Gruppo fondamentale

X spazio topologico, $* \in X$ (punto base)

$\Omega(X,*) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\omega : [0,1] \to X \text{ continua t.c. } \omega(0) = \omega(1) = *\}$

insieme dei cappi in X con base in $*$

$* \in \Omega(X,*)$ definito $*(t) = * \ \forall\, t \in [0,1] \longleftarrow$ cappio costante

$\omega \in \Omega(X,*) \rightsquigarrow \bar{\omega} \in \Omega(X,*) \longleftarrow$ cappio inverso

definito $\bar{\omega}(t) = \omega(1-t) \ \forall\, t \in [0,1]$

$\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X,*) \rightsquigarrow \omega = \omega_1 \cdot \omega_2 \in \Omega(X,*) \longleftarrow$ concatenazione

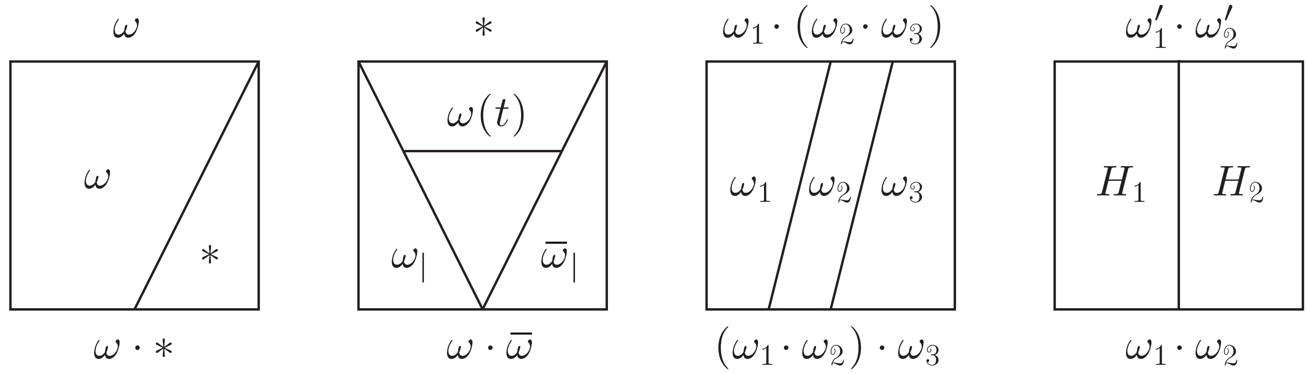
$$\text{definito } \omega(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) \text{ se } 0 \le t \le 1/2 \\ \omega_1(2t-1) \text{ se } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Note: 1) $\omega \cdot * \simeq_{\{0,1\}} \omega \simeq_{\{0,1\}} * \cdot \omega \quad \forall\, \omega \in \Omega(X,*)$

2) $\omega \cdot \bar{\omega} \simeq_{\{0,1\}} * \simeq_{\{0,1\}} \bar{\omega} \cdot \omega \quad \forall\, \omega \in \Omega(X,*)$

3) $(\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3 \simeq_{\{0,1\}} \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3) \quad \forall\, \omega_i \in \Omega(X,*)$

4) $\omega_1 \cdot \omega_2 \simeq_{\{0,1\}} \omega_1' \cdot \omega_2' \quad \forall\, \omega_i \simeq_{\{0,1\}} \omega_i' \in \Omega(X,*)$



$\pi_1(X,*) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\Omega(X,*), \cdot)/\simeq_{\{0,1\}}$

gruppo fondamentale di $(X,*)$

nota $\pi_1(X,*) \cong \pi_1(A_*,*)$ con A_* comp. connessa p.a. di $*$ in X

Esempi: 1) $\pi_1(R^m,*) \cong 0 \quad \forall\, m \ge 1$

2) $\pi_1(S^1,*) \cong \mathbb{Z}$ ($\pi : R \to R/\mathbb{Z} \cong S^1$, $* = \pi(0) \rightsquigarrow$

$\psi : \pi_1(S^1,*) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ definito $\psi([\omega]) = \widetilde{\omega}(1)$

con $\widetilde{\omega}$ unico soll. di ω t.c. $\widetilde{\omega}(0) = 0$)

$f : X \to Y$ applicazione continua, $* \in X$, $f(*) = * \in Y$
$\rightsquigarrow f_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(Y,*)$ definita $f_*([\omega]) = [f \circ \omega]$
omomorfismo indotto da f

Note: 1) f_* ben definita e omomorfismo
2) $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ e $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ($\pi_1 : \mathcal{TOP} \to \mathcal{GR}$ funtore)
3) $f : X \to Y$ omeo $\Rightarrow f_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(X,*)$ isomorfismo
4) $f \simeq_* g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(Y,*)$
5) $X \searrow Y \ni * \Rightarrow \pi_1(X,*) \cong \pi_1(Y,*)$ ($X \searrow * \Rightarrow \pi_1(X,*) \cong 0$)

Indipendenza dal punto base

X spazio top., $\alpha : [0,1] \to X$ arco t.c. $\alpha(0) = *$ e $\alpha(1) = *'$
$\rightsquigarrow \alpha_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(X,*')$ definita $\alpha_*([\omega]) = [\bar{\alpha} \cdot \omega \cdot \alpha]$

Note: 1) α_* ben definita e omomorfismo
2) $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta \Rightarrow \alpha_* = \beta_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(X,*')$
3) $(\alpha \cdot \beta)_* = \beta_* \circ \alpha_*$ $\forall\, \alpha, \beta$ archi in X t.c. $\alpha(1) = \beta(0)$
4) α_* isomorfismo ($\alpha_* \circ \bar{\alpha}_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,*)}, \bar{\alpha}_* \circ \alpha_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,*')}$)
5) $\omega \in \Omega(X,*) \Rightarrow \omega_* =$ coniugio per $[\omega]$ in $\pi_1(X,*)$

Prop. X spazio topologico connesso p.a.
$\Rightarrow \pi_1(X,*) \cong \pi_1(X,*')$ $\forall\, *, *' \in X$

Dim. α arco tra $*$ e $*'$ $\rightsquigarrow \alpha_* : \pi_1(X,*) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,*')$

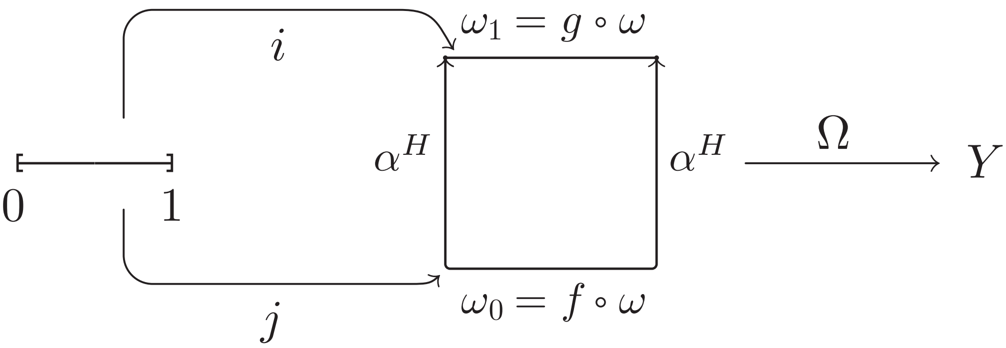
Nota: l'isomorfismo $\pi_1(X,*) \cong \pi_1(X,*')$ non è unicamente determinato (dipende dalla classe di omotopia di α), ma lo è a meno di coniugio ($\beta_* = (\bar{\alpha} \cdot \beta)_* \circ \alpha_*$)

Invarianza omotopica

$H : X \times [0,1] \to Y$ omotopia, $* \in X$
$\rightsquigarrow \alpha^H : [0,1] \to Y$ arco da $h_0(*)$ ad $h_1(*)$ definito $\alpha^H(t) = h_t(*)$

Prop. $f, g : X \to Y$ applicazioni continue, $* \in X$
$H : f \simeq g \;\Rightarrow\; g_* = \alpha^H_* \circ f_*$

<u>Dim</u>. $\omega \in \Omega(X,*) \rightsquigarrow \Omega : [0,1]\times[0,1] \to Y$ omotopia definita $\omega_t = h_t \circ \omega \ \forall\, t \in [0,1]$



$$i \simeq_{\{0,1\}} j \Rightarrow \Omega\circ i \simeq_{\{0,1\}} \Omega\circ j \Rightarrow g\circ\omega \simeq_{\{0,1\}} \bar\alpha^H\cdot(f\circ\omega)\cdot\alpha^H$$
$$\Rightarrow g_*([\omega]) = [g\circ\omega] = \alpha^H_*([f\circ\omega]) = \alpha^H_*(f_*([\omega]))$$

<u>Prop</u>. $f : X \to Y$ applicazione continua, $* \in X$, $f(*) = * \in Y$
f equiv. omotopica $\Rightarrow f_* : \pi_1(X,*) \to \pi_1(Y,*)$ isomorfismo
(X, Y spazi top. conn. p.a., $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X,*) \cong \pi_1(Y,*)$)

<u>Dim</u>. $g : Y \to X$, $H : g\circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $K : f\circ g \simeq \mathrm{id}_Y \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(Y,*) \arrow[r, "g_*"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(X,g(*)) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha^H_*"] & \pi_1(Y,f(g(*))) \arrow[d, "\alpha^K_*"] \\
 & & \pi_1(X,*) & \pi_1(Y,*)
\end{tikzcd}$$

$g_*\circ f_*,\ f_*\circ g_*$ iso $\Rightarrow f_*$ iso

<u>Calcolo del gruppo fondamentale</u>

<u>Prop</u>. X spazio topologico connesso p.a., $* \in X$
$\pi_1(X,*) \cong 0 \Leftrightarrow X$ semplicemente connesso

<u>Dim</u>. $\Leftarrow$) $\omega \simeq_{\{0,1\}} * \ \ \forall\,\omega \in \Omega(X,*)$
$\Rightarrow$) $x, y \in X$, $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ archi tra x e y
$\Rightarrow \bar\alpha\cdot\beta \in \Omega(X,y) \Rightarrow \bar\alpha\cdot\beta \simeq_{\{0,1\}} y$
$\Rightarrow \alpha \simeq_{\{0,1\}} \alpha\cdot(\bar\alpha\cdot\beta) \simeq_{\{0,1\}} (\alpha\cdot\bar\alpha)\cdot\beta \simeq_{\{0,1\}} \beta$

<u>Esempi</u>: 1) $\pi_1(R^m - \{0\}, *) \cong 0 \ \ \forall\, m \geq 3$

2) $\pi_1(S^m, *) \cong 0 \ \ \forall\, m \geq 2$

<u>Prop</u>. X spazio topologico loc. connesso p.a.,
$p : \widetilde{X} \to X$ rivestimento universale $\Rightarrow$
$\pi_1(X, *) \cong G_p = \{g \in \mathrm{Omeo}\,\widetilde{X} \mid p \circ g = p\} < \mathrm{Omeo}\,\widetilde{X}$

<u>Dim</u>. $F = p^{-1}(*) \subset \widetilde{X}$, $\tilde{*} \in F$

$\rightsquigarrow \varphi : \pi_1(X, *) \to F$ definita $\varphi([\omega]) = \widetilde{\omega}(1)\ \forall\, [\omega] \in \pi_1(X, *)$
con $\widetilde{\omega} : [0,1] \to \widetilde{X}$ unico sollevamento di ω t.c. $\widetilde{\omega}(0) = \tilde{*}$
$\psi : F \to G_p$ definita da $\psi(x)(\tilde{*}) = x \ \ \forall\, x \in F$

$\rightsquigarrow \rho = \psi \circ \varphi : \pi_1(X, *) \to G_p$

$\omega_1, \omega_2 \in \pi_1(X, *)$

$\rightsquigarrow g_1 = \rho([\omega_1]),\ g_2 = \rho([\omega_2])$
$g = \rho([\omega_1 \cdot \omega_2])$

$\Rightarrow \widetilde{\omega_1 \cdot \omega_2} = \widetilde{\omega}_1 \cdot (g_1 \circ \widetilde{\omega}_2)$

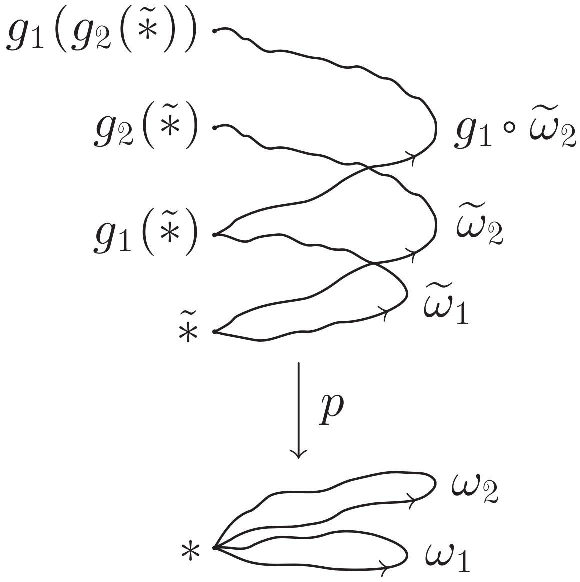
$\Rightarrow \widetilde{\omega_1 \cdot \omega_2}(1) = g_1(\widetilde{\omega}_2(1))$

$\Rightarrow g(\tilde{*}) = g_1(g_2(\tilde{*}))$

$\Rightarrow g = g_1 \circ g_2$

$\Rightarrow \rho$ omomorfismo

φ, ψ biiettive $\Rightarrow \rho$ iso



<u>Esempi</u>: 1) $\widetilde{T}^m \cong R^m \to T^m \cong R^m/\mathbb{Z}^m \Rightarrow \pi_1(T_m, *) \cong \mathbb{Z}^m \ \ \forall\, m \geq 1$

2) $\widetilde{P}^m \cong S^m \to P^m \cong S^m/\mathbb{Z}_2 \Rightarrow \pi_1(P^m, *) \cong \mathbb{Z}_2 \ \ \forall\, m \geq 2$

<u>Prop</u>. X_1, X_2 spazi topologici connessi per archi
$\Rightarrow \pi_1(X_1 \times X_2, *) \cong \pi_1(X_1, *) \times \pi_1(X_2, *)$

<u>Dim</u>. $\left.\begin{array}{rcl} \Omega(X_1 \times X_2, *) & \longrightarrow & \Omega(X_1, *) \times \Omega(X_2, *) \\ \omega & \longmapsto & (\omega_1 = \pi_1 \circ \omega, \omega_2 = \pi_2 \circ \omega) \end{array}\right\}$ biiettiva

$H : \omega \simeq_{\{0,1\}} \omega' \Leftrightarrow H_i = \pi_i \circ H : \omega_i \simeq_{\{0,1\}} \omega_i'$ con $i = 1, 2$

$\Rightarrow \pi_{1*} \times \pi_{2*} : \pi_1(X_1 \times X_2, *) \to \pi_1(X_1, *) \times \pi_1(X_1, *)$ iso

Per calcolare $\pi_1(X,*)$ con $X = X_1 \cup X_2$ e $* \in X_1 \cap X_2$ in termini di $\pi_1(X_1,*)$ e $\pi_1(X_2,*)$ serve la nozione di prodotto libero di gruppi.

A insieme $\rightsquigarrow W(A) \overset{\text{def}}{=\!=} (\{a_1 \dots a_n \,|\, a_i \in A, n \geq 0\}, \,\cdot\,)$
con $a_1 \dots a_n \cdot a'_1 \dots a'_m = a_1 \dots a_n a'_1 \dots a'_m$
(<u>monoide delle parole</u> sull'<u>alfabeto</u> A)

G, H gruppi $\rightsquigarrow G * H \overset{\text{def}}{=\!=} W(G \sqcup H)/\!\sim$ $\longleftarrow$ <u>prodotto libero</u>
con $\sim$ generata da: $g_1 g_2 \sim g$ se $g_1 \cdot g_2 = g$ in G
$h_1 h_2 \sim h$ se $h_1 \cdot h_2 = h$ in H
$e_H \sim e_G \sim \varnothing$

<u>Note</u>: 1) $G * H$ è un gruppo (non abeliano se $G, H \not\cong 0$)
2) $G, H < G * H$ $(x \mapsto [x])$, $G * H = H * G$, $G * 0 \cong G$
3) $\forall\, \varphi : G \to K\,,\ \psi : H \to K$ omomorfismi
$\exists!\, \rho : G * H \to K$ omomorfismo t.c. $\rho_{|G} = \varphi$ e $\rho_{|H} = \psi$
4) $\mathrm{Ab}(G * H) \cong \mathrm{Ab}\, G \times \mathrm{Ab}\, H$

<u>Esempi</u>: 1) $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle a \rangle * \langle b \rangle$ è infinito $(\mathbb{Z} \cong \langle ab \rangle < \langle a \rangle * \langle b \rangle)$
2) $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z} \cong \langle a_1 \rangle * \dots * \langle a_n \rangle = \{[a_{i_1}^{e_1} \dots a_{i_k}^{e_k}] \,|\, e_i \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \langle a_1 \rangle * \dots * \langle a_n \rangle \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$
<u>gruppo libero</u> generato da $a_1, \dots, a_n$

$G \cong \langle a_1, \dots, a_n \,|\, w_1, \dots, w_l \rangle \overset{\text{def}}{=\!=} \langle a_1, \dots, a_n \rangle / \langle\!\langle w_1, \dots w_l \rangle\!\rangle$
<u>presentazione</u> (finita) di G con <u>generatori</u> $a_1, \dots a_n$ e <u>relazioni</u> $w_1, \dots, w_l \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ (parole in $W(\{a_i^e\}_{i=1,\dots,n}^{e \in \mathbb{Z}})$)

<u>Note</u>: 1) $\forall\, f : \{a_1, \dots, a_n\} \to H$ applicazione con H gruppo
$\exists!\, \varphi : \langle a_1, \dots, a_n \rangle \to H$ omomorfismo t.c. $\varphi(a_i) = f(a_i)$
2) $\forall\, f : \{a_1, \dots, a_n\} \to H$ t.c. $\varphi(w_1) = \dots = \varphi(w_m) = e_H$
$\exists!\, \psi : \langle a_1, \dots, a_n | w_1, \dots, w_m \rangle \to H$ omom. t.c. $\psi(a_i) = f(a_i)$
3) $\psi : \langle a_1, \dots, a_n \,|\, w_1, \dots, w_l \rangle \to G$ iso t.c. $\psi(a_i) = g_i$
$\Rightarrow G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ ($g_1, \dots, g_n$ generatori per G)
$g_{i_1}^{e_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_k}^{e_k} = e_G \Leftrightarrow a_{i_1}^{e_1} \dots a_{i_k}^{e_k} \sim_{w_1,\dots,w_l} \varnothing$
con $\sim_{w_1,\dots,w_l}$ generata da $\sim$ e $w_1 \sim \dots \sim w_l \sim \varnothing$

4) non tutti i gruppi hanno una presentazione finita

Esempi: 1) $0 \cong \langle\ \rangle$, $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle$, $\mathbb{Z}_n \cong \langle a \,|\, a^n \rangle$

2) $\mathbb{Z}^n \cong \langle a_1, \dots, a_n \,|\, [a_i, a_j] = a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1},\ i, j = 1, \dots n \rangle$

3) $G \cong \langle a_1, \dots, a_n \,|\, w_1, \dots, w_l \rangle$, $H = \langle\!\langle v_1, \dots, v_k \rangle\!\rangle < G$

$\Rightarrow G/H \cong \langle a_1, \dots, a_n \,|\, w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_k \rangle$

$\Rightarrow \mathrm{Ab}\, G \cong \langle a_1, \dots, a_n \,|\, w_1, \dots, w_l, [a_i, a_j],\ i, j = 1, \dots, n \rangle$

4) $G \cong \langle a_1, \dots, a_n \,|\, w_1, \dots, w_l \rangle$, $H \cong \langle b_1, \dots, b_m \,|\, v_1, \dots, v_k \rangle$

$\Rightarrow G * H \cong \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \,|\, w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_k \rangle$

$\Rightarrow G \times H \cong \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \,|\, w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_k, [a_i, b_j] \rangle$

Teorema di Seifert-Van Kampen

$X = X_1 \cup X_2$ spazio topologico, $X_1, X_2 \subset X$ aperti

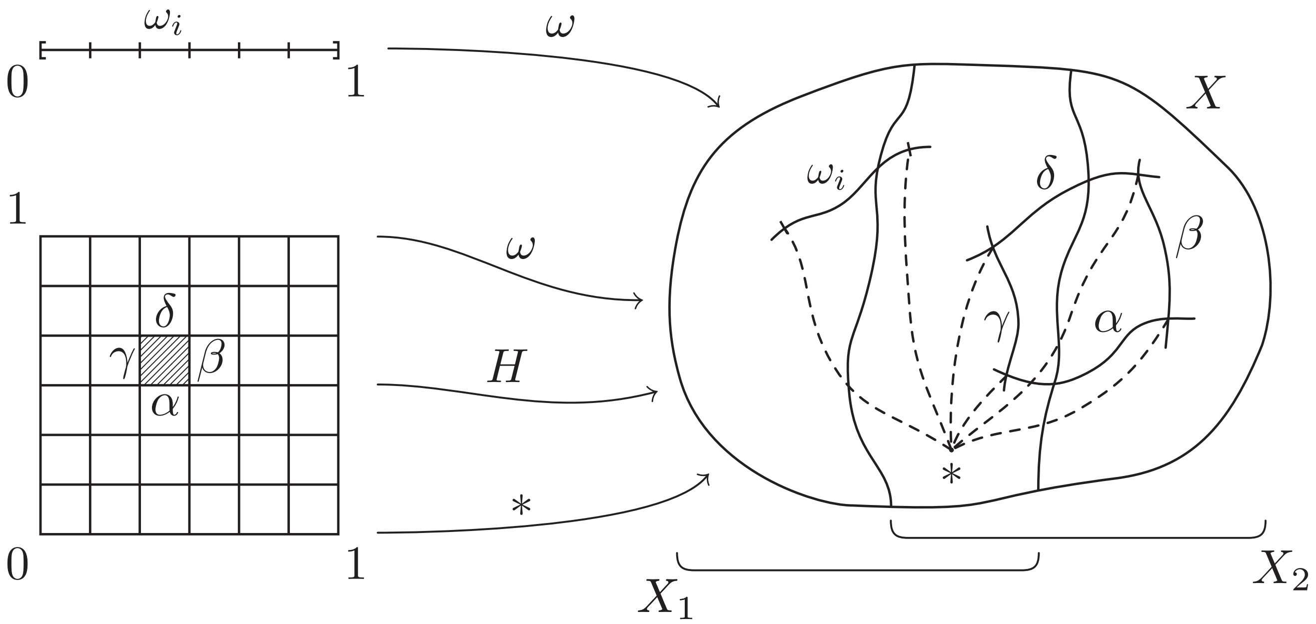
$X_1, X_2, X_0 = X_1 \cap X_2$ connessi p.a., $* \in X_0$

$\Rightarrow \pi_1(X, *) \cong \pi_1(X_1, *) * \pi_1(X_2, *) / \langle\!\langle j_{1*}(\omega) j_{2*}(\omega)^{-1},\ \omega \in \pi_1(X_0, *) \rangle\!\rangle$

dove $j_1 : X_0 \to X_1$ e $j_2 : X_0 \to X_2$ sono le inclusioni

Dim. $i_1 : X_1 \to X$ e $i_2 : X_2 \to X$ inclusioni

$\rightsquigarrow \varphi = i_{1*} * i_{2*} : \pi_1(X_1, *) * \pi_1(X_2, *) \to \pi_1(X, *)$ omomorf.



$\omega \in \pi_1(X, *) \rightsquigarrow \omega \simeq_{\{0,1\}} \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_n$ con $\omega_i \subset X_1$ o $X_2 \Rightarrow \varphi$ epi

$H : \omega \simeq_{\{0,1\}} * \rightsquigarrow$ succ. di omotopie $\alpha \cdot \beta \simeq_{\{0,1\}} \gamma \cdot \delta \subset X_1$ o X_2

e identificazioni $j_1 \circ \varepsilon = j_2 \circ \varepsilon$ con $\varepsilon \subset X_0$

$\Rightarrow \ker \varphi = \langle\!\langle j_{1*}(\omega) j_{2*}(\omega)^{-1},\ \omega \in \pi_1(X_0, *) \rangle\!\rangle$

Nota: $\pi_1(X_1,*) \cong \langle a_i \,|\, w_j\rangle$, $\pi_1(X_2,*) \cong \langle b_i \,|\, v_j\rangle$, $\pi_1(X_0,*) \cong \langle c_i \,|\, u_j\rangle$
$\Rightarrow \pi_1(X,*) \cong \langle a_i, b_i \,|\, w_j, v_j, j_{1*}(c_i) j_{2*}(c_i)^{-1}\rangle$

Corol. $X = X_1 \cup X_2$ spazio topologico, $X_1, X_2 \subset X$ aperti
$X_1, X_2, X_0 = X_1 \cap X_2$ connessi p.a., $* \in X_0$
1) $\pi_1(X_1,*) \cong 0, \pi_1(X_2,*) \cong 0 \;\Rightarrow\; \pi_1(X,*) \cong 0$
2) $\pi_1(X_0,*) \cong 0, \pi_1(X_2,*) \cong 0 \;\Rightarrow\; \pi_1(X,*) \cong \pi_1(X_1,*)$
3) $\pi_1(X_0,*) \cong 0 \;\Rightarrow\; \pi_1(X,*) \cong \pi_1(X_1,*) * \pi_1(X_2,*)$
4) $\pi_1(X_2,*) \cong 0 \;\Rightarrow\; \pi_1(X,*) \cong \pi_1(X_1,*)/\langle\!\langle j_{1*}(\pi_1(X_0,*))\rangle\!\rangle$

Esempi: 1) $X_1, \ldots, X_n$ spazi topologici conn. p.a., $*_i \in X_i$
$\rightsquigarrow X_1 \vee \ldots \vee X_n \overset{\text{def}}{=\!=} X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n / *_1 \sim \ldots \sim *_n$
unione puntata
X_i localmente sempl. conn. in $*_i$
$\Rightarrow \pi_1(X_1 \vee \ldots \vee X_n, *) \cong \pi_1(X_1,*) * \ldots * \pi_1(X_n,*)$
in particolare: $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1, *) \cong \mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}$
2) $S^m = (S^m - \{p_1\}) \cup (S^m - \{p_2\})$ con $m \geq 2$
$S^m - \{p_i\} \cong R^m$ semplicemente connesso
$(S^m - \{p_1\}) \cap (S^m - \{p_2\}) \cong R^m - \{0\}$ conn. p.a.
$\Rightarrow \pi_1(S^m, *) \cong 0$ per ogni $m \geq 2$

Nota conclusiva

Per ogni spazio topologico X connesso per archi, poniamo:

$\pi_1(X) \overset{\text{def}}{=\!=} \pi_1(X,*)$ (indipendente da $*$ a meno di iso)

$H_1(X) \overset{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Ab}\,\pi_1(X)$ (indipendente da $*$)
1° gruppo di omologia di X

$H_1(X)$ contiene meno informazioni di $\pi_1(X)$, ma esiste un algoritmo generale per la sua classificazione a partire da una presentazione finita (cf. teorema di struttura dei gruppi abeliani finitamente generati). Un analogo algoritmo non esiste nel caso non abeliano, neppure per sapere se $\pi_1(X) \cong 0$.