackrel{\text{def}}{=} (\{\tau_v : A \to A \mid v \in V\}, \circ) \cong (V, +)$
↳ gruppo delle traslazioni di A

$\operatorname{Dil} A \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi \in \operatorname{Aff} A \mid \varphi(L) \parallel L\,,\ \forall\, L \subset A \text{ sottosp. affine}\}, \circ)$
↳ gruppo delle dilatazioni di A

$p \in A \rightsquigarrow \operatorname{Aff}_p A \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \operatorname{Aff} A \mid \varphi(p) = p\} \subset \operatorname{Aff} A$
$\operatorname{Dil}_p A \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \operatorname{Dil} A \mid \varphi(p) = p\} \subset \operatorname{Dil} A$

Note: 1) $\operatorname{Tra} A \subset \operatorname{Dil} A \subset \operatorname{Aff} A$ sottogruppi normali
$(\varphi \in \operatorname{Tra} \Leftrightarrow \varphi_* = \mathrm{id}_V\,,\ \varphi \in \operatorname{Dil} \Leftrightarrow \varphi_* : v \mapsto k\,v)$

2) $\operatorname{Aff}_p A \subset \operatorname{Aff} A$ e $\operatorname{Dil}_p A \subset \operatorname{Dil} A$ sottogr. non normali
$(v = \overrightarrow{pq} \Rightarrow \tau_v(\operatorname{Aff}_p A)\tau_v^{-1} = \operatorname{Aff}_q A\,,\ \tau_v(\operatorname{Dil}_p A)\tau_v^{-1} = \operatorname{Dil}_q A)$

3) $\varphi \in \operatorname{Dil} A \Leftrightarrow \varphi(L) \parallel L$ per ogni retta $L \subset A$
$\varphi \in \operatorname{Dil}_p A \Leftrightarrow \varphi = \delta_{p,k}$ con $k \in \mathbb{K} - \{0\}$

4) $\operatorname{Dil} A = \operatorname{Tra} A \cup (\cup_p \operatorname{Dil}_p A)$
$(\varphi \neq \mathrm{id}_A \rightsquigarrow p_0 \in A$ t.c. $\varphi(p_0) \neq p_0 \rightsquigarrow L = \langle p_0, \varphi(p_0)\rangle_{\operatorname{Aff}}$
$\varphi(L) = L \rightsquigarrow \varphi_{|L} : L \to L$ traslazione/dilatazione di L
$\Rightarrow \varphi = \tau_v$ con $v = \overrightarrow{p_0\varphi(p_0)}$ o $\varphi = \delta_{p,k}$ con $p \in L)$

Prop. $\Phi : \operatorname{Aff} A \to \operatorname{Aut} V$ def. $\varphi \mapsto \varphi_*$ omomorfismo di gruppi
tale che $\Phi_| : \operatorname{Aff}_p A \cong \operatorname{Aut} V\ \forall\, p \in A$ e $\operatorname{Tra} A = \ker \Phi$

Dim. $\forall\, \psi \in \operatorname{Aut} V\ \exists!\, \varphi \in \operatorname{Aff} A$ t.c. $\varphi(p) = p$ e $\varphi_* = \psi$
$\varphi = \tau_v \in \operatorname{Tra} A \Leftrightarrow \overrightarrow{p\varphi(p)} = \overrightarrow{q\varphi(q)} = v\ \forall\, p, q \in A$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}\ \forall\, p, q \in A \Leftrightarrow \varphi \in \ker \Phi$

Note: 1) $p \in A \rightsquigarrow \operatorname{Aff} A \leftrightarrow \operatorname{Aff}_p A \times \operatorname{Tra} A$ definita $\varphi \leftrightarrow (\varphi_p, \tau_v)$
con $\varphi = \tau_v \circ \varphi_p\,,\ v = \overrightarrow{p\varphi(p)}\,,\ \varphi_p = \tau_v^{-1} \circ \varphi \in \operatorname{Aff}_p A$

2) $\varphi = \tau_v \circ \varphi_p,\ \psi = \tau_w \circ \psi_p \Rightarrow \psi \circ \varphi = \tau_{\psi_*(v)+w} \circ (\psi \circ \varphi)_p$
(in generale $\tau_{\psi_*(v)+w} = \tau_w \circ \tau_{\psi_*(v)} \neq \tau_w \circ \tau_v = \tau_{v+w}$)

3) V spazio affine su se stesso $\Rightarrow \operatorname{Aff}_0 V = \operatorname{Aut} V$
$\rightsquigarrow \operatorname{Aff} V \leftrightarrow \operatorname{Aut} V \times \operatorname{Tra} V$ def. $\varphi \leftrightarrow (\varphi_*, \tau_{\varphi(0)})$
$\rightsquigarrow \psi \circ \varphi = \tau_{\psi_*(\varphi(0))+\psi(0)} \circ (\psi \circ \varphi)_*$

A spazio affine reale (cioè V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$)

$\operatorname{Aff}^+ A = \{\varphi \in \operatorname{Aff} \mid \varphi_* \in \operatorname{Aut}^+ V\} \subset \operatorname{Aff} A$ sottogr. normale
gruppo delle affinità che conservano le orientazioni
(orientazione di $A \overset{\text{def}}{=\!=}$ orientazione di V)

Nota: $\operatorname{Tra} \subset \operatorname{Aff}^+ A$, mentre $\operatorname{Dil} A \subset \operatorname{Aff}^+ A \Leftrightarrow \dim A$ è pari

Riferimenti affini

A spazio affine su V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
$p_0, \ldots, p_n \in A$ affinemente indipendenti
$\overset{\text{def}}{\iff} \overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_n}$ linearmente indipendenti in V
$\iff \dim \langle p_0, \ldots, p_n \rangle_{\mathrm{Aff}} = n$ $(\operatorname{Dir} \langle p_0, \ldots, p_n \rangle_{\mathrm{Aff}} = \langle \overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_n} \rangle)$
$\iff p_i \notin \langle p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n \rangle_{\mathrm{Aff}}, \ \forall\, i = 0, \ldots, n$

Nota: $p_0, \ldots, p_n \in A$ affinemente indipendenti $\Rightarrow n \leq \dim A$
$\langle p_0, \ldots, p_n \rangle_{\mathrm{Aff}}$ unico sottosp. aff. n-dim. contenente $p_0, \ldots, p_n$

Esempi: 1) p_0, p_1 affinemente indipendenti $\Leftrightarrow$ distinti
$\langle p_0, p_1 \rangle_{\mathrm{Aff}} =$ retta affine passante per p_0 e p_1
2) p_0, p_1, p_2 affinemente indipendenti $\Leftrightarrow$ non allineati
$\langle p_0, p_1, p_2 \rangle_{\mathrm{Aff}} =$ piano affine passante per p_0, p_1 e p_2
$\langle p_0, p_1, p_2 \rangle_{\mathrm{Con}} =$ triangolo p_0, p_1, p_2 (solo per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
3) p_0, p_1, p_2, p_3 affinemente indipend. $\Leftrightarrow$ non complanari

Prop. A, B spazi affini su V, W spazi vett. su $\mathbb{K}$, $\dim A = n < \infty$
$\forall\, p_0, \ldots, p_n \in A$ affinemente indip. $\forall\, q_0, \ldots, q_n \in B$
$\exists!\, \varphi : A \to B$ applicazione affine t.c. $\varphi(p_i) = q_i$

Dim. $p_0, \ldots, p_n \in A$ affinem. indip. $\Rightarrow \{\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_n}\}$ base di V
$\rightsquigarrow$ unica $\psi : V \to W$ lineare t.c. $\psi(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{q_0 q_i}\ \forall\, i = 1, \ldots n$
$\rightsquigarrow$ unica $\varphi : A \to B$ t.c. $\varphi(p_0) = q_0$ e $\varphi_* = \psi$

Nota: φ suriettiva $\Leftrightarrow \langle q_0, \ldots, q_n \rangle_{\text{Aff}} = B$
φ iniettiva $\Leftrightarrow q_0, \ldots, q_n$ affinemente indip. in B
φ isomorfismo affine $\Leftrightarrow$ valgono entrambe

A spazio affine su V di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$

$p_0 \in A \rightsquigarrow \gamma_{p_0} : A \to V$ isomorfismo affine
$p_0, p_1, \ldots, p_n \in A$ affinemente indipendenti
$\rightsquigarrow B = (v_1 = \overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, v_n = \overrightarrow{p_0 p_n})$ base ordinata di V
$\rightsquigarrow R = (p_0, B)$ riferimento affine con orgine in p_0
$\rightsquigarrow \gamma_R = \gamma_B \circ \gamma_{p_0} : A \to A^n(\mathbb{K})$ isom. affine (coordinate affini)

Note: 1) $p_0, p_0' \in A \rightsquigarrow \gamma_{p_0'} \circ \gamma_{p_0}^{-1} : v \mapsto v - v_0$ con $v_0 = \overrightarrow{p_0 p_0'}$
2) $R = (p_0, B)$ e $R' = (p_0', B')$ riferimenti affini su A
$\rightsquigarrow \gamma_{R,R'} = \gamma_{R'} \circ \gamma_R^{-1} : x \mapsto M_{B,B'} \cdot x - x_0$ con $x_0 = \gamma_{B'}(v_0)$
cambiamento di coordinate affini
3) $\varphi : A \to B$ appl. affine, R e S riferimenti affini su A e B
$\rightsquigarrow \varphi_{R,S} : A^n(\mathbb{K}) \to A^m(\mathbb{K})$ appl. aff. def. $\varphi_{R,S} = \gamma_S \circ \varphi \circ \gamma_R^{-1}$
φ in coord. affini indotte da R e S
4) R', S' altri rif. affini su $A, B \rightsquigarrow \varphi_{R',S'} = \gamma_{S,S'} \circ \varphi_{R,S} \circ \gamma_{R,R'}^{-1}$
5) A spazio affine reale, $\dim A = n < \infty$
orient. di $A \leftrightarrow$ classi di equiv. di $(p_0, \ldots, p_n)$ affin. indip.

Equazioni di sottospazi

A spazio affine su V di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$
$R = (O, B)$ riferimento affine con origine $O \in A$
$\rightsquigarrow \gamma_R : A \to A^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ coordinate affini
$\rightsquigarrow (\gamma_R)_* = \gamma_B : V \to \mathbb{K}^n$ coordinate lineari

$L \subset A$ sottosp. affine $\xleftrightarrow{\gamma_R} \gamma_R(L) \subset A^n(\mathbb{K})$ sottosp. affine
$\rightsquigarrow \operatorname{Dir} L \xleftrightarrow{\gamma_B} \gamma_B(\operatorname{Dir} L) = \operatorname{Dir}(\gamma_R(L)) \rightsquigarrow \dim L = \dim \gamma_R(L)$

$L_1, L_2 \subset A$ sottosp. affini paralleli/incid./trasv./compl./sghembi
$\Leftrightarrow \gamma_R(L_1), \gamma_R(L_2) \subset A^n(\mathbb{K})$ paralleli/incid./trasv./compl./sghembi
$\rightsquigarrow$ basta considerare i sottospazi affini di $A^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$

$p_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{K}^n \rightsquigarrow v_1 = p_1 - p_0 \, , \ldots , v_k = p_k - p_0 \in \mathbb{K}^n$

$p_0, p_1, \ldots, p_k$ affinemente indipendenti
$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(v_1 \ldots v_k) = k$ con $v_1, \ldots, v_k \in M_{n,1}\mathbb{K}$
$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\widetilde{p}_0 \ldots \widetilde{p}_k) = k+1$ con $\widetilde{p}_i = (1, p_i) \in M_{n+1,1}\mathbb{K}$

Equazione parametrica di $\langle p_0, p_1, \ldots, p_k \rangle_{\mathrm{Aff}} \subset \mathbb{K}^n$

$x = p_0 + t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coord. e t_i parametri
$(\widetilde{x} = t_0 \widetilde{p}_0 + t_1 \widetilde{p}_1 + \ldots + t_k \widetilde{p}_k$ con $\widetilde{x} = (1, x)\, , \widetilde{p}_i = (1, p_i)\, , \sum_{i=0}^k t_i = 1)$
$\leftrightsquigarrow x = M \cdot t + C$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)\, , t = (t_1, \ldots, t_k)$ vett. colonna
$M = (v_1 \ldots v_k) \in M_{n,k}\mathbb{K}$ e $C = p_0 \in M_{n,1}\mathbb{K}$
$\leftrightsquigarrow \widetilde{x} = \widetilde{M} \cdot \widetilde{t}$ con $\widetilde{x} = (1, x)\, , \widetilde{t} = (1, t)$ vett. colonna
e $\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right) \in M_{n+1,k+1}\mathbb{K}$

Equazione cartesiana di $\langle p_0, p_1, \ldots, p_k \rangle_{\mathrm{Aff}} \subset \mathbb{K}^n$

$\operatorname{rg}(v_1 \ldots v_k \;\, x - p_0) = k$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coord. e $p_0 \in M_{n,1}\mathbb{K}$
$(\operatorname{rg}(\widetilde{p}_0 \; \widetilde{p}_1 \ldots \widetilde{p}_k \; \widetilde{x}) = k+1$ con $\widetilde{x} = (1, x)$ vett. col. e $\widetilde{p}_i \in M_{n+1,1}\mathbb{K})$
$\leftrightsquigarrow \det M_1 = \ldots = \det M_{n-k} = 0$ con $M_1, \ldots, M_{n-k}$ orlati di $Q \subset M$
mat. quadrata con $\operatorname{rg} Q = k$
$\leftrightsquigarrow A \cdot x = B$ con $A \in M_{n-k,n}\mathbb{K}\, , \operatorname{rg} A = n - k\, , B \in M_{n-k,1}\mathbb{K}$
$\leftrightsquigarrow \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = 0$ con $\widetilde{x} = (1, x)$ vett. col. e $\widetilde{A} = (-B|A) \in M_{n-k,n+1}\mathbb{K}$

Condizioni di parallelismo

$L \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio affine $\leftrightsquigarrow x = M \cdot t + C \leftrightsquigarrow A \cdot x = B$
$\rightsquigarrow \operatorname{Dir} L \subset \mathbb{K}^n \leftrightsquigarrow x = M \cdot t \leftrightsquigarrow A \cdot x = 0$
$L' \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio affine t.c. $x_0 \in L'$ e $L' \parallel L$ e $\dim L' = \dim L$
$\leftrightsquigarrow x = M \cdot t + x_0 \leftrightsquigarrow A \cdot (x - x_0) = 0 \; (A \cdot x = A \cdot x_0)$
$L_1, L_2 \subset \mathbb{K}^n$ sottospazi affini $\leftrightsquigarrow x = M_i \cdot t + C_i \leftrightsquigarrow A_i \cdot x = B_i$
$\rightsquigarrow L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(M_1|M_2) = \max\{\operatorname{rg} M_1, \operatorname{rg} M_2\}$ $(M_1 \parallel M_2$ se L_i rette$)$
$\Leftrightarrow \operatorname{rg}\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right) = \max\{\operatorname{rg} A_1, \operatorname{rg} A_2\}$ $(A_1 \parallel A_2$ se L_i iperpiani$)$
$\Leftrightarrow A_1 \cdot M_2 = 0$ o $A_2 \cdot M_1 = 0$

Affinità in coordinate

A spazio affine su V di dimensione $n < \infty$ su $\mathbb{K}$

$R = (O, B)$ riferimento affine con origine $O \in A$

$\rightsquigarrow \operatorname{Aff} A \cong \operatorname{Aff} A^n(\mathbb{K}) = \operatorname{Aff} \mathbb{K}^n$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \varphi_R \overset{\text{def}}{=\!=} \gamma_R \circ \varphi \circ \gamma_R^{-1}$

φ in coord. affini indotte da R

$(\rightsquigarrow \operatorname{Tra} A \cong \operatorname{Tra} \mathbb{K}^n,\ \operatorname{Dil} A \cong \operatorname{Dil} \mathbb{K}^n,\ \operatorname{Aff}_p A \cong \operatorname{Aff}_{\gamma_R(p)} \mathbb{K}^n)$

Note: 1) $R' = (O', B')$ altro rif. affine $\rightsquigarrow \varphi_{R'} = \gamma_{R,R'} \circ \varphi_R \circ \gamma_{R,R'}^{-1}$

2) $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ affinità

$\Leftrightarrow y = \varphi(x) = M \cdot x + C$ con $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e $C \in M_{n,1}\mathbb{K}$

$\Leftrightarrow \widetilde{y} = \widetilde{M} \cdot \widetilde{x}$ con $\widetilde{x} = (1, x)$, $\widetilde{y} = (1, y)$ e $\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right)$

3) $\gamma_{R,R'}$ cambiamento di coordinate affini ha questa forma

$$\operatorname{Aff} \mathbb{K}^n \cong \mathrm{A}(n, \mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=\!=} (\{\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right) \mid M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), C \in M_{n,1}\mathbb{K}\}, \cdot)$$

gruppo affine di grado n su $\mathbb{K}$

Note: 1) $\mathrm{A}(n, \mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})$ sottogruppo (non normale)

2) $\varphi, \psi \in \operatorname{Aff} \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = z$

$y = M \cdot x + C$, $z = N \cdot y + D \rightsquigarrow z = (N \cdot M) \cdot x + (N \cdot C + D)$

$\widetilde{y} = \widetilde{M} \cdot \widetilde{x}$, $\widetilde{z} = \widetilde{N} \cdot \widetilde{y} \rightsquigarrow \widetilde{z} = (\widetilde{N} \cdot \widetilde{M}) \cdot \widetilde{x}$

Equivalenza affine

A spazio affine, $X, Y \subset A$ sottoinsiemi

$X \cong_{\mathrm{Aff}} Y \overset{\text{def}}{\iff} \exists \varphi \in \operatorname{Aff} A$ tale che $Y = \varphi(X)$

X e Y affinemente equivalenti

Esempi: 1) $L \cong_{\mathrm{Aff}} L' \Leftrightarrow \dim L = \dim L'$, $\forall L, L' \subset A$ sottosp. affini

$(A = \mathbb{K}^n$, $\varphi \in \operatorname{Aff} \mathbb{K}^n$ t.c. $\varphi(L) = L'$, $\varphi(x) = N \cdot x + D$

$L : x = M \cdot t + C \rightsquigarrow L' : x = (N \cdot M) \cdot t + (N \cdot C + D)$

$L : A \cdot x = B \rightsquigarrow L' : (A \cdot N^{-1}) \cdot x = B + A \cdot N^{-1} \cdot D$

$$\widetilde{N} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & N \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} L : x = \widetilde{M} \cdot t \rightsquigarrow L' : x = (\widetilde{N} \cdot \widetilde{M}) \cdot t \\ L : \widetilde{A} \cdot x = 0 \rightsquigarrow L' : (\widetilde{A} \cdot \widetilde{N}^{-1}) \cdot \widetilde{x} = 0 \end{cases}$$

2) $\{p_1, \dots, p_n\} \cong_{\mathrm{Aff}} \{q_1, \dots, q_n\}$ $\forall \{p_i\}, \{q_i\}$ affinem. indip.

3) A spazio affine $\rightsquigarrow$ triangoli tutti affinem. equivalenti
A piano affine $\rightsquigarrow$ quadrilateri non tutti affinem. equiv.

4) A spazio affine reale $\rightsquigarrow$ segmenti e semispazi sono tutti affinemente equivalenti
$(\langle p_1,\ldots,p_n\rangle_{\text{Con}} \cong_{\text{Aff}} \langle q_1,\ldots,q_n\rangle_{\text{Con}}\ \forall\,\{p_i\},\{q_i\}$ aff. indip.)

$\mathcal{P}$ proprietà riferita ai sottoinsiemi di uno spazio affine A
<u>proprietà affine</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ proprietà *invariante per affinità* di A
(cioè: $\mathcal{P}$ vale per $X \Leftrightarrow \mathcal{P}$ vale per $\varphi(X)\ \forall\varphi\in\operatorname{Aff}A$)

<u>Note</u>: 1) $\mathcal{P}$ proprietà di $X\subset A$ è affine $\Leftrightarrow$ si può esprimere *in termini della struttura affine di A* (soltanto)
2) $\mathcal{P}$ proprietà di $X\subset A$ definita *in coordinate affini* è affine $\Leftrightarrow$ non dipende dalla scelta del riferim. affine

<u>Esempi</u>: 1) *indip. affine* di $X=\{p_1,\ldots,p_k\}$ è una prop. affine
2) $p =$ <u>baricentro</u> di $X=\{p_1,\ldots,p_k\}$ def. in coord. affini
$x = \operatorname{bar}\{x_1,\ldots,x_k\} \overset{\text{def}}{=} \sum_i x_i/k$ (combinazione affine)
è una prop. affine ($\sum_i(M\cdot x_i + C)/k = M\cdot x + C$)
3) convessità di $X\subset A$ sp. affine reale è una prop. affine

<u>Quadriche affini</u>

A spazio affine di dimensione $n<\infty$ su $\mathbb{K}$, $\operatorname{car}\mathbb{K}\neq 2$

$Q\subset A$ <u>quadrica</u> affine
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Q ha equaz. cart. di grado 2 *in un* sistema di coord. affini
$\Longleftrightarrow$ Q ha equaz. cart. di grado 2 *in ogni* sistema di coord. affini
$\Longleftrightarrow$ Q ha equaz. cart. scalare di grado 2 in $L\subset A$ sottosp. affine
(Q è una <u>ipersuperficie quadrica</u> *in* L, $\dim Q \overset{\text{def}}{=} \dim L - 1$)

<u>Esempi</u>: coniche/quadriche nel piano/spazio euclideo

$Q\,,Q'\subset A$ quadriche con $\dim Q = \dim Q'$
$\rightsquigarrow Q\subset L,\ Q'\subset L'$ ipersuperfici quadriche con $\dim L = \dim L'$
$\rightsquigarrow Q\,,Q'\subset L$ ipersuperfici quadriche (a meno di affinit)
$\rightsquigarrow$ basta considerare ipersuperfici quadriche

$R = (O, B)$ riferimento affine con origine $O \in A$
$\rightsquigarrow \gamma_R : A \to A^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ isomorfismo affine
$Q \subset A$ (ipersuperf.) quadrica $\xleftrightarrow{\gamma_R} \gamma_R(Q)$ (ipersuperf.) quadrica
$Q\,, Q' \subset A$ (ipersup.) quadriche, $Q \cong_{\mathrm{Aff}} Q' \Leftrightarrow \gamma_R(Q) \cong_{\mathrm{Aff}} \gamma_R(Q')$
$\rightsquigarrow$ basta considerare ipersuperfici quadriche in $A^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$

$Q \subset \mathbb{K}^n$ ipersuperficie quadrica, $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$
$\leftrightsquigarrow \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n 2b_i x_i + c = 0$
equazione cartesiana con $a_{i,j}, b_i, c \in \mathbb{K}$ e $a_{i,j}$ non tutti nulli
a meno di moltiplicazione per un fattore $k \in \mathbb{K} - \{0\}$
$\leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$ con $A \in M^{\mathrm{sim}}_{n,n}\mathbb{K} - \{0\}\,, B \in M_{1,n}\mathbb{K}\,, C \in \mathbb{K}$
$\leftrightsquigarrow \widetilde{x}^* \cdot \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = 0$ con $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline B^* & A \end{array}\right) \in M^{\mathrm{sim}}_{n+1,n+1}\mathbb{K}\,, A \in M^{\mathrm{sim}}_{n,n}\mathbb{K} - \{0\}$

<u>Prop</u>. $\operatorname{rg}\widetilde{A}\,, \operatorname{rg} A$ proprietà affini di Q
(indipendenti dall'equazione)

<u>Dim</u>. $\widetilde{x} = \widetilde{M} \cdot \widetilde{x}'$ con $\widetilde{M} \in \mathrm{A}(n, \mathbb{K})$
$\Rightarrow \widetilde{x}^* \cdot \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = 0 \rightsquigarrow \widetilde{x}'^* \cdot \widetilde{A}' \cdot \widetilde{x}' = 0$
con $\widetilde{A}' = \widetilde{M}^* \cdot \widetilde{A} \cdot \widetilde{M} \Rightarrow \operatorname{rg}\widetilde{A}' = \operatorname{rg}\widetilde{A}$
$x = M \cdot x'$ con $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$
$\Rightarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0 \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x' + 2B' \cdot x' + C' = 0$
con $A' = M^* \cdot A \cdot M \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$
$x = x' + D$ con $D \in M_{n,1}\mathbb{K}$
$\Rightarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0 \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x' + 2B' \cdot x' + C' = 0$
con $A' = A \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$
$\widetilde{A}' = k\,\widetilde{A}$ con $k \in \mathbb{K} - \{0\} \Rightarrow \operatorname{rg}\widetilde{A}' = \operatorname{rg}\widetilde{A}$
$A' = k\,A$ con $k \in \mathbb{K} - \{0\} \Rightarrow \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$

$\rightsquigarrow \operatorname{rg} Q \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \operatorname{rg}\widetilde{A}$ (rango della quadrica Q)
$\operatorname{rg} Q_\infty \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \operatorname{rg} A$ (rango della quadrica all'infinito Q_∞)

<u>Note</u>: 1) $1 \leq \operatorname{rg} Q \leq n+1$ e $1 \leq \operatorname{rg} Q_\infty \leq n$
2) $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q\,, \operatorname{rg} Q - 1\,, \operatorname{rg} Q - 2$

<u>Prop</u>. $Q \subset \mathbb{K}^n$ ipersuperficie quadrica, $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$
$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento affine con coordinate x tale che
Q ha equazione <u>canonica</u> $x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$
con $a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, $a_{i,i} = 0$ se $i > \operatorname{rg} Q_\infty$

$$b_i = 0 \text{ se } i \neq n\,, \begin{cases} b_n = 0 \text{ e } C = 0 \text{ se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q \\ b_n = 0 \text{ e } C = 1 \text{ se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1 \\ b_n = 1 \text{ e } C = 0 \text{ se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2 \end{cases}$$

<u>Dim</u>. $x = M \cdot x'$ t.c. $x^* \cdot A \cdot x \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x'$ con A' diagonale
$\rightsquigarrow a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{i,i} = 0$ se $i > \operatorname{rg} Q_\infty$ ($\neq 0$ se $i \leq \operatorname{rg} Q_\infty$)
$x = x' + D$ con $d_i = -b_i / a_{i,i}$ se $i \leq \operatorname{rg} Q_\infty$ e $d_i = 0$ altrimenti
$\rightsquigarrow b_i = 0$ se $i \leq \operatorname{rg} Q_\infty$
$\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q \Rightarrow b_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $C = 0$
$\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1 \Rightarrow b_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $C \neq 0$
$\rightsquigarrow C = 1$ (si divide l'equazione per C)
$\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2 \Rightarrow b_i \neq 0$ per qualche $i > \operatorname{rg} Q_\infty$
$\rightsquigarrow b_n = 1$ ($x_i \leftrightarrow x_n$ e si divide per b_n)
$\rightsquigarrow b_i = 0$ se $i < n$ e $C = 0$
$(x_n \rightsquigarrow x_n - \Sigma_{\operatorname{rg} Q_\infty < i < n} b_i x_i - C/2)$

$Q \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperficie quadrica reale
$\leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0 \leftrightsquigarrow \widetilde{x}^* \cdot \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = 0$

<u>Prop</u>. $\operatorname{sgn} \widetilde{A} \overset{\text{def}}{=\!=} |\operatorname{rg} \widetilde{A} - 2 \operatorname{pos} \widetilde{A}| \geq 0$
$\operatorname{sgn} A \overset{\text{def}}{=\!=} |\operatorname{rg} A - 2 \operatorname{pos} A| \geq 0$
proprietà affini di Q (indipendenti dall'equazione)

<u>Dim</u>. indipendenza dalle coordinate come per $\operatorname{rg} \widetilde{A}$ e $\operatorname{rg} A$
$\widetilde{A}' = k\, \widetilde{A}$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$
$\Rightarrow \operatorname{pos} \widetilde{A}' = \operatorname{pos} \widetilde{A}$ o $\operatorname{rg} \widetilde{A} - \operatorname{pos} \widetilde{A}$ (se $k < 0$)
$\operatorname{pos} A' = \operatorname{pos} A$ o $\operatorname{rg} A - \operatorname{pos} A$ (se $k < 0$)

$\rightsquigarrow \operatorname{sgn} Q \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sgn} \widetilde{A} \geq 0$ (segnatura della quadrica Q)
$\operatorname{sgn} Q_\infty \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{sgn} A \geq 0$ (segnatura della quadrica all'infinito Q_∞)

Note: 1) $\operatorname{rg} Q \equiv_2 \operatorname{sgn} Q \leq \operatorname{rg} Q$ e $\operatorname{rg} Q_\infty \equiv_2 \operatorname{sgn} Q_\infty \leq \operatorname{rg} Q_\infty$

2) $\operatorname{sgn} Q_\infty = \operatorname{sgn} Q \, , \operatorname{sgn} Q \pm 1$

$(\operatorname{sgn} Q_\infty = \operatorname{sgn} Q$ se $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q, \operatorname{rg} Q - 2)$

Prop. $Q \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperficie quadrica reale

$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento affine con coordinate x tale che

Q ha equazione canonica $x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$

con $a_{i,i} = \pm 1$ per ogni $i = 1, \ldots, \operatorname{rg} Q_\infty$,

univocamente determinata da $\operatorname{rg} Q \, , \operatorname{rg} Q_\infty \, , \operatorname{sgn} Q \, , \operatorname{sgn} Q_\infty$

a meno di cambiamento di segno e permutazione delle x_i

Dim. segue dalle prop. precedenti e dal teorema di Sylvester

Corol. $Q \, , Q' \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperfici quadriche reali

$Q \cong_{\text{Aff}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q' \, , \operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q'$

$\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q'_\infty \, , \operatorname{sgn} Q_\infty = \operatorname{sgn} Q'_\infty$

Dim. $Q \cong_{\text{Aff}} Q' \Leftrightarrow$ hanno la stessa equazione canonica

Esempi: 1) $Q \subset \mathbb{R}^2$ conica affine reale

classificata al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{sgn} Q, \operatorname{rg} Q_\infty, \operatorname{sgn} Q_\infty)$

$(3,3,2,2) \rightsquigarrow x^2 + y^2 = -1$ (ellisse a punti imm.)

$(3,1,2,2) \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 1$ (ellisse)

$(3,1,2,0) \rightsquigarrow x^2 - y^2 = 1$ (iperbole)

$(3,1,1,1) \rightsquigarrow x^2 - 2y = 0$ (parabola)

$(2,2,2,2) \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 0$ (rette incidenti imm.)

$(2,2,1,1) \rightsquigarrow x^2 = -1$ (rette parallele imm.)

$(2,0,2,0) \rightsquigarrow x^2 - y^2 = 0$ (rette incidenti)

$(2,0,1,1) \rightsquigarrow x^2 = 1$ (rette parallele)

$(1,1,1,1) \rightsquigarrow x^2 = 0$ (rette coincidenti)

2) $Q \subset \mathbb{R}^3$ quadrica affine reale

classificata al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{sgn} Q, \operatorname{rg} Q_\infty, \operatorname{sgn} Q_\infty)$

$(4,4,3,3) \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = -1$ (ellissoide a pun. imm.)

$(4,2,3,3) \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (ellissoide)

$(4,2,3,1) \rightsquigarrow x^2 - y^2 - z^2 = 1$ (iperboloide ellittico)

$(4,2,2,2) \rightsquigarrow x^2+y^2-2z=0$ (paraboloide ellittico)
$(4,0,3,1) \rightsquigarrow x^2+y^2-z^2=1$ (iperboloide iperbolico)
$(4,0,2,0) \rightsquigarrow x^2-y^2-2z=0$ (paraboloide iperbolico)
$(3,3,3,3) \rightsquigarrow x^2+y^2+z^2=0$ (cono immaginario)
$(3,3,2,2) \rightsquigarrow x^2+y^2=-1$ (cilindro immaginario)
$(3,1,3,1) \rightsquigarrow x^2+y^2-z^2=0$ (cono)
$(3,1,2,2) \rightsquigarrow x^2+y^2=1$ (cilindro a sez. ellittica)
$(3,1,2,0) \rightsquigarrow x^2-y^2=1$ (cilindro a sez. iperbolica)
$(3,1,1,1) \rightsquigarrow x^2-2z=0$ (cilindro a sez. parabolica)
$(2,2,2,2) \rightsquigarrow x^2+y^2=0$ (piani incidenti imm.)
$(2,2,1,1) \rightsquigarrow x^2=-1$ (piani paralleli imm.)
$(2,0,2,0) \rightsquigarrow x^2-y^2=0$ (piani incidenti)
$(2,0,1,1) \rightsquigarrow x^2=1$ (piani paralleli)
$(1,1,1,1) \rightsquigarrow x^2=0$ (piani coincidenti)

Prop. $Q \subset \mathbb{C}^n$ ipersuperficie quadrica complessa
$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento affine con coordinate x tale che
Q ha equazione canonica $x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$
con $a_{i,i} = 1$ per ogni $i = 1, \dots, \operatorname{rg} Q_\infty$

Dim. segue dalla prop. prec. e dalla diag. delle forme bilin. compl.

Corol. $Q, Q' \subset \mathbb{C}^n$ ipersuperfici quadriche complesse
$Q \cong_{\text{Aff}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$, $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q'_\infty$

Dim. $Q \cong_{\text{Aff}} Q' \Leftrightarrow$ hanno la stessa equazione canonica

Esempi: 1) $Q \subset \mathbb{C}^2$ conica affine complessa
classificata al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{rg} Q_\infty)$
$(3,2) \rightsquigarrow x^2+y^2=1$ (ellisse/iperbole)
$(3,1) \rightsquigarrow x^2-2y=0$ (parabola)
$(2,2) \rightsquigarrow x^2+y^2=0$ (rette incidenti)
$(2,1) \rightsquigarrow x^2=1$ (rette parallele)
$(1,1) \rightsquigarrow x^2=0$ (rette coincidenti)

2) $Q \subset \mathbb{C}^3$ quadrica affine complessa
classificata al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{rg} Q_\infty)$
$(4,3) \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (ellissoide/iperboloide)
$(4,2) \rightsquigarrow x^2 + y^2 - 2z = 0$ (paraboloide)
$(3,3) \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (cono)
$(3,2) \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 1$ (cilindro a sez. ellittica/iperbolica)
$(3,1) \rightsquigarrow x^2 - 2z = 0$ (cilindro a sez. parabolica)
$(2,2) \rightsquigarrow x^2 + y^2 = 0$ (piani incidenti)
$(2,1) \rightsquigarrow x^2 = 1$ (piani paralleli)
$(1,1) \rightsquigarrow x^2 = 0$ (piani coincidenti)

Note: 1) ellissi e iperboli sono affinemente equivalenti su $\mathbb{C}$
2) ellissoidi e iperboloidi sono affinemente equiv. su $\mathbb{C}$
paraboloidi ellittici e iperbolici sono affin. equiv. su $\mathbb{C}$