Gli "assiomi" di Euclide

Definizioni 1-3 e 5-6: nozione intuitiva di dimensione
(definizione induttiva di Poincaré)
Definizioni 4 e 7: come interpretare "giace ugualmente"?
(non basta l'"uguaglianza" della nozione com. 4
serve una nozione di direzione o minimalità)
Definizione 23: rette parallele (non si può costruire l'intersezione)
(definizione equivalente basata sull'equidistanza)

Nota: probabilmente apocrife, certamente mal tramandate

Postulati 1-3: costruzioni di (segmenti di) rette e cerchi
Postulato 4: angoli retti $\rightsquigarrow$ costruzione di movimenti rigidi
Postulato 5: postulato delle parallele (costruzione intersezione)
$\Leftrightarrow$ per ogni $P \notin r$ esiste unica $r' \parallel r$ passante per P
$\Leftrightarrow$ somma angoli interni triangoli = angolo piatto

Nozioni comuni: riguardano il concetto di misura (geometria)
(2-4 $\rightsquigarrow$ misura e movimenti rigidi, 5 $\rightsquigarrow$ finitezza)

Gli assiomi di Hilbert

Appartenenza $\rightsquigarrow$ interpretazione insiemistica
rette/piani/spazio = insiemi di punti che vi appartengono

Ordinamento (assiomi 9-12) $\rightsquigarrow$ semirette e segmenti
$O \in r \rightsquigarrow P \sim Q \Leftrightarrow O$ non sta tra P e Q (rel. di equiv. su $r - \{O\}$)
$\rightsquigarrow s, s' \subset r$ semirette con origine O (classi di equiv.)
$P, Q \in r \rightsquigarrow$ segmento $\overline{PQ} = \{P, Q\} \cup \{R \in r \,|\, R$ sta tra P e $Q\}$
$\rightsquigarrow$ segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ (con gli estremi ordinati)

Ogni retta r ammette due orientazioni opposte
= ordini totali t.c. S sta tra R e $T \Leftrightarrow R < S < T \vee T < S < R$,
indotti dalla scelta $P < Q$ o $Q < P$ con $P, Q \in r$ (cf. ass. 12)
= classi di equiv. $[(P_1, P_2)]$ della relazione di equiv. generata da
$(P_1, P_2) \simeq (P_1, P_2') \simeq (P_1', P_2)$ con $P_i, P_i' \in$ stessa semiretta da P_j

Nota: orientazione su $r \leftrightsquigarrow$ "verso di percorrenza" su r

Assioma di Pash $\rightsquigarrow$ semipiani, semispazi, angoli e triangoli

$r \subset \pi \rightsquigarrow P \sim Q \Leftrightarrow \overline{PQ} \cap r = \emptyset$ con $P, Q \in \pi$ (rel. di equiv. su $\pi - r$)

$\rightsquigarrow \rho, \rho' \subset \pi$ semipiani con origine r (classi di equiv.)

$s, t \subset \pi$ semirette con la stessa origine O

$\rightsquigarrow \sigma, \sigma', \tau, \tau' \subset \pi$ semipiani t.c. $s \subset \tau$ e $t \subset \sigma$

$\rightsquigarrow$ angoli $\widehat{st}$: $\sigma \cap \tau$ (convesso) e $\sigma' \cup \tau'$ (concavo)

$\rightsquigarrow$ angoli orientati $\widehat{\vec{st}}$ e $\widehat{\vec{ts}}$ (con i lati ordinati)

$\pi \subset$ spazio $\rightsquigarrow S, S' \subset$ spazio semispazi con origine π

$\sigma, \tau \subset \pi$ semipiani con la stessa origine $r \rightsquigarrow$ angoli diedri

Ogni piano α ammette due orientazioni opposte

$=$ classi di equiv. $[(P_1, P_2, P_3)]$ della relazione di equivalenza

gen. da $(P_1, P_2, P_3) \simeq (P_1', P_2, P_3) \simeq (P_1, P_2', P_3) \simeq (P_1, P_2, P_3')$

con $P_i, P_i' \in$ stesso semipiano uscente da P_jP_k

Note: 1) $P_1, P_2, P_3 \in \pi$ non allineati, $\sigma \in \Sigma_3$

$(P_1, P_2, P_3) \simeq (P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}) \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$

2) orientazione su $\pi \leftrightsquigarrow$ orientazione angoli in π

$O, P, Q \in \pi$ non allineati t.c. $[(O, P, Q)] =$ orient. π

$\widehat{POQ}$ convesso $\rightsquigarrow \overrightarrow{\widehat{POQ}}$, $\widehat{POQ}$ concavo $\rightsquigarrow \overrightarrow{\widehat{QOP}}$

Lo spazio ammette due orientazioni opposte

$=$ classi di equiv. $[(P_1, P_2, P_3, P_4)]$ della relazione di equiv.

gen. da $(P_1, P_2, P_3, P_4) \simeq (P_1', P_2, P_3, P_4) \simeq (P_1, P_2', P_3, P_4)$

$\simeq (P_1, P_2, P_3', P_4) \simeq (P_1, P_2, P_3, P_4')$

con $P_i, P_i' \in$ stesso semispazio uscente da $P_jP_kP_l$

Nota: P_1, P_2, P_3, P_4 non complanari, $\sigma \in \Sigma_4$

$(P_1, P_2, P_3, P_4) \simeq (P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)}) \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$

$P_1, P_2, P_3 \in \pi$ non allineati

$\rightsquigarrow$ triangolo $P_1P_2P_3 = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$

con $\sigma_i \subset \pi$ semipiano con origine P_jP_k contenente P_i

$P_0, \dots, P_n \in \pi \rightsquigarrow$ <u>poligonale</u> $\overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n} \subset \pi$,
<u>aperta</u> se $P_n \neq P_0$, <u>chiusa</u> se $P_n = P_0$,
<u>semplice</u> se $P_i = \overline{P_{i-1}P_i} \cap \overline{P_iP_{i+1}}$ sole intersez.

<u>Prop</u>. $C \subset \pi$ poligonale chiusa semplice $P_0, \dots, P_n$
$\Rightarrow \pi - C = I(C) \sqcup E(C)$ con $I(C), E(C)$ regioni tali che:
$P, Q \in$ stessa regione $\Leftrightarrow \exists$poligonale tra P e Q in $\pi - C$,
$I(C)$ limitata e $E(C)$ illimitata (contiene una retta)
$\rightsquigarrow P(C) = C \cup I(C)$ <u>poligono</u> $P_0 \dots P_n$ delimitato da C

<u>Dim</u>. caso speciale: $\forall\, i\; \exists\, \sigma_i \subset \pi$ con origine $P_{i-1}P_i$ t.c. $P_{j\neq i-1,i} \in \sigma_i$
$I(C) = \sigma_1 \cap \dots \cap \sigma_n$ (regione convessa), $E(C) = \sigma'_1 \cup \dots \cup \sigma'_n$
caso generale: per induzione su n a partire da $n = 3$
$P \sim Q \Leftrightarrow \exists$poligonale tra P e Q in $\pi - C$ (relaz. di equiv.)
classi di equivalenza sono al più due (verifica diretta)
e almeno due ($\exists\, P_iP_j$ t.c. $\overline{P_iP_j} \cap C = \{P_i, P_j\} \rightsquigarrow$ induzione)
$\rightsquigarrow I(C), E(C)$ classi di equivalenza

<u>Parallelismo</u> $\rightsquigarrow$ vettori geometrici
$\overrightarrow{PQ}$ <u>vettore applicato</u> nel punto P (= segmento orientato)
<u>equipollenza</u> = relazione di equiv. generata da

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{RS} \text{ con } PQ \parallel RS \wedge PR \parallel QS$$

$v = [\overrightarrow{PQ}]$ <u>vettore libero</u> (= classe di equipollenza di $\overrightarrow{PQ}$)

Per ogni punto P esiste unico punto Q tale che $v = [\overrightarrow{PQ}]$
($\leftrightsquigarrow$ teorema di Desargues: triangoli omologhi)

<u>Note</u>: 1) l'equipollenza nella retta dipende da quella nel piano
2) il teorema di Desargues dipende dal parallelismo nello spazio (oppure dagli assiomi di congruenza nel piano)

<u>Continuità</u> $\rightsquigarrow$ struttura vettoriale reale
$v = [\overrightarrow{PQ}], w = [\overrightarrow{QR}] \rightsquigarrow v + w = [\overrightarrow{PR}]$ (regola del parallelogrammo)
$\rightsquigarrow$ multipli e sottomultipli interi di vettori (teorema di Talete)
$\rightsquigarrow a\, v$ con $a \in \mathbb{R}$, come limite di multipli raz. (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$V = (\{v = [\overrightarrow{PQ}]\}, (v,w) \mapsto v + w, (a,v) \mapsto a\,v)$
spazio vettoriale reale dei vettori liberi

$\mathrm{Tra} = \{\tau_v : P \mapsto Q \text{ se } v = [\overrightarrow{PQ}]\} \cong (V,+)$
gruppo delle traslazioni del piano/spazio

$\mathrm{Dil}_C = \{\varphi_{C,a} : P \mapsto Q \text{ con } a \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } [\overrightarrow{CQ}] = a\,[\overrightarrow{CP}]\}$
gruppo delle dilatazioni del piano/spazio con centro C

$\mathrm{Dil} = \{\varphi \text{ trasf. del piano/spazio t.c. } \varphi(r) = r \text{ o } \parallel r\ \forall \text{retta } r\}$
gruppo delle dilatazioni del piano/spazio

$\mathrm{Aff} = \{\varphi \text{ trasf. del piano/spazio t.c. } \varphi(\text{retta}) = \text{retta}\}$
gruppo delle affinità del piano/spazio

$\mathrm{Tra} = \{\varphi \in \mathrm{Dil} \mid \varphi = \mathrm{id} \vee \varphi(P) \neq P\ \forall\, P\} \subset \mathrm{Dil}$ (sottogr. normale)
$\mathrm{Dil}_C = \{\varphi \in \mathrm{Dil} \mid \varphi(C) = C\} \subset \mathrm{Dil}$ (sottogruppo non normale)
$\mathrm{Tra}\,, \mathrm{Dil} \subset \mathrm{Aff}$ (sottogruppi normali)

Note: 1) $\varphi \in \mathrm{Aff} \Rightarrow \varphi(\text{piano}) = \text{piano}$ (nel caso dello spazio)
2) $\varphi \in \mathrm{Aff} \Rightarrow \varphi$ conserva l'allineamento e la relaz. "tra"
$\Rightarrow \varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)},\ \varphi(\widehat{POQ}) = \varphi(P)\widehat{\varphi(O)}\varphi(Q)$
3) $\varphi \in \mathrm{Aff} \Rightarrow \varphi$ conserva il parallelismo $(r \parallel r' \Rightarrow \varphi(r) \parallel \varphi(r'))$
e l'equipollenza $(\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{RS} \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{PQ}) \equiv \varphi(\overrightarrow{RS}))$
$\rightsquigarrow \varphi_* : V \to V$ definita $\varphi_*([\overrightarrow{PQ}]) = [\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}]$
$\varphi_*(v + w) = \varphi_*(v) + \varphi_*(w)$ e $\varphi_*(a\,v) = a\,\varphi_*(v)$
(applicazione lineare di spazi vettoriali reali)
4) $\varphi \in \mathrm{Aff}$, O punto fissato come origine, $v = [\overrightarrow{O\varphi(O)}] \in V$
$\rightsquigarrow \varphi_O \in \mathrm{Aff}$ definita $\varphi_O(P) = Q$ se $\varphi_*([\overrightarrow{OP}]) = [\overrightarrow{OQ}]$
$\Rightarrow \varphi = \tau_v \circ \varphi_O$ (quindi $\varphi \in \mathrm{Tra} \Leftrightarrow \varphi_O = \mathrm{id} \Leftrightarrow \varphi_* = \mathrm{id}$)

Per ogni P_1, P_2, P_3 e P_1', P_2', P_3' triangoli (triple non allineate) esiste (unica nel piano) $\varphi \in \mathrm{Aff}$ t.c. $\varphi(P_i) = P_i'$ per $i = 1,2,3$

Per ogni P_1, P_2, P_3, P_4 e P_1', P_2', P_3', P_4' quadruple non complanari esiste unica $\varphi \in \mathrm{Aff}$ (dello spazio) t.c. $\varphi(P_i) = P_i'$ per $i = 1,2,3,4$

<u>Coordinate cartesiane</u> (affini)

retta $\leftrightarrow \mathbb{R}$: O, U punti distinti $\rightsquigarrow P \leftrightarrow \gamma(P) = x_P = [\overrightarrow{OP}]/[\overrightarrow{OU}]$
corr. biuniv. ordinata rispetto all'orientaz. $O < U$
(segmenti incommensurabili e completezza di $\mathbb{R}$)

piano $\leftrightarrow \mathbb{R}^2$: O, U_x, U_y non allineati $\rightsquigarrow P \leftrightarrow \gamma(P) = (x_P, y_P)$

spazio $\leftrightarrow \mathbb{R}^3$: O, U_x, U_y, U_z non compl. $\rightsquigarrow P \leftrightarrow \gamma(P) = (x_P, y_P, z_P)$

Coordinate $\rightsquigarrow$ <u>componenti</u> dei vettori

$V \leftrightarrow \mathbb{R}^{1,2,3}$: $v = [\overrightarrow{PQ}] \leftrightarrow \gamma_*(v) = \gamma(Q) - \gamma(P)$
$\gamma_*(v + w) = \gamma_* v + \gamma_* w$ e $\gamma_*(a\, v) = a\, \gamma_*(v)$
(isomorfismo di spazi vettoriali reali)

Rette $\leftrightarrow$ equazioni/parametrizzazioni lineari

$$r = PQ \subset \text{piano} \leftrightarrow \begin{cases} x = x_P + t\,(x_Q - x_P) \\ y = y_P + t\,(y_Q - y_P) \end{cases} \leftrightsquigarrow a\,x + b\,y = c$$

$$r \subset \text{spazio} \leftrightarrow \begin{cases} x = x_P + t\,(x_Q - x_P) \\ y = y_P + t\,(y_Q - y_P) \\ z = z_P + t\,(z_Q - z_P) \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

<u>Congruenza</u> $\rightsquigarrow$ criteri di congruenza dei triangoli
$\rightsquigarrow \overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \upuparrows \overrightarrow{RS}$ e $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$
$\rightsquigarrow$ per ogni P e r esiste unica $r' \perp r$ passante per P

Congruenza $\leftrightsquigarrow$ <u>misura</u> di segmenti e angoli

$\overline{OU}$ unità di misura $\rightsquigarrow |\overline{PQ}| = \overrightarrow{PQ}/\overrightarrow{PR}$ con $\overline{PR} \cong \overline{OU}$, $\overrightarrow{PR} \upuparrows \overrightarrow{PQ}$

$|\widehat{st}| = 2\pi\, \widehat{st}/\text{giro}$ (misura naturale degli angoli: arco/raggio)

$\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'} \Leftrightarrow |\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}|$ e $\widehat{POQ} \cong \widehat{P'O'Q'} \Leftrightarrow |\widehat{POQ}| = |\widehat{P'O'Q'}|$

π piano orientato $\rightsquigarrow$ giro positivo $\rightsquigarrow$ misura angoli orientati

$\text{Ang}\, \widehat{\vec{st}} = 2\pi\, \widehat{\vec{st}}/\text{giro positivo} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (= per concavo e covesso)

<u>Note</u>: 1) segmenti orientati si possono confrontare nella retta
($\rightsquigarrow$ misura nella retta orientata), ma non nel piano
2) angoli orientati si possono confrontare nel piano
($\rightsquigarrow$ misura nel piano orientato), ma non nello spazio

$d(P,Q) = |\overline{PQ}|$ <u>distanza</u> (metrica) euclidea

$d(\,\cdot\,,\cdot\,)$ applicazione a valori in $[0,\infty)$
t.c. 1) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
2) $d(P,Q) = d(Q,P)$ per ogni P,Q
3) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ per ogni P,Q,R

Congruenza $\leadsto$ trasformazioni euclidee (<u>movimenti rigidi</u>)
$\mathrm{Iso} = \{\varphi \in \mathrm{Aff} \mid \varphi(\overline{PQ}) \cong \overline{PQ}$ per ogni $P,Q\}$
$\hookrightarrow$ <u>gruppo delle isometrie</u> del piano/spazio

$\mathrm{Sim} = \{\varphi \in \mathrm{Aff} \mid \varphi(\widehat{POQ}) \cong \widehat{POQ}$ per ogni $O,P,Q\}$
$\hookrightarrow$ <u>gruppo delle similitudini</u> del piano/spazio

$\mathrm{Tra} \subset \mathrm{Iso} \subset \mathrm{Sim} = \langle \mathrm{Iso} \cup \mathrm{Dil} \rangle \subset \mathrm{Aff}$ (sottogruppi propri)

<u>Prop</u>. $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'} \Leftrightarrow$ esiste $\varphi \in \mathrm{Iso}$ t.c. $\overline{P'Q'} = \varphi(\overline{PQ})$
$\widehat{st} \cong \widehat{s't'} \Leftrightarrow$ esiste $\varphi \in \mathrm{Iso}$ t.c. $\widehat{s't'} = \varphi(\widehat{st}))$

<u>Dim</u>. $\Leftarrow$ definizione di Iso e inclusione $\mathrm{Iso} \subset \mathrm{Sim}$
$\Rightarrow$ criteri di congruenza dei triangoli

<u>Prodotto scalare</u> $\leadsto$ lunghezze e ortogonalità (struttura euclidea)
$v,w \in V \leadsto \langle v,w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \widehat{vw} \in \mathbb{R}$
con $\|v\| = |\overline{PQ}|$ e $\widehat{vw} = |\widehat{QPR}|$ se $v = [\overrightarrow{PQ}]$ e $w = [\overrightarrow{PR}]$
(da cui $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ e $\widehat{vw} = \arccos(\langle v,w \rangle / (\|v\| \cdot \|w\|))$)

Vettore libero $v \leftrightarrow v/\|v\|$ versore (direzione, verso) e $\|v\|$ (modulo)

$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare, simmetrica, definita positiva
t.c. 1) $|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ per ogni v,w
e $\langle v,w \rangle = \pm\, \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow v \parallel w$ ($\pm$ dipende dal verso)
2) $\langle v,w \rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w$ (incluso $v = 0_V$ o $w = 0_V$)
3) $\|a\,v\| = |a|\,\|v\|$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
4) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (proprietà triangolare)
5) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Leftrightarrow v \perp w$ (teorema di Pitagora)
6) $\mathrm{Iso} = \{\varphi \in \mathrm{Aff} \mid \langle \varphi_*(v), \varphi_*(w) \rangle = \langle v,w \rangle$ per ogni $v,w \in V\}$

Prodotto vettoriale/misto (nello spazio)

$$v, w \in V \rightsquigarrow v \times w \in V \text{ definito da } \begin{cases} v \times w \perp v, w \\ (v, w, v \times w) \text{ tripla "positiva"} \\ \|v \times w\| = \text{Area}(v, w) \end{cases}$$

$u, v, w \in V \rightsquigarrow \langle u, v \times w \rangle = \pm\,\text{Volume}(u, v, w) \in \mathbb{R}$

prodotto vettoriale $V \times V \to V$ bilineare antisimmetrico

prodotto misto $V \times V \times V \to \mathbb{R}$ forma trilineare antisimmetrica

t.c. 1) $v \times w = 0 \Leftrightarrow v, w$ sono allineati

2) $\langle u, v \times w \rangle = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ sono complanari

3) $\varphi \in \text{Iso} \Rightarrow \varphi_*$ conserva prodotto vettoriale/misto

Coordinate cartesiane ortogonali nel piano

O, U_x, U_y tc. $\overline{OU_x}, \overline{OU_y}$ ortogonali e congruenti a $\overline{OU}$

$\rightsquigarrow v = v_x e_x + v_y e_y$ con $e_x = [\overrightarrow{OU_x}]\,, e_y = [\overrightarrow{OU_y}]$

$\rightsquigarrow \langle v, w \rangle = v_x w_x + v_y w_y\,,\ \|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$\rightsquigarrow d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

Coordinate cartesiane ortogonali nello spazio

O, U_x, U_y tc. $\overline{OU_x}, \overline{OU_y}, \overline{OU_z}$ ortogonali e congruenti a $\overline{OU}$

$\rightsquigarrow v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$ con $e_x = [\overrightarrow{OU_x}]\,, e_y = [\overrightarrow{OU_y}]\,, e_z = [\overrightarrow{OU_z}]$

$\rightsquigarrow \langle v, w \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z\,,\ \|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$\rightsquigarrow d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$

$\rightsquigarrow v \times w = \pm(v_y w_z - v_z w_y)e_x \pm (v_z w_x - v_x w_z)e_y \pm (v_x w_y - v_y w_x)e_z$

(segni: $+$ se (e_x, e_y, e_z) tripla "positiva", $-$ altrimenti)

Hilbert: modello "reale" dello spazio

spazio $= \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}$ costruito come completamento di $\mathbb{Q}$),

piani $=$ soluzioni di equazioni lineare

rette $=$ soluzioni di sistemi di equazioni lineari

congrenza $=$ relazione di equivalenza indotta da Iso

Nota: modelli di geometrie non euclidee (ellittica e iperbolica)

Klein: programma di Erlangen

geometria = studio delle configurazioni a meno delle relazioni
di equivalenza indotte da gruppi di trasformazioni

Esempi: 1) classificazione dei triangoli (affine, simile, euclidea)
2) baricentro = punto di intersezione delle mediane