Premessa

$f : A \to B$ con $A \subset R^m$ e $B \subset R^n$ aperti, $\bar{x} \in A$, $h \in \mathbb{N}$

di classe C^h in $\bar{x}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\partial^k f^j / \partial x^{i_1} \dots x^{i_k}$ $\exists$ in $I \in \mathcal{I}_{\bar{x}}$ continua in $\bar{x}$
$\forall\, i_1, \dots, i_k \leq m,\ \forall\, j \leq n,\ \forall\, k = 0, \dots, h$

di classe C^h $\overset{\text{def}}{\iff}$ f è di classe C^h in $\bar{x}$ per ogni $\bar{x} \in A$

Note: 1) f di classe C^0 in $\bar{x} \Leftrightarrow f$ continua in $\bar{x}$

2) f di classe C^1 in $\bar{x}$ $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ $\exists$ differenziale di f in $\bar{x}$, cioè
$\exists\, d_{\bar{x}} f : R^m \to R^n$ lineare, $\varepsilon : A \to R^n$, $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \varepsilon(x)/\|x - \bar{x}\| = 0$
t.c. $f(x) - f(\bar{x}) = d_{\bar{x}} f(x - \bar{x}) + \varepsilon(x)$
$= J_{\bar{x}} f \cdot (x - \bar{x}) + \varepsilon(x)\ \forall\, x \in A$

$$J_{\bar{x}} f = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$ matrice jacobiana di f in $\bar{x}$

f differenziabile (in $\bar{x}$) $\overset{\text{def}}{\iff}$ f di classe C^h (in $\bar{x}$) $\forall\, h \in \mathbb{N}$

f diffeomorfismo $\overset{\text{def}}{\iff}$ f invertibile, f e f^{-1} differenziabili

Note: 1) f differenziabile (C^∞) $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ $\exists$ differenziale $d_{\bar{x}} f$ $\forall\, \bar{x} \in A$

2) f differenziabile (diffeomorfismo) $\Rightarrow$ f cont. (omeo)

3) $f : A \to B$, $g : B \to C$ diff. (diffeo) $\Rightarrow$ $g \circ f$ diff. (diffeo)

Regola della catena

$f : A \to B$, $g : B \to C$ diff. con $A \subset R^m$, $B \subset R^n$, $C \subset R^\ell$ aperti
$\Rightarrow d_{\bar{x}}(g \circ f) = d_{f(\bar{x})} g \circ d_{\bar{x}} f$ e $J_{\bar{x}}(g \circ f) = J_{f(\bar{x})} g \cdot J_{\bar{x}} f\ \ \forall\, \bar{x} \in A$

Nota: f diffeo $\Rightarrow J_{\bar{x}} f$ invertibile $\forall\, \bar{x} \in A$ $((J_{\bar{x}} f)^{-1} = J_{f(\bar{x})}(f^{-1}))$
$\Rightarrow m = n$ (invarianza della dimensione diff.)

Teorema della funzione inversa

$f : A \to B$ diff. con $A, B \subset R^m$ aperti, $d_{\bar{x}} f$ iso ($J_{\bar{x}} f$ invert.) $\bar{x} \in A$
$\Rightarrow \exists\, A' \subset A$ int. ap. di $\bar{x}$ t.c. $f_{|A'} : A' \to B'$ diffeo con $B' \subset B$ ap.

Teorema di Sard

$f : A \to B$ diff. con $A \subset R^m$, $B \subset R^n$ aperti
$\Rightarrow C(f) = \{f(x) \mid x \in A,\, \mathrm{rg}\, J_x f < n\} \subset B$ ha misura nulla in R^n

Nota: in particolare, $m < n \Rightarrow f(A) \subset B$ ha misura nulla in R^n

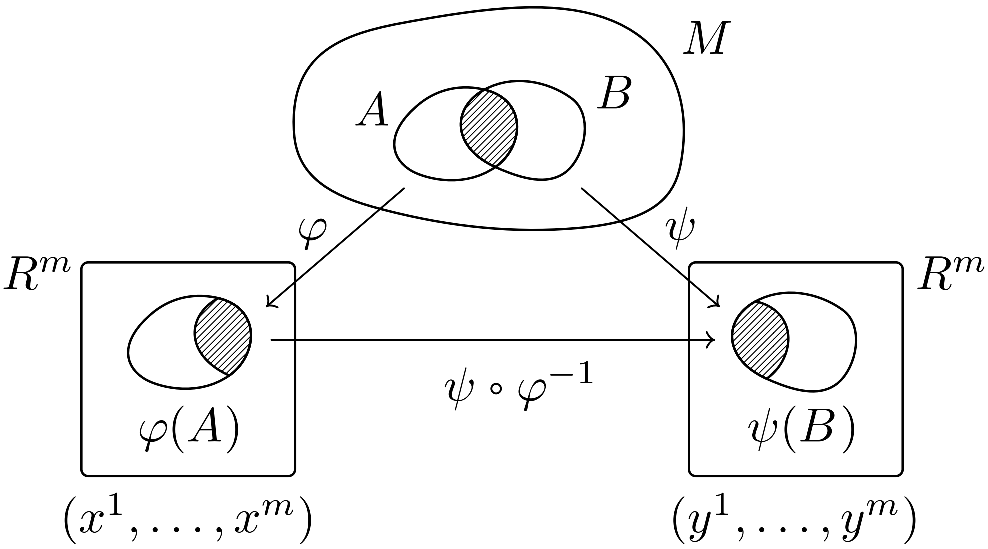
Varietà differenziabili

M varietà topologica di dim m

(A,φ) e (B,ψ) carte locali <u>differenziabilmente compatibili</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(A\cap B)\to\psi(A\cap B)$ diffeo tra aperti di R^m

↖ <u>combiamento di coordinate (o di carta)</u>



$\mathcal{A}$ <u>atlante differenziabile</u> $\overset{\text{def}}{=\!=}$ atlante con carte diff. compatibili

$\mathcal{S}$ <u>struttura differenziabile</u> $\overset{\text{def}}{=\!=}$ atlante differenziabile massimale

<u>Prop</u>. $\forall\,\mathcal{A}$ atlante diff. $\exists!\,\mathcal{S}(\mathcal{A})$ struttura diff. t.c. $\mathcal{A}\subset\mathcal{S}(\mathcal{A})$

<u>Dim</u>. $\mathcal{S}(\mathcal{A})=\{$carte locali di M diff. comp. con ogni carta di $\mathcal{A}\}$

<u>varietà differenziabile</u> $\overset{\text{def}}{=\!=}$ $(M,\mathcal{S})=(M,\mathcal{S}_M)=M_{\mathcal{S}}=M$

↖ struttura diff. su M varietà top.

<u>Esempi</u>: 1) $R^m=(R^m,\mathcal{S}(\{\mathrm{id}_{R^m}\}))$

2) $S^m=(S^m,\mathcal{S}(\{$carte strereografiche$\}))$

3) $T^m=(T^m,\mathcal{S}(\{$inverse locali di $\pi:R^m\to T^m\}))$

4) $P^m=(P^m,\mathcal{S}(\{$carte affini$\}))$

<u>Note</u>: 1) $(M,\mathcal{S})$ m-varietà differenziabile, $N\subset M$ aperto

$\rightsquigarrow(N,\mathcal{S}_{|N}=\mathcal{S}(\mathcal{A}_{|N}))$ m-varietà differenziabile

2) $(M_i,\mathcal{S}_i)$ m-varietà differenziabile

$\rightsquigarrow(M_1\sqcup\ldots\sqcup M_n,\mathcal{S}(\mathcal{A}_1\sqcup\ldots\sqcup\mathcal{A}_n))$ m-varietà diff.

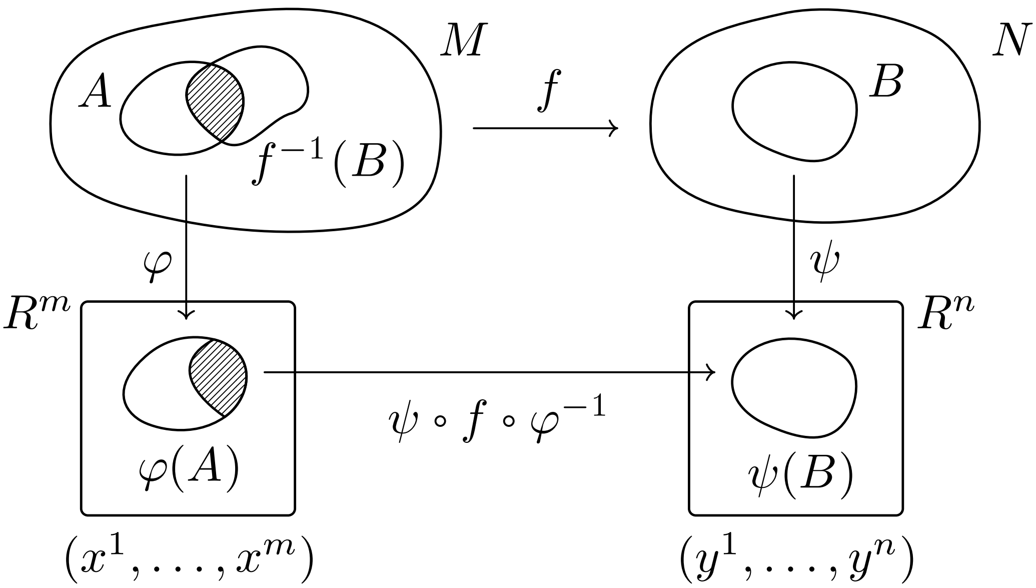
3) $(M_i,\mathcal{S}_i)$ m_i-varietà differenziabile

$\rightsquigarrow(M_1\times\ldots\times M_n,\mathcal{S}(\mathcal{A}_1\times\ldots\times\mathcal{A}_n))$ $\Sigma_i m_i$-varietà diff.

$f : M \to N$ continua, con $M = (M, \mathcal{S}_M)$ e $N = (N, \mathcal{S}_N)$ var. diff.
differenziabile in $p \in M$
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenziabile in $\varphi(p)$
$\quad \forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{S}_M \ \forall\, (B, \psi) \in \mathcal{S}_N$ con $p \in A$ e $f(p) \in B$
$\iff \exists\, (A, \varphi) \in \mathcal{S}_M \ \exists\, (B, \psi) \in \mathcal{S}_N$ t.c. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ diff. in $\varphi(p)$

differenziabile $\overset{\text{def}}{\iff}$ differenziabile in p per ogni $p \in M$
$\iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ diff. $\forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{S}_M \ \forall\, (B, \psi) \in \mathcal{S}_N$
$\iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ diff. $\forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{A}_M \ \forall\, (B, \psi) \in \mathcal{A}_N$

diffeomorfismo $\overset{\text{def}}{\iff}$ f invertibile, f e f^{-1} differenziabili



Note: 1) $f : M \to N$, $g : N \to L$ diff. (diffeo) $\Rightarrow g \circ f$ diff. (diffeo)
2) $\mathrm{Diffeo}\, M = \{f : M \to M \text{ diffeo}\} \subset \mathrm{Omeo}\, M$

$f : M \to N$ diff. in $p \rightsquigarrow \mathrm{rg}_p f \overset{\text{def}}{=} \mathrm{rg}\ d_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ rango di f in p
f regolare in $p \in M$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathrm{rg}_p f = \min\{m, n\}$ (rango massimo)
f regolare $\overset{\text{def}}{\iff}$ regolare in p per ogni $p \in M$

Note: 1) $f : M \to N$, $g : N \to L$ reg. (in p e $f(p)$) $\not\Rightarrow g \circ f$ reg. (in p)
(comunque l'implicazione vale se $m \le n \le l$ o $m \ge n \ge l$)
2) se $m = n$: f differenziabile regolare $\Leftrightarrow f$ diffeo locale
3) diffeomorfismo = omeomorfismo differenziabile regolare

Note: 1) $p : M' \to M$ rivestimento numer. di $(M, \mathcal{S})$ m-varietà diff.
$\rightsquigarrow (M', \mathcal{S}(\{(p_|^{-1}(A), \varphi \circ p) \mid (A, \varphi) \in \mathcal{A}\}))$ m-varietà diff.

2) $G \subset \operatorname{Diffeo} M$ prop. discont. su $(M, \mathcal{S})$ m-varietà diff.
$\rightsquigarrow (M/G, \mathcal{S}(\{(B, \varphi \circ (\pi_|)^{-1} \mid (A, \varphi) \in \mathcal{S}\}))$ m-varietà diff.

Note: 1) ogni varietà top. di dim $m \leq 3$ ammette una strutt. diff., ma esistono varietà top. che non ammettono strutt. diff.
2) se una varietà top. ammette una strutt. diff., allora ne ammette infinite distinte (eventualmente diffeo equiv.)
3) R^m ha un'unica struttura diff. (a meno di diffeo) $\forall\, m \neq 4$, R^4 ha infinite strutture diff. (esotiche) non diffeomorfe

Varietà orientabili

$f : A \to B$ applicazione diff. regolare con $A, B \subset R^m$ aperti
conserva/inverte l'orientazione in $\bar{x}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\det J_{\bar{x}} f > 0 \,/\, \det J_{\bar{x}} f < 0$
conserva/inverte l'orientazione $\overset{\text{def}}{\iff}$ lo stesso vale in ogni $x \in A$

Note: 1) le composizioni conserv./invert. con la regola dei segni
2) A connesso, f conserva/inverte l'orientazione in $\bar{x} \in A$
$\Rightarrow f$ conserva/inverte l'orientazione (in tutto A)

Esempi: 1) $\mathrm{id} : R^m \to R^m$ conserva l'orientazione
2) $\iota : R^m \to R^m$ def. $\iota(x^1, x^2, \ldots, x^m) = (-x^1, x^2, \ldots, x^m)$ inverte l'orientazione
3) $\alpha : R^m \to R^m$ definita $\alpha(x) = -x$
conserva/inverte l'orientazione se m pari/dispari

$M = (M, \mathcal{S})$ varietà differenziabile
$\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ atlante orientato $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\psi \circ \varphi^{-1}$ cons. l'orient. $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{A}$
$\mathcal{O} \subset \mathcal{S}$ orientazione $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{O}$ atlante orientato massimale

Prop. $\forall\, \mathcal{A}$ atlante orient. $\exists!\, \mathcal{O}(\mathcal{A})$ orientazione t.c. $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$
Dim. $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \{(B, \psi) \in \mathcal{S}$ t.c. $\psi \circ \varphi^{-1}$ cons. l'orient. $\forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{A}\}$

$M = (M, \mathcal{S})$ varietà differenziabile orientabile
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, \mathcal{O}$ orientazione su M ($\Leftrightarrow \exists$ atlante orientato su M)

Prop. M varietà differenziabile orientabile connessa
$\Rightarrow M$ ammette (solo) due orientazioni opposte

Dim. $\mathcal{O}$ orient. su $M \rightsquigarrow -\mathcal{O} = \{(A, \iota \circ \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathcal{O}\}$ orient. su M

$\mathcal{O}$ e $-\mathcal{O}$ sono distinte (orientazioni opposte)

$\mathcal{Q}$ orientazione su $M \rightsquigarrow$

$S_\pm = \{p \in M \mid \exists\, (A, \varphi) \in \mathcal{O}, (B, \psi) \in \mathcal{Q} \ \det J_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \gtrless 0\}$

$\rightsquigarrow M = S_+ \cup S_-$ partizione aperta di $M \Rightarrow \mathcal{Q} = \mathcal{O}\,, -\mathcal{O}$

Nota: M varietà orientabile con n comp. $\Rightarrow M$ ha 2^n orientazioni

varietà (diff.) orientata $\overset{\text{def}}{=\!=}$ $(M, \mathcal{O}) = (M, \mathcal{O}_M) = M_{\mathcal{O}} = M$

orientazione su M varietà diff.

Esempi: 1) $R^m = (R^m, \mathcal{O}(\{\mathrm{id}_{R^m}\}))$

2) $S^m = (S^m, (-1)^{m+1}\mathcal{O}(\{(A_1, \varphi_1), (A_2, \iota \circ \varphi_2)\}))$

3) $T^m = (T^m, \mathcal{O}(\{\text{inverse locali di } \pi : R^m \to T^m\}))$

Note: 1) $(M, \mathcal{O})$ m-varietà orientata, $N \subset M$ aperto

$\rightsquigarrow (N, \mathcal{O}_{|N} = \mathcal{O}(\mathcal{A}_{|N}))$ m-varietà orientata

2) $(M_i, \mathcal{O}_i)$ m-varietà orientate

$\rightsquigarrow (M_1 \sqcup \ldots \sqcup M_n, \mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{A}_n))$ m-varietà orientata

3) $(M_i, \mathcal{O}_i)$ m_i-varietà orientate

$\rightsquigarrow (M_1 \times \ldots \times M_n, \mathcal{O}(\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n))$ $\Sigma_i m_i$-var. orientata

$f : M \to N$ applicazione differenziabile regolare

con $M = (M, \mathcal{O}_M)$ e $N = (N, \mathcal{O}_N)$ m-varietà orientate

conserva/inverte l'orientazione in $p \in M$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ conserva/inverte l'orientazione in $\varphi(p)$

$\forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{O}_M\ \forall\, (B, \psi) \in \mathcal{O}_N$ con $p \in A$ e $f(p) \in B$

$\iff \exists\, (A, \varphi) \in \mathcal{O}_M\ \exists\, (B, \psi) \in \mathcal{O}_N$ t.c. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ cons./inv. in $\varphi(p)$

conserva/inverte l'orientazione

$\overset{\text{def}}{\iff}$ cons./inv. l'orient. in p per ogni $p \in M$

$\iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ cons./inv. l'orient. $\forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{O}_M\ \forall\, (B, \psi) \in \mathcal{O}_N$

$\iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ cons./inv. l'orient. $\forall\, (A, \varphi) \in \mathcal{A}_M\ \forall\, (B, \psi) \in \mathcal{A}_N$

Note: 1) $\mathrm{Diffeo}^+ M = \{f \in \mathrm{Diffeo}\, M \mid f \text{ cons. l'orient.}\} \subset \mathrm{Diffeo}\, M$

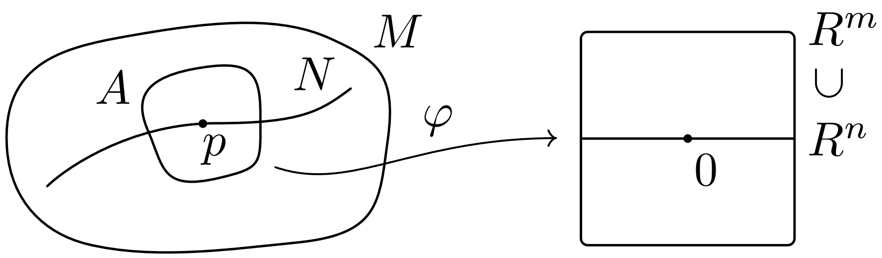
2) M varietà connessa, $f : M \to N$ regolare

f cons./inv. l'orient. in $\bar{p} \in M \Rightarrow f$ cons./inv. l'orient.

<u>Esempi</u>: 1) $\alpha : S^m \to S^m$ cons./inv. l'orient. $\Leftrightarrow$ m dispari/pari
$(\varphi_2 \circ \alpha_{S^m} = \alpha_{R^m} \circ \varphi_1 \Rightarrow (\iota \circ \varphi_2) \circ \alpha_{S^m} \circ \varphi_1^{-1} = \iota \circ \alpha_{R^m})$
2) P^m orientabile $\Leftrightarrow$ m dispari
(m dispari: $\alpha \in \mathrm{Diffeo}^+ S^m \Rightarrow P^m \cong S^m/\langle\alpha\rangle$ orient.
m pari: $\mathcal{O}$ orient. su $P^m \Rightarrow \pi$ cons. e inv. l'orient.)
3) T_g orientabile $\forall\, g \geq 0$, P_g non orientabile $\forall\, g \geq 1$
($M_1 \# M_2$ orientabile $\Leftrightarrow$ M_1, M_2 orientabili)

<u>Sottovarietà differenziabili</u>

$M = (M, \mathcal{S})$ m-varietà diff., $N \subset M$ <u>n-sottovarietà differenziabile</u>
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, p \in N\ \exists\, (A, \varphi) \in \mathcal{S}$ t.c. $p \in A$ e $\varphi(A \cap N) = \varphi(A) \cap R^n$



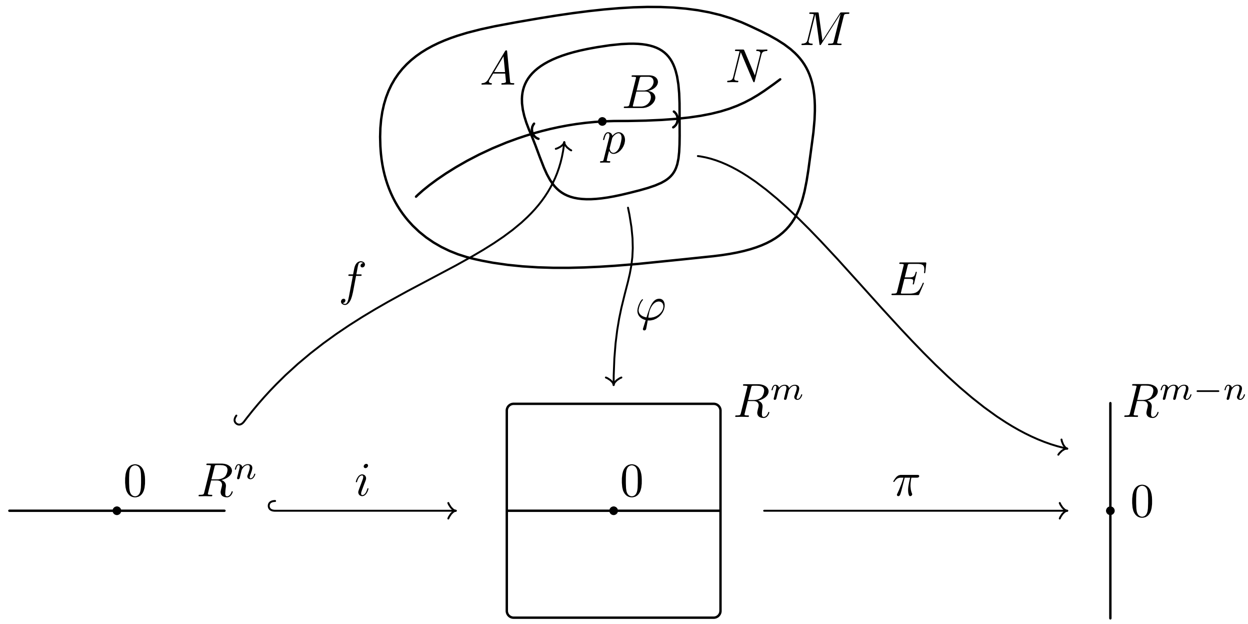
<u>carta (speciale) adattata</u> ad N

<u>Note</u>: 1) $N \subset M$ n-sottovarietà diff. $\Rightarrow$ N n-varietà differenziabile
$(\mathcal{S}_{|N} = \{(A \cap N, \varphi_| : A \cap N \to R^n) \mid (A, \varphi) \in \mathcal{S} \text{ adattata}\})$
$i : (N, \mathcal{S}_{|N}) \hookrightarrow (M, \mathcal{S})$ immersione differenziabile regolare
2) $f : M \to M'$ diff. (reg. e $m \leq m'$) $\Rightarrow$ $f_| : N \to M'$ diff. (reg.)
3) $f : M \to M'$ t.c. $f(M) \subset N'$ con $N' \subset M'$ sottovar. diff.
f diff. $\Leftrightarrow$ $f_| : M \to N'$ diff. (e in tal caso $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f_|$)

<u>Note</u>: 1) $(M, \mathcal{S})$ var. diff., $N \subset M$ ap. $\Rightarrow$ N m-sottovar. diff. di M
2) $(M_i, \mathcal{S}_i)$ m-varietà diff., $N_i \subset M_i$ n_i-sottovar. diff.
$\Rightarrow N_1 \times \ldots \times N_n \subset M_1 \times \ldots \times M_n$ Σn_i-sottovar. diff.

<u>Prop</u>. M varietà differenziabile, per $N \subset M$ sono equivalenti:
1) N è una n-sottovarietà differenziabile di M
2) $\forall\, p \in N\ \exists\, A \subset M$ int. ap. di p $\exists\, E : A \to R^{m-n}$ diff. reg.,
t.c. $N \cap A = E^{-1}(0)$ ($E(x) = 0$ <u>equazione locale regolare</u>)
3) $\forall\, p \in N\ \exists\, B \subset N$ int. ap. di p $\exists\, f : D \to M$ imm. diff. reg.
con $D \subset R^n$, t.c. $f(D) = B$ ($x = f(t)$ <u>param. locale reg.</u>)

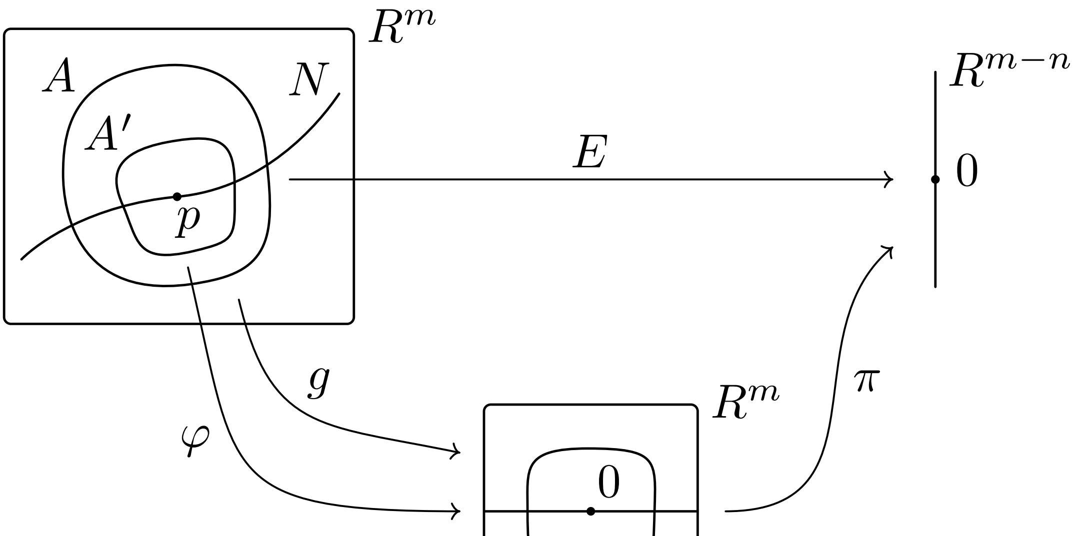
<u>Dim</u>. 1) $\Rightarrow$ 2) e 3)



$$(x^1, \dots, x^n) \longmapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$
$$(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) \mapsto (x^{n+1}, \dots, x^m)$$

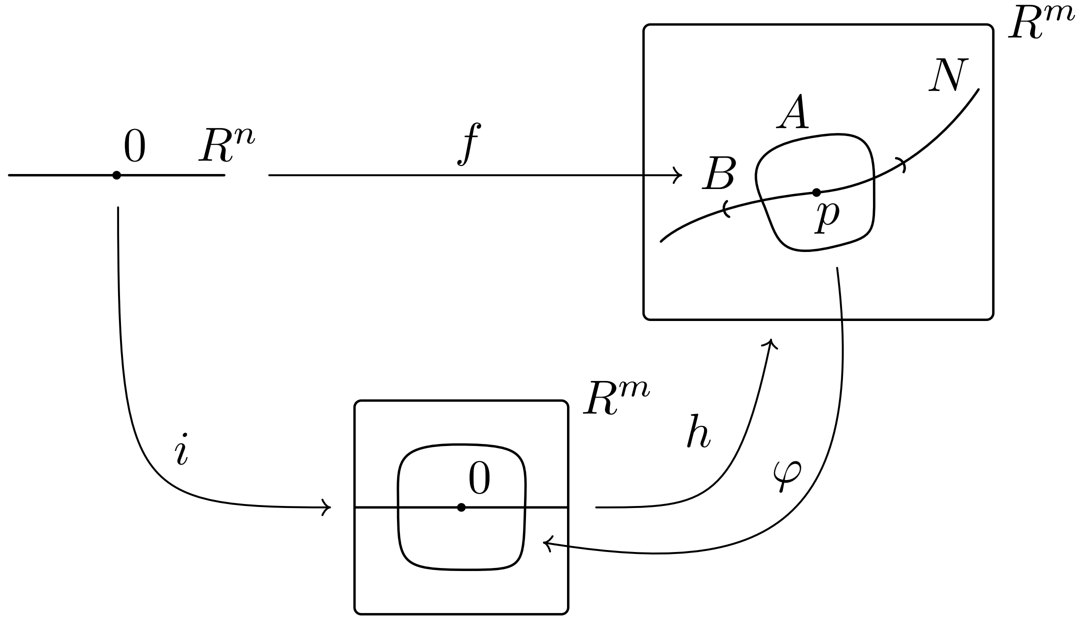
$$f = \varphi^{-1} \circ i \rightsquigarrow x^1 = t^1, \dots, x^n = t^n, x^{n+1} = 0, \dots, x^m = 0$$
$$E = \pi \circ \varphi \rightsquigarrow B = \{p \in A \mid x^{n+1}(p) = 0, \dots, x^m(p) = 0\}$$

2) $\Rightarrow$ 1) basta considerare il caso $M = R^m$



$$\mathrm{rg}_p\, E = m - n \rightsquigarrow J_pE = (P_{m-n,n} \,|\, Q_{m-n,m-n}) \text{ con } \det Q \neq 0$$
$$\rightsquigarrow g : A \to R^m,\ g(x) = (x^1, \dots, x^n, E(x^1, \dots, x^m))$$
$$J_pg = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline P & Q \end{array}\right) \text{ invertibile} \rightsquigarrow \varphi = g_{|A'} : A' \to \varphi(A') \text{ diffeo}$$

3) $\Rightarrow$ 1) basta considerare il caso $M = R^m$
si può assumere $p = f(0)$ e $D = R^n$



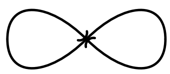
$$\mathrm{rg}_0\, f = n \rightsquigarrow J_0 f = \left(\frac{Q_{n,n}}{P_{m-n,n}}\right) \text{ con } \det Q \neq 0$$

$$\rightsquigarrow h : R^m \to R^m,\ h(x) = f(x^1, \ldots, x^n) + (0, \ldots, 0, x^{n+1}, \ldots, x^m)$$

$$J_0 h = \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline P & I_{m-n} \end{array}\right) \text{ invertibile} \rightsquigarrow \varphi = h_{|}^{-1} : A \to \varphi(A) \text{ diffeo}$$

<u>Prop</u>. 1) $f : M \to N$ appl. diff., $m \geq n$, $q \in N$ <u>valore regolare</u>
(cioè f regolare in p per ogni $p \in M$ t.c. $f(p) = q$)
$\Rightarrow L = f^{-1}(q)$ $(m-n)$-sottovarietà diff. di M
2) $f : M \to N$ immersione diff. regolare, $m \leq n$
$\Rightarrow L = f(M)$ m-sottovarietà diff. di N

<u>Dim</u>. 1) (B, ψ) carta locale di N intorno a q, $\psi(q) = 0$
$\rightsquigarrow \psi \circ f$ equaz. loc. reg. per L intorno a p per ogni $p \in L$
2) (A, φ) carta locale di M intorno a $p \in M$ t.c. $f_{|A}$ regolare
$\rightsquigarrow f \circ \varphi^{-1}$ param. loc. reg. di L intorno a $q = f(p)$

<u>Nota</u>: $f : M \to N$ applicazione diff. regolare con $m \leq n$
$\begin{cases} \Rightarrow f \text{ immersione locale} \\ \not\Rightarrow f \text{ immersione } (\pi : R \to S^1, \end{cases}$  $\subset R^2)$

<u>Esempi</u>: 1) $S^m \subset R^{m+1}$ ($E(x) = \|x\|^2 = 0$ equazione regolare)

2) $T^m \subset R^{2m}$ (prodotto di sottovarietà diff.)

3) <u>curve diff. reg. in R^2</u> ($\stackrel{\text{def}}{=}$ 1-sottovarietà diff. di R^2)

$C = \{(x, y) \in A \mid E(x, y) = 0\}$ con $A \subset R^2$ aperto,

$E : A \to R$ diff. t.c. $\nabla E = \left(\dfrac{\partial E}{\partial x} \;\; \dfrac{\partial E}{\partial y} \right) \neq 0$ in C

<u>gradiente</u> di E (normale a C)

$C = \alpha(I)$ con $I \subset R$ aperto (oppure $I = S^1$)

$\alpha : I \to R^2$ imm. diff. t.c. $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq 0 \;\; \forall\, t$

<u>velocità</u> di α (tangente a C)

4) <u>superfici diff. reg. in R^3</u> ($\stackrel{\text{def}}{=}$ 2-sottovar. diff. di R^3)

$S = \{(x, y, z) \in A \mid E(x, y, z) = 0\}$ con $A \subset R^3$ aperto,

$E : A \to R$ diff. t.c. $\nabla E = \left(\dfrac{\partial E}{\partial x} \;\; \dfrac{\partial E}{\partial y} \;\; \dfrac{\partial E}{\partial z} \right) \neq 0$ in S

<u>gradiente</u> di E (normale a S)

$S = \omega(D)$ con $D \subset R^2$ aperto (oppure $D =$ sup. diff.)

$\omega : D \to R^3$ imm. diff. t.c. $\operatorname{rg} J_{(t^1,t^2)}\omega = 2 \;\; \forall\, (t^1, t^2)$

cioè $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t^1} & \dfrac{\partial x}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t^1} & \dfrac{\partial y}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t^1} & \dfrac{\partial z}{\partial t^2} \end{pmatrix} = 2 \quad (\Leftrightarrow \dfrac{\partial \omega}{\partial t^1} \times \dfrac{\partial \omega}{\partial t^2} \neq 0) \;\; \forall\, (t^1, t^2)$

normale a S

5) <u>curve diff. reg. in R^3</u> ($\stackrel{\text{def}}{=}$ 1-sottovarietà diff. di R^3)

$C = \{(x, y, z) \in A \mid E(x, y, z) = 0\,,\; F(x, y, z) = 0\}$

con $A \subset R^3$ aperto, $E, F : A \to R$ diff. t.c.

$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial x} & \dfrac{\partial E}{\partial y} & \dfrac{\partial E}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = 2 \quad (\Leftrightarrow \nabla E \times \nabla F \neq 0)$ in C

tangente a C

$$C = \alpha(I) \text{ con } I \subset R \text{ aperto (oppure } I = S^1)$$
$$\alpha : I \to R^3 \text{ imm. diff. t.c. } \alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq 0$$

velocità di α (tangente a C)

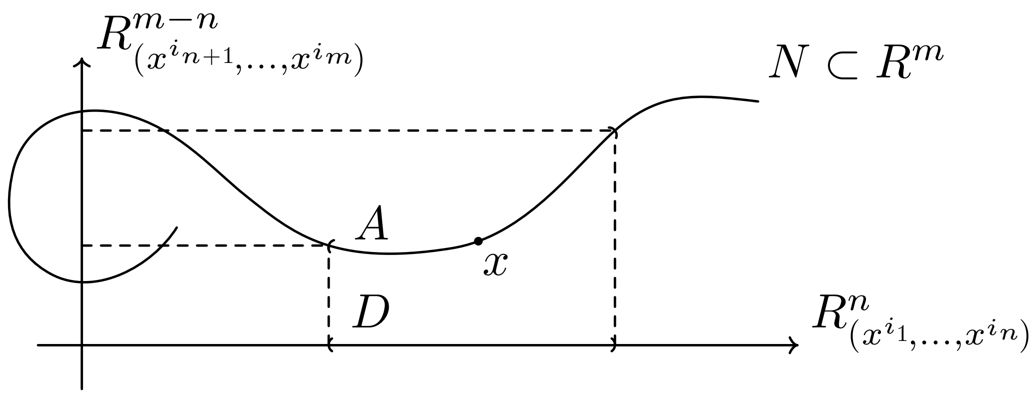
Nota: curve diff. in R^3 = inters. di sup. diff. trasversali in R^3

Prop. $N \subset R^m$ n-sottovarietà differenziabile

$\Leftrightarrow \forall\, x \in N \;\; \exists\, A \subset N$ intorno aperto di x

$\exists\, D \subset R^n_{(x^{i_1},\dots,x^{i_n})}$ aperto, $\exists\, g : D \to R^{m-n}_{(x^{i_{n+1}},\dots,x^{i_m})}$ appl. diff.

t.c. $A = \mathrm{Gr}(g) = \{x \in R^m \mid (x^{i_{n+1}}, \dots, x^{i_m}) = g(x^{i_1}, \dots, x^{i_n})\}$



Dim. $\begin{cases} x^1 = f^1(t^1, \dots, t^n) \\ \vdots \\ x^m = f^m(t^1, \dots, t^n) \end{cases}$ parametrizzazione locale regolare con $\det\left(\dfrac{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}{\partial t^1 \dots \partial t^n}\right) \neq 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} t^1 = h^1(x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \\ \vdots \\ t^n = h^n(x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \\ x^{i_{n+1}} = f^{i_{n+1}}(h^1(-), \dots, h^n(-)) = g^1(x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \\ \vdots \\ x^{i_m} = f^{i_m}(h^1(-), \dots, h^n(-)) = g^{m-n}(x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} E^1(x^1, \dots, x^m) = x^{i_{n+1}} - g^1(x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \\ \vdots \\ E^{m-n}(x^1, \dots, x^m) = x^{i_m} - g^{m-n}(x^{i_1}, \dots, x^{i_n}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^1(x^1,\dots,x^m)=0 \\ \vdots \\ E^{m-n}(x^1,\dots,x^m)=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l}\text{equazione locale regolare} \\ \text{con } \det\left(\dfrac{\partial E^1 \dots \partial E^{m-n}}{\partial x^{i_{n+1}} \dots \partial x^{i_m}}\right) \neq 0\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x^{i_{n+1}} = g^1(x^{i_1},\dots,x^{i_n}) \\ \vdots \\ x^{i_m} = g^{m-n}(x^{i_1},\dots,x^{i_n}) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x^{i_1} = f^{i_1}(t^1,\dots,t^n) = t^1 \\ \vdots \\ x^{i_n} = f^{i_n}(t^1,\dots,t^n) = t^n \\ x^{i_{n+1}} = f^{i_{n+1}}(t^1,\dots,t^n) = g^1(t^1,\dots,t^n) \\ \vdots \\ x^{i_m} = f^{i_m}(t^1,\dots,t^n) = g^{m-n}(t^1,\dots,t^n) \end{cases}$$

Esempi: 1) $C = \{(x,y)\in R^2 \mid x^2-y^3=0\} = \{(t^3,t^2)\mid t\in R\}$
non è una curva differenziabile regolare in R^2
2) $C = \{(x,y)\in R^2 \mid x^3-y^3=0\} = \{(t^3,t^3)\mid t\in R\}$
è una curva differenziabile regolare in R^2

Partizioni dell'unità differenziabili

Prop. M varietà diff., $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di M
$\Rightarrow \exists\, \Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ partizione dell'unità diff. subord. ad $\mathcal{A}$
(cioè t.c. $\lambda_n : M \to R$ funzione diff. per ogni $n \geq 1$)

Dim. si può assumere $\mathcal{A} = \{(A_n,\varphi_n)\}_{n\geq 1}$ atlante speciale
t.c. $\mathcal{B} = \{B_n = \varphi_n^{-1}(B(0,1))\}$ ricoprimento di M

$\alpha : R \to R$ definita $\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t>0 \\ 0 & t\leq 0\end{cases}$

$\rightsquigarrow \beta : R\to R$ definita $\beta(t) = \alpha(t-1)$
$\gamma : R \to R$ definita $\gamma(t) = \alpha(2-t)$

$\rightsquigarrow \delta : R \to R$ definita $\delta(t) = \gamma(t)/(\beta(t)+\gamma(t))$

$\rightsquigarrow \eta : R^m \to R$ definita $\eta(x) = \delta(\|x\|)$

$\rightsquigarrow \eta_n : M \to R$ definita $\eta_n(p) = \begin{cases} \eta(\varphi_n(p)) & p \in A_n \\ 0 & p \notin A_n \end{cases}$

$\rightsquigarrow \lambda_1(p) = \eta_1(p)\,,\ \lambda_n(p) = \eta_n(p)(1 - \Sigma_{i<n}\lambda_i(p))$

Teorema di approssimazione differenziabile

$f : M \to N$ applicazione continua tra varietà diff.

$C \subset M$ chiuso, $\varepsilon : M \to]0, +\infty[$ continua

$\Rightarrow \exists\, g : M \to N$ applicazione continua

t.c. 1) $g_{|C} = f_{|C}$ e $g_{|M-C}$ differenziabile,

2) $d(g(p), f(p)) < \varepsilon(p)\ \forall\, p \in M$ (g ε-appross. di f)

3) $g \simeq_\varepsilon f$ ($\exists\, H : g \simeq f$ ε-omotopia cioè tale che

$d(h_t(p), f(p)) < \varepsilon(p)\ \forall\, t \in [0,1]\,, \forall\, p \in M$)

Inoltre, f diff. in (ogni punto di) $C \Rightarrow$ esiste tale g diff. (in M)

Dim. basta considerare il caso $C = \varnothing$ e $N = R^n$

($M' = M - C$, $\varepsilon'(p) = \min(\varepsilon(p), e^{-1/d(p,C)})$,

$\mathcal{B} = \{(B_k, \psi_k)\}_{k\geq 1}$ atlante speciale localmente finito di N

$\rightsquigarrow g_k : M \to N$ continua diff. in $g_k^{-1}(B_1 \cup \ldots \cup B_k)$

tale che $g_0 = f$ e $g_k \simeq_{\varepsilon/2^k} g_{k-1}\ \forall\, k \geq 1$,

induz. su k con $M' = g_{k-1}^{-1}(B_k)$, $f' = \psi_k \circ g_{k-1}$, $N' = R^n$,

$\varepsilon'(p)$ tale che $d(\psi_k(p), \psi_k(q)) < \varepsilon'(p) \Rightarrow d(p,q) < \varepsilon(p)/2^k$

$\rightsquigarrow g = \lim_k g_k : M \to N$)

$\mathcal{A} = \{A_k\}$ ricoprim. ap. di M t.c. $\operatorname{diam} f(A_k) < \inf_{p\in A_k} \varepsilon(p)$

$\rightsquigarrow \Lambda = \{\lambda_k\}$ partizione dell'unità diff. subordinata ad $\mathcal{A}$

$\rightsquigarrow g(p) = \Sigma_{k\geq 1}\lambda_k(p) f(p_k)$ con $p_k \in A_k$

Nota: per dim. $m \leq 3$ ogni omeo si può approssimare con diffeo

$\rightsquigarrow$ ogni m-varietà con $m \leq 3$ ha un'unica struttura diff.

a meno di diffeo (classif. diff. = classif. top.)

Teorema di immersione differenziabile

M m-varietà diff. compatta (vale per ogni varietà diff.)

$\Rightarrow \exists\, M \hookrightarrow R^n$ immersione diff. regolare con $n \geq m$

(M diffeomorfa a $i(M) \subset R^n$ m-sottovarietà diff.)

Dim. $\mu : R^m \to R,\ \mu(x) = 1 - \eta(x)$
$\rho : R^m \to R^m,\ \rho(x) = \mu(x) \cdot x$
$\sigma : S^m \to S^m,\ \sigma(p_2) = p_2$ e $\sigma(p) = \varphi_2^{-1}(\rho(\varphi_2(p)))\ \forall\, p \neq p_2$
$\Rightarrow \sigma$ differenziabile, $\sigma(S^m_+) = p_1$, σ regolare in $S^m - S^m_+$
(A, φ) carta differenziabile speciale di M
$\rightsquigarrow \widetilde{\varphi} : M \to S^m \cong \widehat{R}^m$ diff. t.c. $\widetilde{\varphi}_{|A} = \sigma \circ \varphi$, $\widetilde{\varphi}(M - A) = \infty$
$\widetilde{\varphi}$ regolare in $B = \varphi^{-1}(B(0,1)) \subset M$
$\mathcal{A} = \{(A_1, \varphi_1), \ldots, (A_k, \varphi_k)\}$ atlante speciale
t.c. $\mathcal{B} = \{B_i = \varphi_i^{-1}(B(0,1))\}_{i=1,\ldots,k}$ ricopr. ap. di M
$\rightsquigarrow \widetilde{\varphi}_1 \times \ldots \times \widetilde{\varphi}_k : M \to S^m \times \ldots \times S^m \subset R^{(m+1)k}$
immersione differenziabile regolare

Nota: si può ridurre $n = (k+1)m$ fino a $2m+1$, proiettando opportunamente $M \subset R^n$ in $R^{2m+1} \subset R^n$, e poi fino a $2m$ con tecniche più sofisticate (teorema di Whitney)

Teorema dell'intorno tubolare

M m-varietà diff., $N \subset M$ n-sottovarietà diff. chiusa
$\Rightarrow \exists\, T \subset M$ intorno aperto di N, $\exists\, r : T \to N$ retrazione diff.
t.c. $\forall\, p \in N\ \exists\ (T_A, \varphi_A)$ carta diff. di M adattata a N
con $A \subset N$ intorno aperto di p, $T_A = r^{-1}(A) \subset M$
$\varphi_A(T_A) = \varphi_A(A) \times R^{m-n}$ e $\varphi_A \circ r_{|T_A} = \pi \circ \varphi_A$

Dim. Caso speciale: $M = R^m$
$p \in N \rightsquigarrow B_p \subset T_pN^\perp$ intorno aperto di p tale che
$\forall\, x \in B_p\ \exists!\, p_x \in N$ con $d(x, p_x)$ minima
(N è localmente grafico di una funz. diff.)
$T = \cup_{p\in N} B_p$, $r : T \to N$ retrazione diff. definita $r(x) = p_x$
$\langle x, p_x\rangle \subset T\ \forall\, x \in T \Rightarrow r^{-1}(p) \cong R^{n-m}$ (ap. stellato in $T_pN^\perp$)
Caso generale: $M \subset R^\ell$ (teorema di immersione diff.)
$p \in N \rightsquigarrow B'_p \subset T_pN^\perp \subset T_pM$ (come nel caso speciale)
$\rightsquigarrow T' \subset \cup_{p\in N} B'_p \subset T_M$ con T_M int. tub. di M in R^ℓ
$\rightsquigarrow T = r_M(T') \subset M$