Spazi vettoriali numerici e matrici

$\mathbb{K}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\} \rightsquigarrow (x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$
$\mathbb{K}^m = \{(y_1,\dots,y_m) \mid y_j \in \mathbb{K}\} \rightsquigarrow (y_1,\dots,y_n) = \sum_{j=1}^m y_j e_j$
$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ appl. lineare $\rightsquigarrow (y_1,\dots,y_n) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$

$$\begin{cases} y_1 = a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{cases} \qquad y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = A \cdot x = A\,x$$

$\hookleftarrow A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ <u>matrice</u> $m \times n$ su $\mathbb{K}$

<u>Note</u>: 1) x e y <u>vettori colonna</u> (= matrici con una sola colonna)
2) $A = (A_1 \ldots A_n)$ con $A_i = \varphi(e_i)$ (i-esima colonna di A)
(matrice $m \times n \leftrightarrow m$ colonne in $\mathbb{K}^n \leftrightarrow n$ righe in $\mathbb{K}^m$)

$M_{m,n}\mathbb{K} \overset{\text{def}}{=\!=} \{A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ matrice $m \times n$ su $\mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^{mn}$
spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ su $\mathbb{K}$
con operazioni definite per componenti

<u>Nota</u>: $\varphi \mapsto M(\varphi) = A \rightsquigarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong M_{m,n}\mathbb{K}$
$\operatorname{End}\mathbb{K}^n \cong M_{n,n}\mathbb{K}$

$M_{l,m}\mathbb{K} \times M_{m,n}\mathbb{K} \to M_{l,n}\mathbb{K}$ <u>prodotto righe per colonne</u>
definito $(A,B) \mapsto C = A \cdot B$ con $C = (c_{i,k} = \sum_{j=1}^m a_{i,j}b_{j,k})_{i=1,\dots,l}^{k=1,\dots,n}$

$\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^l, \mathbb{K}^m),\ \psi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \Rightarrow M(\psi \circ \varphi) = M(\psi) \cdot M(\varphi)$

<u>Note</u>: 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ per ogni A, B, C componibili
2) in generale $A \cdot B \neq B \cdot A$ (anche se entrambe definite)
3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $(c\,A) \cdot B = c\,(A \cdot B)$
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $A \cdot (c\,B) = c\,(A \cdot B)$

$I_n = M(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = (\delta_{i,j})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n} \in M_{n,n}\mathbb{K}$ <u>matrice identità</u>
tale che $I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$ per ogni $A \in M_{m,n}\mathbb{K}$

$A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ <u>matrice invertibile</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ esiste (unica) $A^{-1} \in M_{n,n}\mathbb{K}$
tale che $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=\!=} (\{A \in M_{n,n} \mid A \text{ invert.}\}, \cdot\,)$ <u>gruppo lineare generale</u>

<u>Note</u>: 1) $\varphi \mapsto M(\varphi) \rightsquigarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{K}^n \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ isomorfismo di gruppi
2) $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\varphi(v_i) = w_i$ con $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{K}^n$
$\Rightarrow M(\varphi) = (w_1 \dots w_n) \cdot (v_1 \dots v_n)^{-1} \in M_{m,n}\mathbb{K}$
3) $B = (v_1, \dots, v_n)$ e $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ basi ord. di $\mathbb{K}^n$
$\Rightarrow M_{B,B'} \overset{\text{def}}{=\!=} M(\gamma_{B,B'}) = (v_1 \dots v_n) \cdot (v'_1 \dots v'_n)^{-1}$

$A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n} \in M_{m,n}\mathbb{K}$
$\rightsquigarrow A^* = (a^*_{i,j} = a_{j,i})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m} \in M_{n,m}\mathbb{K}$ <u>matrice trasposta</u> di A

$A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ <u>matrice simmetrica</u> $\overset{\text{def}}{\iff} A^* = A$
<u>matrice antisimmetrica</u> $\overset{\text{def}}{\iff} A^* = -A$

<u>Note</u>: 1) $A \mapsto A^*$ isomorfismo $M_{m,n}\mathbb{K} \to M_{n,m}\mathbb{K}$ $(A^{**} = A)$
2) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$ per ogni A, B componibili
3) $A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ invertibile $\Leftrightarrow A^*$ invertibile, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
4) $M^{\mathrm{sim}}_{n,n}\mathbb{K}, M^{\mathrm{antisim}}_{n,n}\mathbb{K} \subset M_{n,n}\mathbb{K}$ sottospazi vettoriali
5) $M_{n,n}\mathbb{K} = M^{\mathrm{sim}}_{n,n}\mathbb{K} \oplus M^{\mathrm{antisim}}_{n,n}\mathbb{K}$ se $\mathrm{car}\,\mathbb{K} \neq 2$

<u>Prop</u>. $A \in M_{m,n}\mathbb{K}$, $A = M(\varphi) \Rightarrow A^* = M(\varphi^*)$

<u>Dim</u>. $\varphi^*(e^*_j)_i = \varphi^*(e^*_j)(e_i) = e^*_j(\varphi(e_i)) = \varphi(e_i)_j = a_{j,i} = a^*_{i,j}$

$A \in M_{m,n}\mathbb{K} \rightsquigarrow$ <u>rango</u> di A
$\mathrm{rg}\,A \overset{\text{def}}{=\!=}$ max numero righe di A lin. indipendenti in $\mathbb{K}^n$
$=\!=$ max numero colonne di A lin. indipendenti in $\mathbb{K}^m$
$=\!=$ max ordine di $B \subset A$ sottomatrice quadrata invertibile

<u>Note</u>: 1) $A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ invertibile $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,A = n$
2) $\mathrm{rg}(A \cdot B) \leq \min\{\mathrm{rg}\,A, \mathrm{rg}\,B\}$ per ogni A, B componibili
$\mathrm{rg}(A \cdot B) = \mathrm{rg}\,A$ se B invertibile, $= \mathrm{rg}\,B$ se A invertibile

3) $\operatorname{rg} A = k \Leftrightarrow \exists\, B \subset A$ quadrata invertibile di ordine k
e $\nexists\, C \subset A$ quadrata invertibile di ordine $k+1$
($\rightsquigarrow$ metodo degli orlati per il calcolo di $\operatorname{rg} A$)

Operazioni elementari sulle righe di $A \in M_{m,n}\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rightsquigarrow E(i,c)\cdot A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ c\,A^i \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \quad \text{con } \ E(i,c) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ c\,e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rightsquigarrow F(i,j)\cdot A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i + A^j \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \quad \text{con } \ F(i,j) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + e_j \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$$

Note: 1) $\operatorname{rg} A$ non cambia se $c \neq 0$ e $i \neq j$
2) operazioni derivate: $A^i \rightsquigarrow A^i + c\,A^j$ e $A^i \leftrightarrow A^j$
($A \rightsquigarrow E(j,c^{-1})\cdot F(i,j)\cdot E(j,c)\cdot A$ con $c \neq 0$
$A \rightsquigarrow F(i,j)\cdot E(i,-1)\cdot F(j,i)\cdot E(j,-1)\cdot F(i,j)\cdot E(j,-1)\cdot A$)
3) operazioni elementari sulle colonne definite moltiplicando a destra per le matrici $E(i,c)^* = E(i,c), F(i,j)^* = F(j,i)$

Metodo di eliminazione di Gauss

$A \in M_{m,n}\mathbb{K}$ matrice non nulla
$\rightsquigarrow p_1 = a_{i_1,j_1} \neq 0$ con $a_{i,j} = 0 \ \forall\, i \geq 1 \ \forall\, j < j_1$
operazioni elementari $\rightsquigarrow i_1 = 1,\ a_{i,j_1} = 0 \ \forall\, i > 1$
$\rightsquigarrow p_2 = a_{2,j_2} \neq 0, \ldots, p_k = a_{k,j_k} \neq 0$, finché $a_{i,j} = 0 \ \forall\, i > k$
(iterando il primo passo sulle sottomatrici $(a_{h,l})_{h=i+1,\ldots,m}^{l=j_i+1,\ldots,n}$)
$\rightsquigarrow A$ matrice a gradini superiore
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, p_1 = a_{1,j_1} \neq 0, \ldots, p_k = a_{k,j_k} \neq 0$ (pivot di A)
t.c. $j_1 < \ldots < j_k$ e $a_{i,j} = 0$ se $j < j_i$ o $i > k$

Prop. $A \in M_{m,n}\mathbb{K} \Rightarrow \operatorname{rg} A =$ numero dei pivot di A

Dim. A matrice a gradini $\Rightarrow A^1, \ldots, A^k$ righe lin. indipendenti

$A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ matrice a gradini invertibile
$\Rightarrow p_1 = a_{1,1} \neq 0, \ldots, p_n = a_{n,n} \neq 0$
$a_{i,j} = 0$ se $i > j$ (matrice triangolare superiore)
$\rightsquigarrow a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ (matrice diagonale) $\rightsquigarrow A = I_n$ (elim. inversa)

Nota: metodo di elimin. di Gauss $\rightsquigarrow$ invertibilità di $A \in M_{n,n}\mathbb{K}$
(A invertibile $\Leftrightarrow$ prodotto di matrici elementari invertibili)
eliminazione diretta e inversa $\rightsquigarrow A^{-1}$ $((A|I_n) \rightsquigarrow (I_n|A^{-1}))$

Determinanti

$A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ (matrice quadrata di ordine n)
$\rightsquigarrow \det A \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \in \mathbb{K}$
determinante di A

Esempi: 1) $n = 1 \rightsquigarrow A = (a_{1,1})$, $\det A = a_{1,1}$
2) $n = 2 \rightsquigarrow \det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
3) $n = 3 \rightsquigarrow$ regola di Sarrus

Note: 1) $\det A^* = \det A$ $(a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n})$
2) $\det A$ è multilineare rispetto alle righe e alle colonne (mentre non c'è relazione tra $\det(A+B)$ e $\det A, \det B$)
3) $\det A$ è alternante (antisimm.) rispetto a righe e colonne (cambia segno scambiando tra loro due righe o colonne)
4) $\det A = 0$ se una riga o colonna è combin. lin. delle altre (caso speciale: $A^i = A^j \Rightarrow \det A = \sum_{\sigma(i)<\sigma(j)} \ldots + \sum_{\sigma(i)>\sigma(j)} \ldots = 0$)
5) A triangolare sup. $\Rightarrow \det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$ $(\det I_n = 1)$
6) $C = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ matrice a blocchi $\Rightarrow \det C = \det A \det B$

Lemma. 1) $\det(E(i,c) \cdot A) = \det E(i,c) \det A = c \det A$
2) $\det(F(i,j) \cdot A) = \det F(i,j) \det A = \det A$

Dim. segue dalle note 2 e 3

Prop. $A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
e in tal caso $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Dim. A non invertible $\Rightarrow \operatorname{rg} A < n \Rightarrow \det A = 0$ (nota 4)
A invertibile $\Rightarrow$ lemma applicato a $(A|I_n) \rightsquigarrow (I_n|A^{-1})$

Prop. (Teorema di Binet)
$A, B \in M_{n,n}\mathbb{K} \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det A \det B$

Dim. A non invertibile $\Rightarrow A \cdot B$ non invert. $\rightsquigarrow 0 = 0$ (prop. prec.)
A invertibile $\Rightarrow$ lemma applicato a $(A^{-1}|B) \rightsquigarrow (I_n|A \cdot B)$

Prop. (Teorema di Laplace)
$A \in M_{n,n}\mathbb{K} \Rightarrow \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (sviluppo risp. riga i)
$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (sviluppo risp. colonna j)
con $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A$ senza la riga i e la colonna $j)$
complemento algebrico di $a_{i,j}$

Dim. basta considerare gli sviluppi per righe ($\det A = \det A^*$)
$$\begin{aligned}\det A &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma(i)=j} a_{i,j} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k\neq i} a_{k,\sigma(k)} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} (-1)^{i-j} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{k\neq i} a_{k,\tau(k)}\end{aligned}$$

Corol. $A^{-1} = (\bar{a}_{i,j} = A_{j,i}/\det A)_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$

Dim. $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\bar{a}_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{k,j}/\det A = \delta_{i,k}$

Sistemi lineari

$A \in M_{m,n}\mathbb{K},\ B \in M_{m,1}\mathbb{K}$
$\rightsquigarrow A \cdot x = B$ sistema lineare con m equazioni in in n incognite
($x = (x_1, \dots, x_n)^*$ vettore colonna delle incognite)

Note: 1) $A \cdot x = 0$ sistema lineare omogeneo
ammette sempre la soluzione nulla $x = 0$

2) $\{$sol. $A \cdot x = 0\} = \operatorname{Ker}(\varphi : x \mapsto A \cdot x) \subset \mathbb{K}^n$ sottosp. vett.
$\operatorname{rg} A = k \Rightarrow \dim\{$sol. $A \cdot x = 0\} = n - k$
quindi la soluzione nulla $x = 0$ è l'unica $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$

3) $A \cdot x = B$ ammette soluzioni $\Leftrightarrow B \in \operatorname{Im}(\varphi : x \mapsto A \cdot x)$
in tal caso: $\{$sol. $A \cdot x = B\} \leftrightarrow \{$sol. $A \cdot x = 0\}$
($\varphi^{-1}(B) = \ker\varphi + x_0$ (laterale) con x_0 t.c. $\varphi(x_0) = B$)

Teorema di Rouché-Capelli

$A \cdot x = B$ sistema lineare con m equazioni e n incognite
ammette soluzioni $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, B)$ $(= n - \dim\{\text{soluzioni}\})$

Dim. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, B) \Leftrightarrow B \in \langle A_1, \ldots, A_n \rangle \Leftrightarrow B \in \operatorname{Im}(\varphi : x \mapsto A \cdot x)$

Risoluzione di $A \cdot x = B$ (I metodo)

1) riduzione a gradini (eliminazione di Gauss su (A, B))
2) se si ottiene un'equazione $0\, x_1 + \ldots + 0\, x_n = b$ con $b \neq 0$ allora il sistema $A \cdot x = B$ non ammette soluzioni
3) altrimenti si riduce $A \cdot x = B$ alle equazioni dei pivot (prime k)
4) $A \cdot x = B \rightsquigarrow C \cdot x' = B - D \cdot x''$ con:
   - C triang. sup. invertibile di ordine k
   - $x' = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ incognite dei pivot
   - x'' = altre incognite = $n - k$ variabili "libere"
5) $x' = E + F \cdot x''$ (eliminazione inversa di Gauss su $(C, B, -D)$)

Risoluzione di $A \cdot x = B$ (II metodo)

1) $C \subset A$ quad. invert. di ordine $k = \operatorname{rg} A$ (metodo orlati con det.)
2) verifica che $\operatorname{rg}(A, B) = k$ (metodo degli orlati con determinanti)
3) riduzione di $A \cdot x = B$ alle equazioni contenenti le righe di C
3) $A \cdot x = B \rightsquigarrow C \cdot x' = B - D \cdot x''$ con:
   - $x' = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ incognite delle colonne di C
   - x'' = altre incognite = $n - k$ variabili "libere"
5) $x' = C^{-1} \cdot (B - D \cdot x'')$ (C^{-1} calcolata con i determinanti)

Nota: $A \cdot x = B$, A invert. $\rightsquigarrow x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j A_{j,i}}{\det A}$ (regola di Cramer)

Forme bilineari simmetriche

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$

B base ord. di $V \rightsquigarrow \operatorname{Bil} V \cong M_{n,n}\mathbb{K}$ isomorfismo definito

$$\beta \leftrightarrow M(\beta_B) \text{ con } \beta_B(x, y) = x^* \cdot M(\beta_B) \cdot y$$
$$(B = (v_1, \ldots, v_n) \rightsquigarrow M(\beta_B)_{i,j} = \beta(v_i, v_j))$$

B' altra base ord. di $V \rightsquigarrow M(\beta_{B'}) = (M_{B,B'}^{-1})^* \cdot M(\beta_B) \cdot M_{B,B'}^{-1}$

Note: 1) $\beta \in \operatorname{Bil} V$ (anti)simm. $\Leftrightarrow \exists\, B$ t.c. $M(\beta_B)$ mat. (anti)simm.
$\Leftrightarrow M(\beta_B)$ matrice (anti)simm. per ogni base ord. B

2) $A, A' \in M_{n,n}\mathbb{K}$ matrici congruenti
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ tale che $A' = M^* \cdot A \cdot M$
$\Longleftrightarrow A, A'$ rappr. stessa forma bilin. risp. a basi diverse

$\beta \in \operatorname{Bil} V \rightsquigarrow \operatorname{rg}\beta \overset{\text{def}}{=\!=} \operatorname{rg} M(\beta_B)\ \ (= \operatorname{rg} M(\beta_{B'}))$
rango della forma bilineare β

$\beta \in \operatorname{Bil} V$ diagonalizzabile
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V t.c. $\beta(v_i, v_j) = 0\ \forall\, i \neq j$
$\Longleftrightarrow \exists\, B = (v_1, \dots, v_n)$ t.c. $M(\beta_B) = \operatorname{Diag}(k_1, \dots, k_n)$
(matrice diagonale con $k_i = \beta(v_i, v_i)\ \forall\, i = 1, \dots, n$)

Nota: $\beta \in \operatorname{Bil} V$ diagonalizzabile $\Rightarrow \beta$ simmetrica

Prop. V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$, $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$
$\beta \in \operatorname{Bil} V$ simmetrica $\Rightarrow \beta$ diagonalizzabile

Dim. per induzione su $n \geq 1$ ($n = 1$ banale)
$\beta \neq 0 \Rightarrow \exists\, v_1 \neq 0$ tale che $\beta(v_1, v_1) \neq 0$
$\rightsquigarrow \eta(v_1) : v \mapsto \beta(v_1, v)$ appl. lineare non nulla
$\rightsquigarrow U = \operatorname{Ker} \eta(v_1) \subset V$ sottosp. vett. con $\dim U = n - 1$
$\rightsquigarrow \{v_2, \dots, v_n\}$ base di U t.c. $\beta(v_i, v_j) = 0\ \forall\, i \neq j$
$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V t.c. $\beta(v_i, v_j) = 0\ \forall\, i \neq j$

Note: 1) metodo di eliminazione simultanea (righe e colonne):
matrice simmetrica $\rightsquigarrow$ matrice congruente diagonale
$(A \rightsquigarrow E(i,c) \cdot A \cdot E(i,c)^*$ e $A \rightsquigarrow F(i,j) \cdot A \cdot F(i,j)^*)$

2) elim. simult. $\left(\dfrac{A}{I_n}\right) \rightsquigarrow \left(\dfrac{A'}{B}\right)$ con B base diagonalizzante

Teorema di Sylvester

V spazio vett. reale, $\dim V = n < \infty$, $\beta \in \operatorname{Bil} V$ simm.
$\Rightarrow \exists \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V t.c. $\beta(v_i, v_j) = 0$ per ogni $i \neq j$,
$\beta(v_i, v_i) = 1$ se $i \leq p$, $\beta(v_i, v_i) = -1$ se $p < i \leq \operatorname{rg}\beta$,
con $\operatorname{rg}(\beta)$ e $\operatorname{pos}(\beta) \overset{\text{def}}{=\!=} p$ univoc. determinati da β

<u>Dim</u>. $\{w_1,\ldots,w_n\}$ base di V t.c. $\beta(w_i,w_j)=0$ per ogni $i\neq j$
$\rightsquigarrow \{v_1,\ldots,v_n\}$ con $v_i = w_i/\sqrt{|\beta(w_i,w_i)|}$ se $\beta(w_i,w_i)\neq 0$
e $v_i = w_i$ altrimenti, base opportunamente rinumerata
$\rightsquigarrow V_+ = \langle v_1,\ldots,v_p\rangle\,, V_- = \langle v_{p+1},\ldots,v_{\operatorname{rg}\beta}\rangle\,, V_0 = \langle v_{\operatorname{rg}\beta+1},\ldots,v_n\rangle$
t.c. $V = V_+\oplus V_-\oplus V_0$, $\dim V_+ = p$, $\dim(V_-\oplus V_0) = n-p$
$\beta(v,v)>0\ \forall\, v\in V_+ - \{0\}\,,\ \beta(v,v)\leq 0\ \forall\, v\in V_-\oplus V_0$
$p' = \dim V'_+$ con $V = V'_+\oplus V'_-\oplus V'_0$ derivata da $\{v'_1,\ldots,v'_n\}$
$\Rightarrow p' = p$ ($p'>p \Rightarrow V'_+\cap(V_-\oplus V_0)\neq\{0\} \rightsquigarrow$ assurdo)

<u>Prop</u>. V spazio vett. complesso, $\dim V = n<\infty$, $\beta\in\operatorname{Bil}V$ simm.
$\Rightarrow \exists\,\{v_1,\ldots,v_n\}$ base di V t.c. $\beta(v_i,v_j)=0$ per ogni $i\neq j$,
$\beta(v_i,v_i)=1$ per ogni $i=1,\ldots,\operatorname{rg}\beta$

<u>Dim</u>. $\{w_1,\ldots,w_n\}$ base di V t.c. $\beta(w_i,w_j)=0$ per ogni $i\neq j$
$\rightsquigarrow \{v_1,\ldots,v_n\}$ con $v_i = w_i/\sqrt{\beta(w_i,w_i)}$ se $\beta(w_i,w_i)\neq 0$

<u>Corol</u>. $A, A'\in M^{\text{sym}}_{n,n}\mathbb{R}$ congruenti $\Leftrightarrow \operatorname{rg}A = \operatorname{rg}A'$ e $\operatorname{pos}A = \operatorname{pos}A'$
$A, A'\in M^{\text{sym}}_{n,n}\mathbb{C}$ congruenti $\Leftrightarrow \operatorname{rg}A = \operatorname{rg}A'$

<u>Operatori lineari e determinanti</u>

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n<\infty$
B base ord. di $V \rightsquigarrow \operatorname{End}V\cong M_{n,n}\mathbb{K}$ isom. definito $\varphi\leftrightarrow M(\varphi_B)$
B' altra base ord. di $V \rightsquigarrow M(\varphi_{B'}) = M_{B,B'}\cdot M(\varphi_B)\cdot M^{-1}_{B,B'}$

<u>Nota</u>: $A, A'\in M_{n,n}\mathbb{K}$ <u>matrici equivalenti</u>
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, M\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ tale che $A' = M\cdot A\cdot M^{-1}$
$\Longleftrightarrow A, A'$ rappr. stesso operatore lin. risp. a basi diverse

$\varphi\in\operatorname{End}V \rightsquigarrow \det\varphi \overset{\text{def}}{=\!=} \det M(\varphi_B)\ \ (=\det M(\varphi_{B'}))$
<u>determinante</u> dell'operatore lineare φ

<u>Nota</u>: 1) $\det(\psi\circ\varphi) = \det(\varphi)\det(\psi)$ per ogni $\varphi,\psi\in\operatorname{End}V$
2) $\varphi\in\operatorname{Aut}V \Leftrightarrow \det\varphi\neq 0$ e in tal caso $\det\varphi^{-1} = (\det\varphi)^{-1}$
3) $\det:\operatorname{Aut}V\to(\mathbb{K}-\{0\},\ \cdot\ )$ omomorfismo di gruppi
$\rightsquigarrow \mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=\!=} \{M\in M_{n,n}\mathbb{K}\mid \det M = 1\}\subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$
<u>gruppo lineare speciale</u> ($=\ker\det \Rightarrow$ sottogr. norm.)

Orientazioni di spazi vettoriali reali

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim V = n < \infty$

B, B' basi ordinate di V equiorientate $\overset{\text{def}}{\iff} \det \gamma_{B,B'} > 0$

$\rightsquigarrow$ due orientazioni su $V \overset{\text{def}}{=}$ classi di basi equiorientate

$\varphi \in \operatorname{Aut} V$ conserva le orientazioni $\overset{\text{def}}{\iff} \det \varphi > 0$

$\Leftrightarrow \varphi(B)$ e B sono equiorient. per ogni base ord. B di V

$\operatorname{Aut}^+ V \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in \operatorname{Aut} V \mid \varphi$ cons. le orient.$\} \subset \operatorname{Aut} V$ sottogr. norm.

in particolare: $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{M \in M_{n,n}\mathbb{R} \mid \det M > 0\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

Note: 1) $(v_1, \ldots, v_n)$ base ord. positiva di $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(v_1, \ldots, v_n) > 0$

2) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n} \rightsquigarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}^+(2n, \mathbb{R})$

3) $V =$ spazio dei vettori liberi del piano, $\varphi \in \operatorname{End} V$

$\Rightarrow \det \varphi = \pm \mathrm{Area}(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) / \mathrm{Area}(v_1, v_2)$

per ogni $v_1, v_2 \in V$ linearmente indipendenti

4) $V =$ spazio dei vettori liberi dello spazio, $\varphi \in \operatorname{End} V$

$\Rightarrow \det \varphi = \pm \mathrm{Volume}(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3)) / \mathrm{Volume}(v_1, v_2, v_3)$

per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$ linearmente indipendenti

Autovalori e autovettori

$\varphi \in \operatorname{End} V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

$U \subset V$ sottospazio invariante per $\varphi \overset{\text{def}}{\iff} \varphi(U) \subset U$

$v \in V$ autovettore per $\varphi \overset{\text{def}}{\iff} v \neq 0$ e $\varphi(v) = k\, v$ con $k \in \mathbb{K}$

autovalore per φ associato a v

$k \in \mathbb{K}$ autovalore per $\varphi \rightsquigarrow V_k = \{v \in V \mid \varphi(v) = k\, v\} \subset V$

k-autospazio per φ

Note: 1) gli V_k sono sottospazi indipendenti e invarianti per φ

2) $v \in V$ autovett. per $\varphi \Leftrightarrow \langle v \rangle \subset V$ sottosp. invar. per φ

3) $\varphi : V \to V$ def. $\varphi(v) = k\, v$ (dilatazione di fatt. $k \in \mathbb{K}$)

$\rightsquigarrow V = V_k$ (unico autosp.) e ogni sottosp. è invariante

$\varphi \in \operatorname{End} V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$

$\rightsquigarrow p_\varphi(t) = \det(\varphi - t\, \mathrm{id}_V) \in \mathbb{K}[t]$ polinomio caratteristico di φ

Nota: $p_\varphi(t) = \det(M(\varphi_B) - t\, I_n)$ con base B di $V \Rightarrow \operatorname{gr} p_\varphi(t) = n$

<u>Prop</u>. $\varphi \in \operatorname{End} V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$
$k \in \mathbb{K}$ autovalore per $\varphi \Leftrightarrow k$ soluzione dell'equaz. $p_\varphi(t) = 0$

<u>Dim</u>. k autovalore $\Leftrightarrow$ esiste $v \neq 0$ tale che $\varphi(v) = k\,v$
$\Leftrightarrow (M(\varphi_B) - k\,I_n) \cdot x = 0$ ammette soluz. $\neq 0 \Leftrightarrow p_\varphi(k) = 0$

k autovalore di $\varphi \in \operatorname{End} V$, $\dim V = n < \infty$
$\rightsquigarrow \mu_{\mathrm{alg}} k \overset{\mathrm{def}}{=\!=}$ molteplicità di k come soluz. dell'equaz. $p(t) = 0$
(= max esponente m tale che $(t-k)^m$ divide $p(t)$)
$\rightsquigarrow \mu_{\mathrm{geo}} k \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \dim V_k \leq n$ (= max numero di k-autovett. lin. indip.)

<u>Prop</u>. $1 \leq \mu_{\mathrm{geo}} k \leq \mu_{\mathrm{alg}} k \leq n$ per ogni autovalore k di φ

<u>Dim</u>. per induzione su $\dim V = n \geq 1$ ($n = 1$ banale)
$\varphi(v_1) = k\,v_1$ con $v_1 \neq 0 \rightsquigarrow B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ base ord. di V
$\rightsquigarrow M(\varphi_B) = \left(\begin{array}{c|c} k & * \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \Rightarrow p_\varphi(t) = -(t-k)p_\psi(t)$, con $\psi : U \to U$
definita da $U = \langle v_2, \ldots, v_n \rangle$ e $\psi(v) = \pi_{2,\ldots,n}(\varphi(v))\ \forall\, v \in U$
$\Rightarrow \mu^\varphi_{\mathrm{geo}} k \leq \mu^\psi_{\mathrm{geo}} k + 1 \leq \mu^\psi_{\mathrm{alg}} k + 1 = \mu^\varphi_{\mathrm{alg}} k$

<u>Corol</u>. $0 \leq \sum_k \mu_{\mathrm{geo}} k \leq \sum_k \mu_{\mathrm{alg}} k \leq n$

$\varphi \in \operatorname{End} V$ <u>triangolarizzabile</u>
$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V t.c. $\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^{i} a_{j,i} v_j$
$\Longleftrightarrow \exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ t.c. $M(\varphi_B)$ triangolare superiore
<u>diagonalizzabile</u>
$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V t.c. $\varphi(v_i) = k_i v_i$
$\Longleftrightarrow \exists\, B = (v_1, \ldots, v_n)$ t.c. $M(\varphi_B) = \operatorname{Diag}(k_1, \ldots, k_n)$

<u>Note</u>: 1) triangolariz. di operatori $\neq$ riduzione a forma triangolare con il metodo di eliminazione di Gauss
2) diagonaliz. di operatori $\neq$ diagonaliz. forme bilineari

<u>Prop</u>. $\varphi \in \operatorname{End} V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$
1) φ triangolarizzabile $\Leftrightarrow \sum_k \mu_{\mathrm{alg}} k = n$ (k = autoval. di φ)
(cioè $p_\varphi(t) = 0$ ha n soluz. in $\mathbb{K}$)
2) φ diagonalizzabile $\Leftrightarrow \sum_k \mu_{\mathrm{geo}} k = n$ ($\Rightarrow \mu_{\mathrm{geo}} k = \mu_{\mathrm{alg}} k\ \forall\, k$)

Dim. 1) A triang. sup. $\Rightarrow p_\varphi(t) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} - t) \Rightarrow \sum_k \mu_{\text{alg}} k = n$
$\Leftarrow$ per induzione su $\dim V = n \geq 1$ ($n = 1$ banale)
ψ dimostr. preced. $\rightsquigarrow \sum_k \mu^\psi_{\text{alg}} k = \sum_k \mu^\varphi_{\text{alg}} k - 1 = n - 1$
$\Rightarrow \psi$ triangolarizzabile $\Rightarrow \varphi$ triangolarizzabile
2) φ diagonalizzabile $\Leftrightarrow V = \oplus_k V_k \Leftrightarrow \sum_k \mu_{\text{geo}} k = n$

Corol. $\varphi \in \operatorname{End} V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n < \infty$
$\exists\, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ autovalori distinti per $\varphi \Rightarrow \varphi$ diagonaliz.

Dim. $\mu_{\text{alg}} k_i = 1 \Rightarrow \mu_{\text{geo}} k_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mu_{\text{geo}} k_i = n$

Esempi: 1) $\sigma_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (riflessione rispetto all'asse x)
$\rightsquigarrow$ autoval. $= \pm 1$, sottosp. inv. $V_1 = \langle e_x \rangle$ e $V_{-1} = \langle e_y \rangle$
diagonalizzabile ($\mu_{\text{geo}}(1) = \mu_{\text{geo}}(-1) = 1$)
2) $\eta_{y,h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (scorrimento parallelo all'asse x)
$\rightsquigarrow$ autoval. $= 1$, sottosp. inv. $V_1 = \langle e_x \rangle$
triang. ma non diagonal. ($\mu_{\text{geo}}(1) = 1$, $\mu_{\text{alg}}(1) = 2$)
3) $\rho_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (rotazione di angolo $\alpha \neq 0, \pi$)
$\rightsquigarrow \nexists$ autovettore/autovalore, $\nexists$ sottosp. inv. non ban.
non triangolarizzabile (su $\mathbb{R}$, ma diagonaliz. su $\mathbb{C}$)

Note: ogni endomorf. φ è triangolariz. su $\mathbb{C}$ (teor. fond. algebra), ma non necessariamente diagonalizzabile (per es. $\eta_{y,1}$); $\exists\, B$ base ord. t.c. $M(\varphi_B)$ è in forma canonica di Jordan, cioè una matrice diagonale a blocchi con blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix}$$

univoc. determ. a meno dell'ordine ($k =$ autoval. di φ)