$E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ <u>spazio euclideo</u>
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) E spazio affine reale di dimensione finita
2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ prodotto scalare su V spazio dei vettori liberi di E
(cioè $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio vettoriale euclideo)

<u>Esempi</u>: 1) retta/piano/spazio euclidei = spazi eucludei
con il prod. scalare geom. sullo spazio dei vettori
2) $\mathbb{R}^n$ <u>spazio euclideo numerico</u> di dim. n
con il prodotto scalare canonico sui vettori

$E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio euclideo
$p, q \in E \rightsquigarrow |\overline{pq}| \overset{\text{def}}{=\!=} \|\overrightarrow{pq}\|$ <u>lunghezza del segmento</u> $\overline{pq}$
$p \neq o \neq q \in E \rightsquigarrow |\widehat{poq}| \overset{\text{def}}{=\!=} |\widehat{\overrightarrow{op}\,\overrightarrow{oq}}|$ <u>misura dell'angolo convesso</u> $\widehat{poq}$

$d : E \times E \to [0, \infty)$ definita $d(p,q) = |\overline{pq}|$ per ogni $p, q \in E$
<u>distanza</u> (metrica) euclidea

<u>Nota</u>: d soddisfa le seguenti proprietà:
1) $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q \;\; \forall\, p, q \in E$
2) $d(p,q) = d(q,p)$, $\forall\, p, q \in E$ (<u>simmetrica</u>)
3) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, $\forall\, p, q, r \in E$ (<u>triangolare</u>)
(e vale = se e solo se r sta tra p e q, cioè $\overrightarrow{pr} \upuparrows \overrightarrow{rq}$)
4) $d(p,q)^2 = d(p,r)^2 + d(r,q)^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{pr} \perp \overrightarrow{rq}$ (<u>identità pitagorica</u>)

$E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio euclideo, $L \subset E$ sottospazio affine
$\rightsquigarrow L = (L, \langle\cdot,\cdot\rangle_{|\operatorname{Dir} L \times \operatorname{Dir} L})$ <u>sottospazio euclideo</u>

$L_1 \nparallel L_2 \subset E$ sottospazi euclidei <u>ortogonali</u> ($L_1 \perp L_2$)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Dir} L_1 \cap (\operatorname{Dir} L_1 \cap \operatorname{Dir} L_2)^\perp \perp \operatorname{Dir} L_2 \cap (\operatorname{Dir} L_1 \cap \operatorname{Dir} L_2)^\perp$
$\Longleftrightarrow \operatorname{Dir} L_i \cap (\operatorname{Dir} L_1 \cap \operatorname{Dir} L_2)^\perp \perp \operatorname{Dir} L_j$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$
$\Longleftrightarrow \operatorname{Dir} L_i = (\operatorname{Dir} L_1 \cap \operatorname{Dir} L_2) \oplus (\operatorname{Dir} L_i \cap \operatorname{Dir} L_j{}^\perp)$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$

<u>Note</u>: 1) $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow$ gli spazi nella definizione entrambi non nulli
2) se $\operatorname{Dir} L_1 \cap \operatorname{Dir} L_2 = \{0\}$, allora $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \operatorname{Dir} L_1 \perp \operatorname{Dir} L_2$
3) $L_1 \perp L_2$ e $L_i \parallel L_i' \nRightarrow L_1' \perp L_2'$ ($\Rightarrow$ vale se $\dim L_i' = \dim L_i$)
4) $L_1 \parallel L_2$ e $L_i \perp L_i' \nRightarrow L_1' \parallel L_2'$ ($\Rightarrow$ vale se L_i, L_i' complem.)
5) $L_1 \perp L_2$ e $L_i \perp L_i' \nRightarrow L_1' \perp L_2'$ ($\Rightarrow$ vale se L_i, L_i' complem.)

<u>Prop</u>. E spazio euclideo, $p \in E$, $L \subsetneq E$ sottosp. euclideo, $\dim L > 1$
$\Rightarrow \exists!\ L' \subset E$ sottosp. euclideo t.c. $p \in L'$ e $L' \perp L$ complem.
$\rightsquigarrow \pi_L : E \to L$ <u>proiezione ortogonale</u> def. $p \mapsto \pi_L(p) \in L \cap L'$
$\sigma_L : E \to E$ <u>riflessione</u> definita $p \mapsto p + 2\,\overrightarrow{p\,\pi_L(p)}$
$(L = \{p_0\} \rightsquigarrow \sigma_L : E \to E$ definita $p \mapsto p \mapsto p + 2\,\overrightarrow{pp_0})$

<u>Dim</u>. $L' =$ unico sottosp. eucl. di E t.c. $p \in L'$ e $\mathrm{Dir}\, L' = \mathrm{Dir}\, L^{\perp}$

$L_1, L_2 \subset E$ sottospazi euclidei
$\rightsquigarrow d(L_1, L_2) \overset{\text{def}}{=} \min\{d(p_1, p_2) \mid p_i \in L_i\}$
$|\widehat{L_1 L_2}| \overset{\text{def}}{=} \min\{|\widehat{v_1 v_2}| \mid v_i \in \mathrm{Dir}\, L_i \cap (\mathrm{Dir}\, L_1 \cap \mathrm{Dir}\, L_2)^{\perp} - \{0_V\}\}$
se tale insieme è non vuoto e 0 altrimenti

<u>Note</u>: 1) $d(L_1, L_2)$ e $|\widehat{L_1 L_2}|$ ben definite (i minimi esistono)
2) $d(p, L) = d(p, \pi_L(p))$ ($\pi_L(p)$ unico punto a dist. min da p)
3) $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow d(L_1, L_2) = d(p, L_2)\ \forall\, p \in L_1$ se $\dim L_1 \leq \dim L_2$
4) $0 \leq |\widehat{L_1 L_2}| \leq \pi/2$ ($u + v = 0 \Rightarrow |\widehat{vw}| + |\widehat{uw}| = \pi$)
$|\widehat{L_1 L_2}| = 0 \Leftrightarrow L_1 \parallel L_2$, $|\widehat{L_1 L_2}| = \pi/2 \Leftrightarrow L_1 \perp L_2$

<u>Applicazioni affini isometriche</u>

$\varphi : E \to F$ con E, F spazi euclidei su V, W
appl. affine <u>isometrica</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi_* : V \to W$ appl. lineare isometrica
$\Longleftrightarrow d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)\ \forall\, p, q \in E$
<u>isometria (affine)</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi_* : V \to W$ isometria lineare
$\Longleftrightarrow \varphi$ isometrica e biiettiva

$E \cong F \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varphi : E \to F$ isometria
$\hookrightarrow$ spazi euclidei <u>isomorfi</u> o <u>isometrici</u>

<u>Note</u>: 1) $\varphi : E \to F$ appl. affine isometrica $\Rightarrow \varphi$ iniettiva
2) $\varphi : E \to F$ appl. isom. $\Rightarrow \varphi_{|L} : L \to \varphi(L)$ appl. isom.
3) $\varphi : E \to F$ isometria $\Leftrightarrow \varphi$ isometrica e $\dim E = \dim F$
4) $\mathrm{id}_E : E \to E$, $\mathrm{incl}_{L \subset E} : L \to E$ e $\sigma_L : E \to E$ sono isom.
5) $\varphi : E \to F$ e $\psi : F \to G$ isom. $\Rightarrow \psi \circ \varphi : E \to G$ isom.
6) $\varphi : E \to F$ isometria $\Rightarrow \exists\, \varphi^{-1} : F \to E$ isometria
$\hookrightarrow \cong$ "relazione di equivalenza" tra spazi euclidei

7) $\varphi : E \to F$ appl. isom. $\Rightarrow \varphi$ cons. distanze e angoli ($\perp$)
cioè: $d(\varphi(L_1), \varphi(L_2)) = d(L_1, L_2)$, $\forall\, L_1, L_2 \subset E$
$|\widehat{\varphi(L_1)\varphi(L_2)}| = |\widehat{L_1 L_2}|$, $\forall\, L_1, L_2 \subset E$

Prop. E, F spazi euclidei su V, W
$\forall\, p_0 \in E$, $\forall\, q_0 \in F$, $\forall\, \psi : V \to W$ appl. lineare isometrica
$\exists!\, \varphi : E \to F$ appl. affine isometrica t.c. $\varphi(p_0) = q_0$ e $\varphi_* = \psi$

Dim. $\varphi(p_0 + v) = q_0 + \psi(v)$ per ogni $v \in V$

Corol. $E \cong F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$

Note: 1) isometrie del piano/spazio euclideo = isometrie affini
2) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ applicazione affine isometrica
$\Leftrightarrow \varphi(x) = M \cdot x + C$ con $M \in M_{m,n}\mathbb{R}$ t.c. $M^* \cdot M = I_n$

Trasformazioni isometriche (o euclidee)

E spazio euclideo su V

$\operatorname{Iso} E = \{\varphi \in \operatorname{Aff} E \mid \varphi \text{ isometria}\} \subset \operatorname{Aff} E$ (sottogr. non norm.)
↳ gruppo delle isometrie di E

$\operatorname{Iso}^+ E = \{\varphi \in \operatorname{Iso} E \mid \varphi \text{ cons. orient.}\} \subset \operatorname{Iso} E$ (sottogr. norm.)
↳ gruppo delle isometrie positive di E

Prop. $\Phi : \operatorname{Iso} E \to \operatorname{Iso}_0 V$ def. $\varphi \mapsto \varphi_*$ omomorfismo di gruppi
tale che $\Phi_| : \operatorname{Iso}_p E \cong \operatorname{Iso}_0 V$ $\forall\, p \in E$ e $\operatorname{Tra} E = \ker \Phi$

Dim. $\varphi \in \operatorname{Iso} E \Leftrightarrow \varphi_* \in \operatorname{Iso}_0 V$

Nota: $p \in E \rightsquigarrow \operatorname{Iso} E \leftrightarrow \operatorname{Iso}_p E \times \operatorname{Tra} E$ def. $\varphi \leftrightarrow (\varphi_p, \tau_v)$
con $\varphi = \tau_v \circ \varphi_p$, con $\varphi_p \in \operatorname{Iso}_p E$ e $v = \overrightarrow{p\varphi(p)}$
$(\varphi = \tau_v \circ \varphi_p,\ \psi = \tau_w \circ \psi_p \Rightarrow \psi \circ \varphi = \tau_{\psi_*(v)+w} \circ (\psi \circ \varphi)_p)$

Similitudini affini

E spazio euclideo su V

$\operatorname{Sim} E = \{\varphi \in \operatorname{Aff} E \mid \varphi_* \in \operatorname{Sim}_0 V\} \subset \operatorname{Aff} E$ (sottogr. non norm.)
↳ gruppo delle similitudini di E

$\mathrm{Sim}^+ E = \{\varphi \in \mathrm{Sim}\, E \mid \varphi \text{ cons. orient.}\} \subset \mathrm{Sim}\, E$ (sottogr. norm.)
↳ gruppo delle similitudini positive di E

Nota: $\mathrm{Iso}\, E \subset \mathrm{Sim}\, E = \langle \mathrm{Dil}\, E \cup \mathrm{Iso}\, E\rangle$ sottogruppo normale

Riferimenti ortogonali

E spazio euclideo su V di dimensione n

$p_0 \in E \rightsquigarrow \gamma_{p_0} : E \to V$ isometria affine
$p_0, p_1, \dots, p_n \in E$ (affinemente indipendenti) tali che
$B = (v_1 = \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, v_n = \overrightarrow{p_0p_n})$ base ortonormale ordinata di V
$\rightsquigarrow R = (p_0, B)$ riferimento ortogonale con orgine in p_0
$\rightsquigarrow \gamma_R = \gamma_B \circ \gamma_{p_0} : E \to \mathbb{R}^n$ isom. euclideo (coordinate ortogonali)

Note: 1) $p_0, p_0' \in E \rightsquigarrow \gamma_{p_0'} \circ \gamma_{p_0}^{-1} : v \mapsto v - v_0$ con $v_0 = \overrightarrow{p_0p_0'}$

2) $R = (p_0, B)$ e $R' = (p_0', B')$ riferimenti ortogonali su E
$\rightsquigarrow \gamma_{R,R'} = \gamma_{R'} \circ \gamma_R^{-1} : x \mapsto M_{B,B'} \cdot x - x_0$ con $x_0 = \gamma_{B'}(v_0)$
↳ cambiamento di coord. ortogonali ($M_{B,B'} \in \mathrm{O}(n)$)

3) $\varphi : E \to F$ appl. aff. isom., R e S riferim. ortog. su E e F
$\rightsquigarrow \varphi_{R,S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ appl. aff. isom. def. $\varphi_{R,S} = \gamma_S \circ \varphi \circ \gamma_R^{-1}$
φ in coord. ortog. indotte da R e S

4) R', S' altri rif. ortog. su $E, F \rightsquigarrow \varphi_{R',S'} = \gamma_{S,S'} \circ \varphi_{R,S} \circ \gamma_{R,R'}^{-1}$

Equazioni di sottospazi

E spazio euclideo su V di dimensione n
$R = (O, B)$ riferimento ortogonale con origine $O \in E$
$\rightsquigarrow \gamma_R : E \to \mathbb{R}^n$ coordinate ortogonali
$\rightsquigarrow (\gamma_R)_* = \gamma_B : V \to \mathbb{R}^n$ coordinate lineari ortogonali
$L \subset E$ sottospazio euclideo $\xleftrightarrow{\gamma_R}$ $\gamma_R(L) \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio euclideo
$L_1, L_2 \subset A$ sottospazi euclidei ortog. $\Leftrightarrow \gamma_R(L_1), \gamma_R(L_2) \subset \mathbb{R}^n$ ortog.
$L \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio euclideo $\leftrightsquigarrow x = M \cdot t + C \leftrightsquigarrow A \cdot x = B$
$\rightsquigarrow \mathrm{Dir}\, L \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow x = M \cdot t \leftrightsquigarrow A \cdot x = 0$
$\rightsquigarrow \mathrm{Dir}\, L^\perp \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow x = A^* \cdot t \leftrightsquigarrow M^* \cdot x = 0$

$L' \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio euclideo t.c. $x_0 \in L'$ e $L' \perp L$ complementari
$\leftrightsquigarrow x = A^* \cdot t + x_0 \leftrightsquigarrow M^* \cdot (x - x_0) = 0$ $(M^* \cdot x = M^* \cdot x_0)$

$L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^n$ sottospazi euclidei $\leftrightsquigarrow x = M_i \cdot t + C_i \leftrightsquigarrow A_i \cdot x = B_i$

L_i compl. $\rightsquigarrow L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow M_i^* \cdot M_j = 0 \Leftrightarrow A_i \cdot A_j^* = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A_i^* | M_j) = \mathrm{rg}\, A_i^*$

L_i rette $\rightsquigarrow L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow M_1 \perp M_2$, L_i iperpiani $\rightsquigarrow L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1 \perp A_2$

Isometrie in coordinate

E spazio euclideo su V di dimensione n

$R = (O, B)$ riferimento ortogonale con origine $O \in E$

$\rightsquigarrow \mathrm{Iso}\, E \cong \mathrm{Iso}\, \mathbb{R}^n$ isom. def. $\varphi \leftrightarrow \underset{\uparrow}{\varphi_R} \overset{\text{def}}{=\!=} \gamma_R \circ \varphi \circ \gamma_R^{-1}$

$\rightsquigarrow \mathrm{Iso}^+ E \cong \mathrm{Iso}^+ \mathbb{R}^n$ $\qquad$ φ in coord. ortog. indotte da R

Note: 1) $R' = (O', B')$ altro rif. ortog. $\rightsquigarrow \varphi_{R'} = \gamma_{R,R'} \circ \varphi_R \circ \gamma_{R,R'}^{-1}$

2) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria

$\Leftrightarrow y = \varphi(x) = M \cdot x + C$ con $M \in \mathrm{O}(n)$ e $C \in M_{n,1}\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \widetilde{y} = \widetilde{M} \cdot \widetilde{x}$ con $\widetilde{x} = (1, x)$, $\widetilde{y} = (1, y)$ e $\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right)$

3) $\gamma_{R,R'}$ cambiamento di coordinate ortog. ha questa forma

4) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similitudine $\Leftrightarrow$

$y = \varphi(x) = k\, M \cdot x + C$ con $k > 0$, $M \in \mathrm{O}(n)$ e $C \in M_{n,1}\mathbb{R}$

$\mathrm{Iso}\, \mathbb{R}^n \cong \mathrm{E}(n) \overset{\text{def}}{=\!=} (\{\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right) \mid M \in \mathrm{O}(n), C \in M_{n,1}\mathbb{R}\}, \cdot\,)$

gruppo euclideo di grado n

$\mathrm{Iso}^+ \mathbb{R}^n \cong \mathrm{E}^+(n) \overset{\text{def}}{=\!=} (\{\widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline C & M \end{array}\right) \mid M \in \mathrm{SO}(n), C \in M_{n,1}\mathbb{R}\}, \cdot\,)$

gruppo euclideo positivo di grado n

Note: 1) $\mathrm{E}(n) \subset \mathrm{GL}(n{+}1, \mathbb{R})$ (ma $\mathrm{E}(n) \not\subset \mathrm{O}(n{+}1, \mathbb{R})$)

$\mathrm{E}^+(n) \subset \mathrm{SL}(n{+}1, \mathbb{R})$ (ma $\mathrm{E}^+(n) \not\subset \mathrm{SO}(n{+}1, \mathbb{R})$)

sottogruppi (non normali)

2) $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}\, \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = z$

$y = M \cdot x + C$, $z = N \cdot y + D \rightsquigarrow z = (N{\cdot}M) \cdot x + (N{\cdot}C{+}D)$

$\widetilde{y} = \widetilde{M} \cdot \widetilde{x}$, $\widetilde{z} = \widetilde{N} \cdot \widetilde{y} \rightsquigarrow \widetilde{z} = (\widetilde{N} \cdot \widetilde{M}) \cdot \widetilde{x}$

Equivalenza euclidea

E spazio euclideo, $X, Y \subset E$ sottoinsiemi

$X \cong_{\mathrm{Iso}} Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \varphi \in \mathrm{Iso}\, E$ tale che $Y = \varphi(X)$

X e Y isometricamente equivalenti o congruenti

$X \cong_{\mathrm{Sim}} Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varphi \in \operatorname{Sim} E$ tale che $Y = \varphi(X)$
$\hookrightarrow$ X e Y <u>simili</u>

<u>Nota</u>: $X \cong_{\mathrm{Iso}} Y \not\Leftarrow\Rightarrow X \cong_{\mathrm{Sim}} Y \not\Leftarrow\Rightarrow X \cong_{\mathrm{Aff}} Y$

<u>Esempi</u>: 1) $L \cong_{\mathrm{Iso}} L' \Leftrightarrow \dim L = \dim L'$, $\forall\, L, L' \subset E$ sottosp. eucl.
2) $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $Y = \{q_1, \ldots, q_n\} \subset E$
$X \cong_{\mathrm{Iso}} Y \Leftrightarrow \exists\, \pi \in \Sigma_n$ t.c. $d(p_i, p_j) = d(q_{\pi(i)}, q_{\pi(j)})\ \forall\, i, j$
$X \cong_{\mathrm{Sim}} Y \Leftrightarrow \exists\, \pi \in \Sigma_n$ t.c. $|p_i\widehat{p_j}p_k| = |q_{\pi(i)}\widehat{q_{\pi(j)}}q_{\pi(k)}|\ \forall\, i, j, k$

$\mathcal{P}$ proprietà riferita ai sottoinsiemi di uno spazio euclideo E
<u>proprietà metrica</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ proprietà invariante per isometrie di E
<u>proprietà simile</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ proprietà invariante per similitudini di E

<u>Note</u>: 1) $\mathcal{P}$ proprietà di $X \subset E$ è metrica $\Leftrightarrow$ si può esprimere in termini della struttura euclidea di E (soltanto)
2) $\mathcal{P}$ proprietà di $X \subset E$ definita in coordinate ortogonali è metrica $\Leftrightarrow$ non dipende dalla scelta del riferim. ortog.
3) propr. affine $\not\Leftarrow\Rightarrow$ propr. simile $\not\Leftarrow\Rightarrow$ propr. metrica

<u>Esempi</u>: 1) lunghezze e volumi (non orient.) sono propr. metriche
2) misure angoli e ortogononalità sono proprietà simili
3) $X \rightsquigarrow G_X = \{\varphi \in \operatorname{Iso} E \mid \varphi(X) = X\}$ proprietà simile
$\hookrightarrow$ <u>gruppo delle simmetrie</u> di X

<u>Quadriche euclidee</u>

E spazio euclideo di dimensione n

$Q\,, Q' \subset E$ quadriche con $\dim Q = \dim Q'$
$\rightsquigarrow Q \subset L$, $Q' \subset L'$ ipersuperfici quadriche con $\dim L = \dim L'$
$\rightsquigarrow Q\,, Q' \subset L$ ipersuperfici quadriche (a meno di isometrie)

$\rightsquigarrow$ basta considerare ipersuperfici quadriche

$R = (O, B)$ riferimento ortogonale con origine $O \in E$
$\rightsquigarrow \gamma_R : E \to \mathbb{R}^n$ isometria

$Q \subset E$ (ipersuperf.) quadrica $\overset{\gamma_R}{\longleftrightarrow} \gamma_R(Q)$ (ipersuperf.) quadrica

$Q\,,Q' \subset E$ (ipersup.) quadriche, $Q \cong_{\text{Iso}} Q' \Leftrightarrow \gamma_R(Q) \cong_{\text{Iso}} \gamma_R(Q')$

$\rightsquigarrow$ basta considerare ipersuperfici quadriche in $\mathbb{R}^n$

$Q \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperficie quadrica

$\leftrightsquigarrow \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_ix_j + \sum_{i=1}^n 2b_ix_i + c = 0$

equazione cartesiana con $a_{i,j}, b_i, c \in \mathbb{R}$ e $a_{i,j}$ non tutti nulli

univocamente determinata a meno di fattore $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$ con $A \in M^{\text{sim}}_{n,n}\mathbb{R} - \{0\}\,, B \in M_{1,n}\mathbb{R}\,, C \in \mathbb{R}$

$\leftrightsquigarrow \widetilde{x}^* \cdot \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = 0$ con $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline B^* & A \end{array}\right) \in M^{\text{sim}}_{n+1,n+1}\mathbb{R}\,, A \in M^{\text{sim}}_{n,n}\mathbb{R} - \{0\}$

<u>Prop</u>. $\operatorname{sp} A = \{k_1, \ldots, k_n\} \subset \mathbb{R}$ a meno di fattore $k \neq 0$,

$\operatorname{rg} Q\,, \operatorname{rg} Q_\infty\,, \operatorname{sgn} Q\,, \operatorname{sgn} Q_\infty$ sono proprietà metriche di Q

($\{k_1, \ldots, k_n\}$ a meno di $k \neq 0$ indipend. dalle coord. ortog.)

<u>Dim</u>. $x = M \cdot x'$ con $M \in \mathrm{O}(n)$

$\Rightarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0 \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x' + 2B' \cdot x' + C' = 0$

con $A' = M^* \cdot A \cdot M = M^{-1} \cdot A \cdot M$ (A e A' equivalenti)

$\Rightarrow \{k'_1, \ldots, k'_n\} = \{k_1, \ldots, k_n\}$

$x = x' + D$ con $D \in M_{n,1}R$

$\Rightarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0 \rightsquigarrow x'^* \cdot A' \cdot x' + 2B' \cdot x' + C' = 0$

con $A' = A \Rightarrow \{k'_1, \ldots, k'_n\} = \{k_1, \ldots, k_n\}$

$A' = k\,A$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow k'_1 = k\,k_1\,, \ldots, k'_n = k\,k_n$

$\operatorname{rg} Q\,, \operatorname{rg} Q_\infty\,, \operatorname{sgn} Q\,, \operatorname{sgn} Q_\infty$ prop. affini $\Rightarrow$ prop. metriche

<u>Prop</u>. $Q \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperficie quadrica

$\Rightarrow \exists\, R$ riferimento ortogonale con coordinate x tale che

Q ha equazione <u>canonica</u> $x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$

con $a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, $a_{i,i} = 0$ se $i > \operatorname{rg} Q_\infty$

$$b_i = 0 \text{ se } i \neq n\,, \begin{cases} b_n = 0 \text{ e } C = 0 \text{ se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q \\ b_n = 0 \text{ e } C = 1 \text{ se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1 \\ b_n = 1 \text{ e } C = 0 \text{ se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2 \end{cases}$$

univoc. determinata da $\operatorname{rg} Q\,, \operatorname{rg} Q_\infty\,, \operatorname{sgn} Q\,, \operatorname{sgn} Q_\infty\,, \operatorname{sp} A$

a meno di fattore $k \neq 0$ e permutazione delle x_i con

$k = 1$ se $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1$ e $k = \pm 1$ se $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2$

<u>Dim</u>. come nel caso affine, con tutti i camb. di coord. *isometrici*

$\Rightarrow \{a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}\} = \operatorname{sp} A$ a meno di fattore $k \neq 0$

$\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1 \rightsquigarrow k = 1$ (determinato da $C = 1$)

$\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2 \rightsquigarrow k = \pm 1$ (determinato da $b_n = 1$)

$\rightsquigarrow \mathit{inv}\, Q \stackrel{\text{def}}{=} \{l_i = -\sqrt{|a_{i,i}|}/a_{i,i} \ (= 0 \text{ se } a_{i,i} = 0) \mid i = 1, \ldots, n\}$

insieme degli <u>invarianti metrici</u> della quadrica Q

<u>Note</u>: 1) $\mathit{inv}\, Q$ definito a meno di fatt. $k \neq 0$ se $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q$

definito a meno di fatt. $k = \pm 1$ se $\operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2$

2) $\mathit{inv}\, Q \rightsquigarrow \operatorname{rg} Q_\infty \ (= \#\{l_i \neq 0\})$

$\operatorname{sgn} Q_\infty \ (= |\#\{l_i > 0\} - \#\{l_i < 0\}|)$

<u>Corol</u>. $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperfici quadriche

$Q \cong_{\text{Iso}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$, $\operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q'$, $\mathit{inv}\, Q = \mathit{inv}\, Q'$

<u>Dim</u>. $Q \cong_{\text{Iso}} Q' \Leftrightarrow$ hanno la stessa equazione canonica

$(a_{i,i} = -\operatorname{sgn}(l_i)/l_i^2 \text{ se } l_i \neq 0)$

<u>Esempio</u>: $Q \subset \mathbb{R}^2$ conica euclidea

classif. al variare di $(\operatorname{rg} Q, \operatorname{sgn} Q, \mathit{inv}\, Q)$ con $a, b > 0$

$(3, 3, \{-a, -b\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$ (ellissi imm.)

$(3, 1, \{a, b\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (ellissi)

$(3, 1, \{a, -b\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (iperboli)

$(3, 1, \{a, 0\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 - 2y = 0$ (parabole)

$(2, 2, \{-a, -b\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$ (rette incid. imm.)

$(2, 2, \{-a, 0\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 + 1 = 0$ (rette parallele imm.)

$(2, 0, \{a, -b\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ (rette incidenti)

$(2, 0, \{a, 0\}) \rightsquigarrow x^2/a^2 - 1 = 0$ (rette parallele)

$(1, 1, \{1, 0\}) \rightsquigarrow x^2 = 0$ (rette coincidenti)

<u>Corol</u>. $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ ipersuperfici quadriche

$Q \cong_{\text{Sim}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$, $\operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q'$,

$\mathit{inv}\, Q = \mathit{inv}\, Q'$ a meno di fatt. $k \neq 0$

<u>Dim</u>. $Q \cong_{\text{Sim}} Q' \Leftrightarrow$ stessa equaz. canonica a meno di dilatazioni

Note: 1) $Q \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$

$\rightsquigarrow R = (p_0, (v_1, \ldots, v_n))$ riferim. ortog. canonico per Q

con p_0 determinato per induzione su n

(se $\operatorname{rg} Q = n+1$ (Q non singolare) allora

$p_0 = p_\infty =$ polo di $\mathbb{R}^n_\infty$ se $p_\infty \in \mathbb{R}^n$ (centro di Q),

$p_0 \in Q$ t.c. $H_{p_0} \perp p_\infty$ se $p_\infty \in \mathbb{R}^n_\infty$ (vertice di Q);

se $\operatorname{rg} Q \leq n$ (Q singolare, $\operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$) allora

$p_0 = \operatorname{Sing} Q$ se $\operatorname{rg} Q = n$ ($\dim \operatorname{Sing} Q = 0$),

$Q \cong_{\mathrm{Iso}} Q' \times \mathbb{R}$ se $\operatorname{rg} Q < n$ ($\operatorname{Sing} Q \cap \mathbb{R}^n_\infty \neq \varnothing$))

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ = base orton. di autovet. di $x \mapsto A \cdot x$

2) $Q \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$

$p_{\widetilde{A}}(t) \rightsquigarrow \operatorname{rg} Q$ e $\operatorname{sgn} Q$ (teorema di Cartesio)

$p_A(t) = 0 \rightsquigarrow \{k_1, \ldots, k_n\}$ autovalori di $x \mapsto A \cdot x$

$\rightsquigarrow \{a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}\} = k\,\{k_1, \ldots, k_n\}$

$$\text{con } k = \begin{cases} \rho_{A,\widetilde{A}} & \text{se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1 \\ \pm\sqrt{|\rho_{A,\widetilde{A}}|} & \text{se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2 \end{cases}$$

$$\rho_{A,\widetilde{A}} = \frac{\text{coeff. di } t^{n-\operatorname{rg} Q_\infty} \text{ in } p_A(t)}{\text{coeff. di } t^{n+1-\operatorname{rg} Q} \text{ in } p_{\widetilde{A}}(t)}$$

$\rightsquigarrow$ equazione canonica di Q (senza riferim. canonico)

3) $Q \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow x^* \cdot A \cdot x + 2B \cdot x + C = 0$

$Q' \subset \mathbb{R}^n \leftrightsquigarrow x^* \cdot A' \cdot x + 2B' \cdot x + C' = 0$

$Q \cong_{\mathrm{Iso}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$, $\operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q'$

$\exists\, k \neq 0$ tale che $p_{A'}(k\,t) = k^n\, p_A(t)$

$$k = \begin{cases} \rho_{A',\widetilde{A}'}/\rho_{A,\widetilde{A}} & \text{se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 1 \\ \pm\sqrt{|\rho_{A',\widetilde{A}'}/\rho_{A,\widetilde{A}}|} & \text{se } \operatorname{rg} Q_\infty = \operatorname{rg} Q - 2 \end{cases}$$

$Q \cong_{\mathrm{Sim}} Q' \Leftrightarrow \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} Q'$, $\operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q'$,

$\exists\, k \neq 0$ tale che $p_{A'}(k\,t) = k^n\, p_A(t)$