Curve regolari nello spazio

$C \subset R^3$ curva (differenziabile) regolare
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, p \in C \;\exists\, \gamma : I \to R^3$ con $I \subset R$ intervallo aperto
e $\gamma(I)$ intorno aperto di p in C
parametrizzazione locale regolare
t.c. 1) γ immersione topologica ($\Rightarrow \gamma(I) \cong I$)
2) $\exists\, \gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \ldots \;\forall\, t \in I$ (γ differenziabile)
3) $\gamma'(t) \neq 0 \;\forall\, t \in I$ (γ regolare)

Note: 1) $V(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0 \longleftarrow$ vettore velocità
$v(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \longleftarrow$ velocità (scalare) funz. diff. di t
2) $C \subset R^3$ curva regolare $\Leftrightarrow$ C curva topologica "liscia"
$\exists$ retta tangente a C in p, $\forall\, p = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \gamma(\bar{t}) \in C$
3) $\gamma(t) = \gamma(\bar{t}) + \gamma'(\bar{t})(t - \bar{t}) + \varepsilon(t - \bar{t})$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = \bar{x} + x'(\bar{t})(t - \bar{t}) \\ y = \bar{y} + y'(\bar{t})(t - \bar{t}) \\ z = \bar{z} + z'(\bar{t})(t - \bar{t}) \end{cases}$$ (equazione parametrica retta tangente a C in p)

Esempi: 1) $f : I \to R^3$ immersione topologica diff. regolare
$\Rightarrow C = f(I)$ curva regolare (omeomorfa ad R)
2) $f : R \to R^3$ diff. regolare e periodica ($f(t) = f(t + c)$)
$\Rightarrow C = f(R)$ curva regolare (omeomorfa a S^1)

Prop. $C \subset R^3$ curva regolare, $p \in C$
$\rightsquigarrow \alpha : I \to R^3$ parametrizzazione naturale intorno a p
tale che $\|\alpha'(s)\| = 1 \;\forall\, s \in I$ (velocità unitaria)

Dim. γ parametrizzazione locale regolare t.c. $p = \gamma(\bar{t})$
$\rightsquigarrow s(t) = \int_{\bar{t}}^{t} \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \text{Lung}(\text{arco di } C \text{ da } p \text{ a } \gamma(t))$
$\rightsquigarrow t(s)$ diff. regolare ($s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0 \Rightarrow s(t)$ invertibile)
$\rightsquigarrow \alpha(s) = \gamma(t(s))$ diff. t.c. $\alpha'(s) = \gamma'(t)\, t'(s) = \gamma'(t) / \|\gamma'(t)\|$

Note: 1) $s =$ parametro naturale (o ascissa curvilinea)
univoc. determ. a meno di traslazioni e/o inversioni

(tutte le altre ascisse curvilinee sono del tipo $\pm s + c$, dove $\pm$ dipende solo dall'orientazione indotta lungo C)

2) $\mathrm{Lung}(\overrightarrow{\widehat{p_1p_2}}) = s_2 - s_1$ (<u>lunghezza orientata</u>)

$\mathrm{Lung}(\widehat{p_1p_2}) = |s_2 - s_1| = \lim \mathrm{Lung}(\text{poligonali inscritte})$

3) $C \subset R^3$ curva regolare connessa $\Rightarrow C \cong R$ o $C \cong S^1$

$\Rightarrow C$ ammette param. regolare globale come negli esempi (che si può ottenere incollando param. naturali locali)

<u>Prop</u>. $C \subset R^3$ curva regolare

$\Leftrightarrow \forall\, p \in C\ \exists\, A \subset R^3$ intorno aperto di p tale che

$C \cap A = \{(x,y,z) \in A \,|\, E(x,y,z) = 0\}$ con $E : A \to R^2$

t.c. 1) E ha tutte le deriv. parz. cont. (E <u>differenziabile</u>)

2) ∇E_1 e ∇E_2 sono vettori lin. indip. (E <u>regolare</u>)

con $\nabla E_i = (\partial E_i/\partial x, \partial E_i/\partial y, \partial E_i/\partial z) \neq 0$, $i = 1, 2$

($E(x,y,z) = 0$ <u>equazione cartesiana locale regolare</u>)

<u>Dim</u>. $\Rightarrow$) $\gamma : I \to R^3$ parametriz. locale regolare di C t.c. $p = \gamma(\bar t\,)$

$x'(\bar t\,) \neq 0$ ($y'(\bar t\,) \neq 0$ e $z'(\bar t\,) \neq 0$ sono analoghi)

$\rightsquigarrow t(x)$ funzione differenziabile inversa locale

$\rightsquigarrow \begin{cases} y - y(t(x)) = 0 \\ z - z(t(x)) = 0 \end{cases}$ equazione cartesiana locale regolare

$\Leftarrow$) $\nabla E_1, \nabla E_2$ linearmente indipendenti in $p \in C$

$\rightsquigarrow W = \nabla E_1 \times \nabla E_2 \neq 0$ in p

$W_x \neq 0$ in p ($W_y \neq 0$ e $W_z \neq 0$ sono analoghi)

$\rightsquigarrow \varphi : I \to R^2$ differenziabile tale che

$\{(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \,|\, x \in I\}$ intorno aperto di p in C

$\rightsquigarrow \gamma(t) = (t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ parametriz. locale regolare

<u>Note</u>: 1) $\gamma : I \to R^3$ parametrizzazione locale regolare

$\Rightarrow (E_i \circ \gamma)(t) = E_i(\gamma(t)) = E_i(x(t), y(t), z(t)) = 0$

$\Rightarrow (E_i \circ \gamma)'(t) = \nabla E_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

$\Rightarrow \nabla E_1(\gamma(t)), \nabla E_2(\gamma(t))$ vettori normali a C in $\gamma(t)$

$\Rightarrow \nabla E_1(\gamma(t)) \times \nabla E_2(\gamma(t))$ vettore tangente a C in $\gamma(t)$

2) $p = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \rightsquigarrow \begin{cases} \nabla E_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) = 0 \\ \nabla E_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) = 0 \end{cases}$

(equaz. cart. retta tangente a C in p)

3) $C \subset R^3$ curva regolare $\Leftrightarrow$ C è loc. grafico di funz. diff.

Riferimenti di Frenet, curvatura e torsione

$C \subset R^3$ curva regolare orientata (con un verso di percorrenza)
$\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale (con l'orientazione data)

$p = \alpha(s) \rightsquigarrow T(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha'(s) \longleftarrow$ versore tangente

$N(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \alpha''(s)/\|\alpha''(s)\| \longleftarrow$ versore normale

$(\|T(s)\| = 1 \Rightarrow T'(s) \cdot T(s) = 0 \Rightarrow N(p) \perp T(p))$

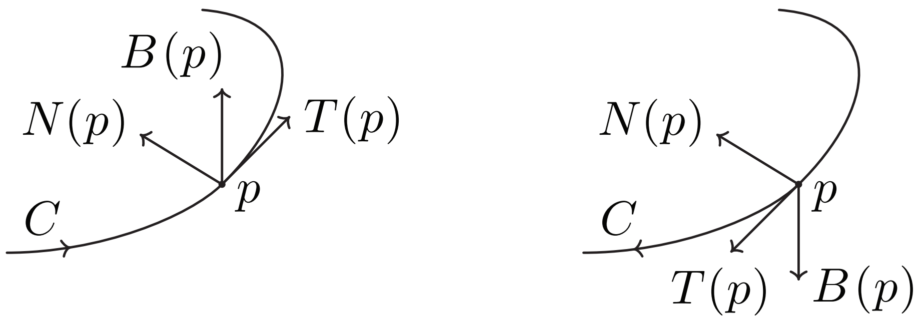
$\rightsquigarrow B(p) \overset{\text{def}}{=\!=} T(p) \times N(p)) \longleftarrow$ versore binormale

$\rightsquigarrow (T(p), N(p), B(p))$ riferimento di Frenet di C in p

se $\alpha''(s) \neq 0$ ($N(p), B(p)$ non definiti se $\alpha''(s) = 0$)

Note: 1) $T(p)\,, N(p)\,, B(p)$ ben def. se $\alpha''(s) \neq 0$ (non dip. da α) e $(T(p)\,, N(p)\,, B(p))$ base ortonorm. positiva in $p \in R^3$

2) orientazione opposta su $C \rightsquigarrow T(p)$ e $B(p)$ opposti
$N(p)$ non dipende dall'orientazione di C
$(\bar{\alpha}(s) = \alpha(-s)\ \forall\, s \in I \Rightarrow \bar{\alpha}''(0) = \alpha''(0))$



3) $T(s), N(s), B(s)$ funzioni (vettoriali) diff. di s

4) $T'(s) \parallel N(s) \Rightarrow T'(s) \cdot T(s) = T'(s) \cdot B(s) = 0$
$N(s) \cdot N(s) = \|N(s)\|^2 = 1\ \forall\, s \in I \Rightarrow N'(s) \cdot N(s) = 0$
$B(s) \cdot B(s) = \|B(s)\|^2 = 1\ \forall\, s \in I \Rightarrow B'(s) \cdot B(s) = 0$
$T(s) \cdot N(s) = 0\ \forall\, s \in I \Rightarrow N'(s) \cdot T(s) = -T'(s) \cdot N(s)$
$N(s) \cdot B(s) = 0\ \forall\, s \in I \Rightarrow B'(s) \cdot N(s) = -N'(s) \cdot B(s)$
$T(s) \cdot B(s) = 0\ \forall\, s \in I \Rightarrow B'(s) \cdot T(s) = T'(s) \cdot B(s) = 0$

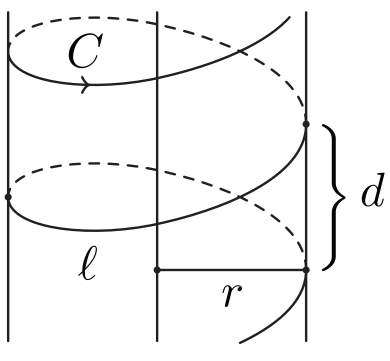
$K(p) \overset{\text{def}}{=\!=} T'(s) \longleftarrow$ <u>vettore curvatura</u> di C in p
$\kappa(p) \overset{\text{def}}{=\!=} \|T'(s)\| \geq 0 \longleftarrow$ <u>curvatura</u> di C in p
$\tau(p) \overset{\text{def}}{=\!=} N'(s) \cdot B(s) \in \mathbb{R} \longleftarrow$ <u>torsione</u> di C in p
se $\kappa(p) \neq 0$ (poniamo $\tau(p) = 0$ se $\kappa(p) = 0$)

<u>Note</u>: 1) $K(p)$, $\kappa(p)$ e $\tau(p)$ sono indipendenti dall'orientaz. di C
2) $C \subset \pi$ piano orient. $\Rightarrow \kappa(p) = |\kappa_\pi(p)|$ e $\tau(p) = 0 \ \forall\, p \in C$
3) $K(s)\,, \kappa(s)\,, \tau(s)$ funzioni differenziabili di s
4) $\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)\, N(s) \\ N'(s) = -\,\kappa(s)\, T(s) + \tau(s)\, B(s) \\ B'(s) = -\,\tau(s)\, N(s) \end{cases}$ <u>formule di Frenet</u>

<u>Prop</u>. $C_1, C_2 \subset R^3$ curve regolari orientate, $h \in \operatorname{Isom} R^3$ tale che
$C_2 = h(C_1)$ come curve orientate $(T_{C_2}(h(p)) = h_*(T_{C_1}(p)))$
$\Rightarrow \kappa_{C_2}(h(p)) = \kappa_{C_1}(p)$ e $\tau_{C_2}(h(p)) = \pm\,\tau_{C_1}(p) \ \forall\, p \in C_1$
($\pm$ a seconda che h conserva/inverte l'orientaz. di R^3)

<u>Dim</u>. $\alpha : I \to C_1$ param. naturale $\rightsquigarrow h \circ \alpha : I \to C_2$ param. naturale
$T_{C_2}(s) = h_*(T_{C_1}(s)) \Rightarrow T'_{C_2}(s) = h_*(T'_{C_1}(s))$ (linearità di h_*)
$N_{C_2}(s) = h_*(N_{C_1}(s)) \Rightarrow N'_{C_2}(s) = h_*(N'_{C_1}(s))$ (linearità di h_*)
$B_{C_2}(s) = \pm\, h_*(B_{C_1}(s))$ se h cons./inverte l'orient. di R^3

<u>Esempi</u>: 1) C = retta $\Rightarrow \kappa(p) = \tau(p) = 0 \ \forall\, p \in C$
2) C = circonf. di raggio $r \Rightarrow \kappa(p) = 1/r\,, \tau(p) = 0 \ \forall\, p \in C$
3) C = <u>elica circolare</u> $\Rightarrow \kappa(p) = \dfrac{4\pi^2 r}{\ell^2}\,, \tau(p) = \dfrac{2\pi d}{\ell^2} \ \forall\, p \in C$



$\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r \sin 2\pi t, d\, t)$
$\gamma'(t) = (-2\pi r \sin 2\pi t, 2\pi \sin 2\pi t, d)$
$v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\pi^2 r^2 + d^2} = \ell$
$\rightsquigarrow s(t) = \ell\, t \ , \ t(s) = s/\ell$

$$\alpha(s) = \left(r \cos \frac{2\pi s}{\ell}, r \sin \frac{2\pi s}{\ell}, \frac{d\, s}{\ell}\right)$$

$$T(s) = \left(-\frac{2\pi r}{\ell}\sin\frac{2\pi s}{\ell}, \frac{2\pi r}{\ell}\cos\frac{2\pi s}{\ell}, \frac{d}{\ell}\right)$$
$$\alpha''(s) = \left(-\frac{4\pi^2 r}{\ell^2}\cos\frac{4\pi^2 r}{\ell^2}, -\frac{2\pi r}{\ell}\sin\frac{2\pi s}{\ell}, 0\right)$$
$$\rightsquigarrow \kappa(s) = \frac{4\pi^2 r}{\ell^2} > 0 \ \ \forall\, s \in R$$
$$N(s) = \left(-\cos\frac{2\pi s}{\ell}, -\sin\frac{2\pi s}{\ell}, 0\right)$$
$$N'(s) = \left(\frac{2\pi}{\ell}\sin\frac{2\pi s}{\ell}, -\frac{2\pi}{\ell}\cos\frac{2\pi s}{\ell}, 0\right)$$
$$B(s) = \left(\frac{d}{\ell}\sin\frac{2\pi s}{\ell}, -\frac{d}{\ell}\cos\frac{2\pi s}{\ell}, \frac{2\pi r}{\ell}\right)$$
$$\rightsquigarrow \tau(s) = \frac{2\pi d}{\ell^2} \neq 0 \ \ \forall\, s \in R$$

$C \subset R^3$ curva regolare orientata
$\gamma : I \to C$ parametrizzazione regolare

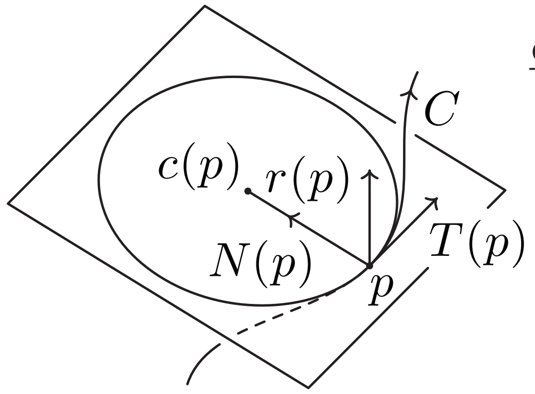
$$\gamma'(t) = v(t)\,T(t) \text{ con } v(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$$
$$\rightsquigarrow \gamma''(t) = v'(t)\,T(t) + v(t)\,T'(t) = v'(t)T(t) + v(t)^2\kappa(t)\,N(t)$$
$$\gamma'''(t) = (\ldots)\,T(t) + (\ldots)\,N(t) + v(t)^3\kappa(t)\tau(t)\,B(t)$$
$$\rightsquigarrow \gamma'(t)\times\gamma''(t) = v(t)^3\kappa(t)\,B(t) \ \text{ (se } \neq 0, \text{ altrim. } \kappa(t) = \tau(t) = 0)$$
$$\gamma'(t)\times\gamma''(t)\cdot\gamma'''(t) = v(t)^6\kappa(t)^2\tau(t)$$
$$\rightsquigarrow T(t) = \frac{\gamma'(t)}{v(t)}\ ,\ N(t) = B(t)\times T(t)\ ,\ B(t) = \frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}$$
$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{v(t)^3}\ ,\ \tau(t) = \frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)\cdot\gamma'''(t)}{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|^2}$$

<u>Forma canonica</u>

$C \subset R^3$ curva regolare, $p \in C$ tale che $\kappa(p) > 0$
$\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale tale che $p = \alpha(s)$

$r(p) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \dfrac{1}{\kappa(p)} = \dfrac{1}{\|\alpha''(s)\|} \longleftarrow$ <u>raggio di curvatura</u> di C in p

$c(p) \stackrel{\text{def}}{=\!=} p + \dfrac{N(p)}{\kappa(p)} = \alpha(s) + \dfrac{\alpha''(s)}{\kappa(s)^2} \longleftarrow$ <u>centro di curvatura</u>



<u>cerchio osculatore</u> di C in p
$\overset{\text{def}}{=\!=}$ circ. con centro in $c(p)$ e raggio $r(p)$
concenuta nel piano $T(p)\,,N(p)$
tang. a C in p con curvatura $= \kappa(p)$
(appros. C int. a p con ordine > 2)

<u>Nota</u>: $\forall\, p \in C$ esiste unica elica circolare (o circonf. o retta)
per p con lo stesso riferimento di Frenet di C
con curvatura $= \kappa(p)$ e torsione $= \tau(p)$

$\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale tale che $p = \alpha(0)$

$$\rightsquigarrow \alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)\, s + \frac{\alpha''(0)}{2}\, s^2 + \frac{\alpha'''(0)}{6}\, s^3 + \varepsilon(s)$$

$$= p + s\,T(p) + \frac{\kappa(p)s^2}{2} N(p) + \frac{\kappa(p)\tau(p)s^3}{6} B(p) + \delta(s)$$

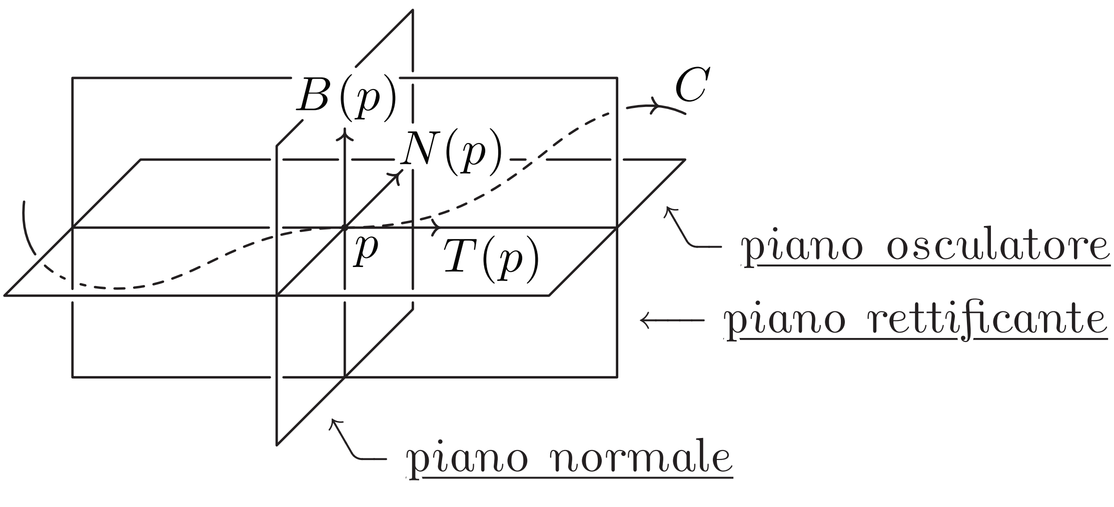
con $o(\varepsilon(s)) > 3$ e $o(\delta(s)) > 2$

(x, y, z) coord. cart. t.c. $p = 0\,, T(p) = e_x\,, N(p) = e_y\,, B(p) = e_z$

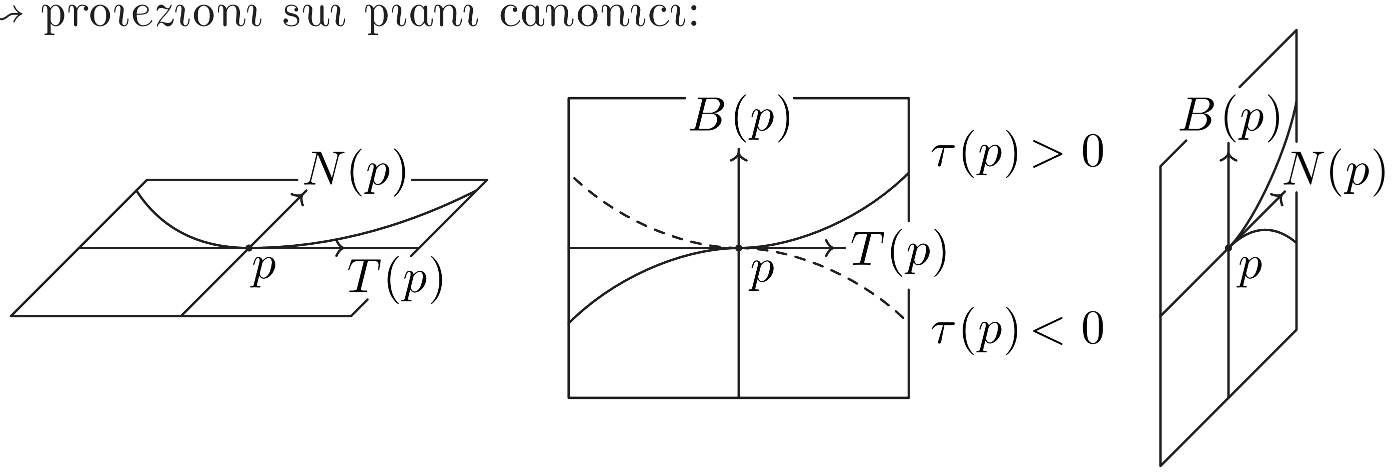
$$\rightsquigarrow \begin{cases} x(s) = s + \delta_x(s) \\ y(s) = \dfrac{\kappa(p)}{2}\, s^2 + \delta_y(s) \\ z(s) = \dfrac{\kappa(p)\tau(p)}{6}\, s^3 + \delta_z(s) \end{cases}$$

<u>forma canonica</u> di C in p

con $o(\delta_x(s)) > 2$, $o(\delta_y(s)) > 2$ e $o(\delta_z(s)) > 3$



$\rightsquigarrow$ proiezioni sui piani canonici:



<u>Isometrie tra curve</u>

$i : C_1 \to C_2$ applicazione tra curve regolari $C_1, C_2 \subset R^3$

<u>isometria (intrinseca)</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ i conserva le lunghezze degli archi

$(\mathrm{Lung}(i(C)) = \mathrm{Lung}(C)\ \forall\, C \subset C_1)$

<u>Note</u>: 1) i isometria $\Rightarrow$ i omeo (i continua e i^{-1} isometria)

2) i isometria $\Rightarrow$ i diff. regolare (i^{-1} differenziabile)

(γ param. locale regolare $\Rightarrow$ $i \circ \gamma$ param. locale regolare)

<u>Prop</u>. $C \subset R^3$ curva regolare, $\mathrm{Lung}(C) = \ell \leq \infty$

$\ell < \infty \Rightarrow C$ isometricamente equivalente a $S^1_{\ell/2\pi}$ o $]0, \ell[$

$\ell = \infty \Rightarrow C$ isometricamente equivalente $]0, \infty[$ o R

(se ha lungh. ∞ in uno solo o entrambi i versi)

<u>Dim</u>. $\alpha : I \to C$ parametrizzazione naturale globale

$\rightsquigarrow i = \alpha/\!\sim_\alpha : S^1_{\ell/2\pi} \to C$ isometria se α è periodica

$i : I \to C$ isometria con $I = \,]0, \ell[\ ,\ ]0, \infty[\ , R$ altrimenti

<u>Lemma</u>. $\forall\, \kappa, \tau : I \to R$ funz. diff., $0 \in I \subset R$ int. ap., $\kappa(s) > 0\ \forall\, s \in I$

$\exists!\, \alpha : I \to R^3$ parametriz. naturale (loc. iniettiva)

t.c. $\alpha(0) = 0\,, T(0) = e_x\,, N(0) = e_y$

$\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ e $\tau_\alpha(s) = \tau(s)\ \forall\, s \in I$

<u>Dim</u>. esiste unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)\, N(s) & ,\ T(0) = e_x \\ N'(s) = -\kappa(s)\, T(s) + \tau(s)\, B(s) & ,\ N(0) = e_y \\ B'(s) = -\tau(s)\, N(s) & ,\ B(0) = e_z \end{cases}$$

la soluzione è ortonormale positiva $\Rightarrow B(s) = T(s) \times N(s)$

$(F(s) = (T(s), N(s), B(s))$ matrice di vettori riga

$\Rightarrow F'(s) = M(s)F(s)$ con $M(s)^* = -M(s)$

$G(s) = F(s)^* \cdot F(s)$ tale che $G(0) = \mathrm{Id}$

$\Rightarrow G'(s) = F'(s)^* \cdot F(s) + F(s)^* \cdot F'(s) = 0$

$\Rightarrow G(s) = \mathrm{Id}$ per ogni $s \in I)$

$\rightsquigarrow \alpha(s) = \int_0^s T(\sigma)\, d\sigma$ unica soluzione

del problema di Cauchy: $\alpha'(s) = T(s)$, $\alpha(0) = 0$

Teorema fondamentale

$C_1, C_2 \subset R^3$ curve regolari orientate connesse

con curvatura ovunque non nulla $(\kappa_i(p) > 0 \ \forall\, p \in C_i)$

sono equivalenti:

1) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^3$ tale che $C_2 = h(C_1)$ (come curve orientate)

2) $\exists\, i : C_1 \to C_2$ isometria tale che $\begin{cases} \kappa_2(i(p)) = \kappa_1(p) \ \forall\, p \in C_1 \\ \tau_2(i(p)) = \pm\, \tau_1(p) \ \forall\, p \in C_1 \end{cases}$

3) $\exists\, \alpha_1, \alpha_2 : I \to R^3$ parametrizzazioni naturali globali di C_1, C_2

tali che $\begin{cases} \kappa_2(s) = \kappa_1(s) \ \forall\, s \in I \\ \tau_2(s) = \pm\, \tau_1(s) \ \forall\, s \in I \end{cases}$

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2) $i = h_{|C_1} : C_1 \to C_2$

2) $\Rightarrow$ 3) α_1 param. nat. di $C_1 \rightsquigarrow \alpha_2 = i \circ \alpha_1$ param. nat. di C_2

3) $\Rightarrow$ 1) possiamo supporre $0 \in I$ (a meno di traslaz. in R)

e $\tau_1(s) = \tau_2(s) \ \forall\, s \in I$ (a meno di riflessioni di R^3)

$h_1, h_2 \in \mathrm{Isom}^+ R^3$ tali che

$h_i(\alpha_i(0)) = 0\, , h_i(T_i(0)) = e_x\, , h_i(N_i(0)) = e_y$

$\Rightarrow h_2(C_2) = h_1(C_1) \rightsquigarrow h = h_2^{-1} \circ h_1$

Note: 1) nei punti 2 e 3 si ha il segno $+ \Leftrightarrow h \in \mathrm{Isom}^+ R^3$

2) la condizione $\kappa_i(p) > 0 \ \forall\, p \in C_i$ non si può eliminare

3) $\tau_2(s) = \pm\, \tau_1(s)$ non si può sostituire con $|\tau_2(s)| = |\tau_1(s)|$

4) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^3 \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2$ t.c. $\begin{cases} \kappa_2(s) = \kappa_1(s) \ \forall\, s \in I \\ \tau_2(s) = \tau_1(s) \ \forall\, s \in I \end{cases}$

5) date $\alpha_1 : I_1 \to R^3$ e $\alpha_2 : I_2 \to R^3$ parametriz. naturali

$$\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa_2(s) = \kappa_1(s+c) \ \forall\, s \in I_2 \\ \tau_2(s) = \pm\,\tau_1(s+c) \ \forall\, s \in I_2 \end{cases}$$

$$\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa_2(s) = \kappa_1(s+c) \ \forall\, s \in I_2 \\ \tau_2(s) = \tau_1(s+c) \ \forall\, s \in I_2 \end{cases}$$

6) $C \subset R^3$ curva regolare connessa con <u>κ e τ costanti</u>

$\Leftrightarrow C =$ segmento $(\kappa = 0)$ o arco di circonf. $(\kappa \neq 0\,, \tau = 0)$

o arco di elica $(\kappa \neq 0\,, \tau \neq 0)$

<u>Corol</u>. $C \subset R^3$ curva regolare connessa t.c. $\kappa(p) > 0 \ \forall\, p \in C$

C planare $\Leftrightarrow \tau(p) = 0 \ \forall\, p \in C$ (<u>condizione di planarità</u>)

<u>Dim</u>. $\exists$ curva piana con la stessa curvatura (e torsione)

<u>Corol</u>. $C_1, C_2 \subset R^3$ curve regolari orientate connesse

con curvatura ovunque non nulla $(\kappa_i(p) > 0 \ \forall\, p \in C_i)$

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^3$ tale che $C_2 = h(C_1)$ (come curve orientate)

$\Leftrightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2 : I \to R^3$ parametrizzazioni regolari di C_1, C_2

t.c. $v_2(t) = v_1(t)\,,\ \kappa_2(t) = \kappa_1(t)\,,\ \tau_2(t) = \pm\,\tau_1(t) \ \forall\, t \in I$

<u>Dim</u>. $v_1(t) = v_2(t) \rightsquigarrow s_1(t) = \int_{t_0}^t v_1(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t v_2(\tau)d\tau = s_2(t)$

$\rightsquigarrow \alpha_1, \alpha_2 : J \to R^3$ parametrizzazioni naturali di C_1, C_2

tali che $\kappa_2(s) = \kappa_2(t(s)) = \kappa_1(t(s)) = \kappa_1(s) \ \forall\, s \in J$

$\tau_2(s) = \tau_2(t(s)) = \pm\,\tau_1(t(s)) = \pm\,\kappa_1(s) \ \forall\, s \in J$

<u>Note</u>: 1) $\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^3 \Leftrightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2$ tali che $v_2(t) = v_1(t)\,,$

$\kappa_2(t) = \kappa_1(t)\,,\ \tau_2(t) = \tau_1(t)$

2) date $\gamma_1 : I_1 \to R^3$ e $\gamma_2 : I_2 \to R^3$ parametriz. regolari

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}\, R^3 \Leftrightarrow \exists\, \varphi : I_2 \to I_1$ diff. con $\varphi'(t) > 0 \ \forall\, t$

t.c. $v_2(t) = v_1(\varphi(t))\varphi'(t)\,,$

$\kappa_2(t) = \kappa_1(\varphi(t))\,,\ \tau_2(t) = \pm\,\tau_1(\varphi(t))$

$\exists\, h \in \mathrm{Isom}^+ R^3 \Leftrightarrow \exists\, \varphi : I_2 \to I_1$ diff. con $\varphi'(t) > 0 \ \forall\, t$

t.c. $v_2(t) = v_1(\varphi(t))\varphi'(t)\,,$

$\kappa_2(t) = \kappa_1(\varphi(t))\,,\ \tau_2(t) = \tau_1(\varphi(t))$