<u>Coomologia di De Rham</u>

M varietà differenziabile
$\mathcal{C}^k M \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{Ker}(d\colon \mathcal{D}^k \to \mathcal{D}^{k+1}) \subset \mathcal{D}^k M$ (k-forme chiuse su M)
$\mathcal{E}^k M \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname{Im}(d\colon \mathcal{D}^{k-1} \to \mathcal{D}^k) \subset \mathcal{C}^k M$ (k-forme esatte su M)
$\mathcal{H}^k M \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{C}^k M/\mathcal{E}^k M$ <u>k-esimo spazio di coomologia</u> di M
$\mathcal{H} M \stackrel{\text{def}}{=\!=} \oplus_{k\geq 0}\mathcal{H}^k M$ <u>coomologia di De Rham</u> di M

<u>Note</u>: 1) $\mathcal{H}^0 M \cong R^{\#(\text{comp. conn. di } M)}$, $\mathcal{H}^k M \cong 0\ \forall\, k > m$
$(\mathcal{H}^0 M = \mathcal{C}^0 M = \{f : M \to R \,|\, f \text{ localmente costante}\})$
2) $\mathcal{H}^k M$ R-spazio vettoriale (e $\mathcal{H}^0 M$-modulo) $\forall\, k \geq 0$
$\mathcal{H} M$ algebra graduata anticomm. $([\lambda]\wedge[\mu] \stackrel{\text{def}}{=\!=} [\lambda\wedge\mu])$
3) $\mathcal{H}^k R^m \cong 0\ \forall\, k > 0$ (lemma di Poincaré)

$f : M \to N$ applicazione differenziabile con M e N varietà diff.
$\rightsquigarrow f^* : \mathcal{H}^k N \to \mathcal{H}^k M$ definita $f^*([\lambda]) = [f^*(\lambda)]\ \forall\, [\lambda] \in \mathcal{H}^k N$, $k \geq 0$

<u>Note</u>: 1) f^* è ben definita ($f^*\colon \mathcal{D}^k N \to \mathcal{D}^k M$ soddisfa $d\circ f^* = f^*\circ d$)
2) f^* è R-lineare e $f^*([\lambda]\wedge[\mu]) = f^*([\lambda])\wedge f^*([\mu])$
3) $(\mathrm{id}_M)^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}M}$, $(g\circ f)^* = f^*\circ g^*$

<u>Prop</u>. $f \simeq g : M \to N \Rightarrow f^* = g^* : \mathcal{H}^k N \to \mathcal{H}^k M$ per ogni $k \geq 0$

<u>Dim</u>. $H : f \simeq g \rightsquigarrow K : M \times R \to N$ appl. diff. t.c. $k_t = \begin{cases} f & \forall\, t \leq 0 \\ g & \forall\, t \geq 1 \end{cases}$
(teorema di approssimazione diff.)
basta considerare il caso $k_{t|\overline{M-C}} = k_{0|\overline{M-C}}\ \forall\, t \in R$
con $C \subset A$ compatto e $A \cong R^m$ carta locale speciale
$(\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\geq 1}$ atl. speciale, $\{h_n\}_{n\geq 1}$ part. dell'unità subord.
$\rightsquigarrow$ decomp. di K in K_n tra $\mathrm{Gr}(\Sigma_{i<n} h_n)$ e $\mathrm{Gr}(\Sigma_{i\leq n} h_n))$
$[\lambda] \in \mathcal{H}^k N \rightsquigarrow K^*([\lambda]) = [\mu = K^*(\lambda)] \in \mathcal{H}^k(M \times R)$
$\Rightarrow \pi^*(i_1^*(\mu_{|A\times R}) - i_0^*(\mu_{|A\times R})) = d(\Phi_0^k(\mu) - \Phi_1^k(\mu))$
(come lemma di Poincaré con $\Phi_i^k \leftrightarrow \int_i^x \ldots\, dt$)
$\Rightarrow \pi^*(i_1^*(\mu) - i_0^*(\mu)) = d\nu$ con $\nu \in \mathcal{D}^{k-1}(M \times R)$
(ν estensione di $\Phi_0^k(\mu) - \Phi_1^k(\mu)$ nulla su $\overline{M-C} \times R$)
$\Rightarrow f^*([\lambda]) = i_0^*([\mu]) = i_1^*([\mu]) = g^*([\lambda])$ ($i_0^*\circ\pi^* = \mathrm{id} \Rightarrow \pi^*$ in)

$f : M \to N$ applicazione continua con M e N varietà diff.
$\rightsquigarrow f^* \overset{\text{def}}{=\!=} f_s^* : \mathcal{H}^k N \to \mathcal{H}^k M$ con $f_s \simeq f : M \to N$ appross. diff.

<u>Note</u>: 1) f^* è ben definita (non dipende dalla scelta di f_s)
2) f^* è R-lineare e $f^*([\lambda] \wedge [\mu]) = f^*([\lambda]) \wedge f^*([\mu])$
3) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ ($g_s \circ f_s \simeq g \circ f$ appross. diff.)
4) $f \simeq g : M \to N \Rightarrow f^* = g^* : \mathcal{H}^k N \to \mathcal{H}^k M$ ($f_s \simeq g_s$)
5) $M \simeq N \Rightarrow \mathcal{H}^k M \cong \mathcal{H}^k N \ \forall\, k \geq 0$ e $\mathcal{H} M \cong \mathcal{H} N$

M varietà differenziabile, $\{M_1, M_2\}$ ricoprimento aperto
$\rightsquigarrow i_{1,2} : M_{1,2} \to M$ e $j_{1,2} : M_0 = M_1 \cap M_2 \to M_{1,2}$ inclusioni

<u>Prop</u>. $0 \to \mathcal{D}^k M \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}^k M_1 \oplus \mathcal{D}^k M_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}^k(M_1 \cap M_2) \to 0$
con $\varphi(\lambda) = (i_1^*(\lambda), i_2^*(\lambda))$ e $\psi(\lambda_1, \lambda_2) = j_1^*(\lambda_1) - j_2^*(\lambda_2)$
è una successione esatta ($\mathrm{Im}(\to \cdot) = \mathrm{Ker}(\cdot \to)$)

<u>Dim</u>. φ iniettiva ($i_{1,2}^*(\lambda) = \lambda_{|M_{1,2}}$ determinano univocamente λ)
$\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,\psi$ ($\psi(\varphi(\lambda)) = \psi(\lambda_{|M_1}, \lambda_{|M_2}) = \lambda_{|M_0} - \lambda_{|M_0} = 0$)
$\mathrm{Im}\,\varphi \supset \mathrm{Ker}\,\psi$ ($(\lambda_1, \lambda_2) \in \ker\psi \Rightarrow \lambda_{1|M_0} = \lambda_{2|M_0} \rightsquigarrow$
$\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \in \mathcal{D}^k M$ t.c. $\varphi(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2)$)
ψ suriettiva ($\lambda \in \mathcal{D}^k M_0$, $\{f_{1,2}\}$ part. dell'unità sub. a $\{M_{1,2}\}$
$\rightsquigarrow \lambda_i = (-1)^{3-i} \widetilde{f_{3-i}} \lambda \in \mathcal{D}^k M_i$ t.c. $\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda$)

<u>Prop</u>. M varietà differenziabile, $\{M_1, M_2\}$ ricoprimento aperto

$$\rightsquigarrow 0 \to \mathcal{H}^0 M \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{H}^0 M_1 \oplus \mathcal{H}^0 M_2 \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{H}^0(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}^1 M \dots$$
$$\xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}^k M \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{H}^k M_1 \oplus \mathcal{H}^k M_2 \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{H}^k(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}^{k+1} M$$
$$\dots \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}^m M \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{H}^m M_1 \oplus \mathcal{H}^m M_2 \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{H}^m(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\Delta} 0$$

<u>successione esatta di Mayer-Vietoris</u>

<u>Dim</u>. $\Delta([\lambda]) \overset{\text{def}}{=\!=} [\lambda''']$ per ogni $\lambda \in \mathcal{C}^k M_0$ con $\lambda''' \in \mathcal{C}^{k+1} M$ tale che
$\varphi(\lambda''') = (\lambda''_1, \lambda''_2) = (d\lambda'_1, d\lambda'_2)$ e $\psi(\lambda'_1, \lambda'_2) = \lambda$
Δ appl. lineare ben definita (non dipende da λ, λ'_1 e λ'_2)
come si vede ragionando sul seguente diagr. comm. dove
le frecce orizz. sono φ e ψ del lemma, le verticali sono d,
e inoltre $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2)$, $d\lambda' = (d\lambda'_1, d\lambda'_2)$ e $\lambda'' = (\lambda''_1, \lambda''_2)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \lambda' \arrow[r] \arrow[d] & \lambda \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \lambda''' \arrow[r] \arrow[d] & \lambda'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im}\varphi^* = \operatorname{Ker}\psi^*$ segue da $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$
$\operatorname{Im}\psi^* = \operatorname{Ker}\Delta$ e $\operatorname{Im}\Delta = \operatorname{Ker}\varphi^*$ seguono dalla definizione di Δ, come si vede ragionando sul diagr. comm. sopra

Note: 1) $M = M_1 \sqcup M_2 \Rightarrow \mathcal{H}^k M \cong \mathcal{H}^k M_1 \oplus \mathcal{H}^k M_2 \ \forall\, k \geq 0$
$[\lambda_1] \wedge [\lambda_2] = 0$ in $\mathcal{H}M \ \forall\, [\lambda_{1,2}] \in \mathcal{H}M_{1,2}$
2) $\mathcal{H}^k M \cong \oplus_{\{M_c\}} \mathcal{H}^k M_c$ con $\{M_c\} =$ comp. conn. di M

Prop. M varietà diff. compatta $\Rightarrow \dim \mathcal{H}^k M < \infty$ per ogni $k \geq 0$

Dim. $M \subset T \subset R^n$ (teoremi di immers. diff. e intorno tubolare)
$\rightsquigarrow M \subset A = C_1 \cup \ldots \cup C_\ell \subset T$ con $C_i \cong R^n$ aperti convessi
$T \searrow M \rightsquigarrow r : A \to M$ retrazione continua
$i^* \circ r^* = (r \circ i)^* = \mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^k M} \Rightarrow r^* : \mathcal{H}^k M \to \mathcal{H}^k A$ iniettiva
quindi basta provare che $\dim \mathcal{H}^k A < \infty$ per ogni $k \geq 0$
per induzione su $\ell \geq 1$ a partire dal caso banale $\ell = 1$
$A = C_1 \cup \ldots \cup C_\ell \rightsquigarrow A = A' \cup C_\ell$ con $A' = C_1 \cup \ldots \cup C_{\ell-1}$
$\mathcal{H}^{k-1} A'' \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}^k A \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{H}^k A' \oplus \mathcal{H}^k C_\ell$ successione esatta
con $A'' = A' \cap C_\ell = (C_1 \cap C_\ell) \cup \ldots \cup (C_{\ell-1} \cap C_\ell)$
$\Rightarrow \dim \mathcal{H}^k A = \dim \operatorname{Im}\Delta + \dim \operatorname{Im}\varphi^*$
$\leq \dim \mathcal{H}^{k-1} A'' + \dim(\mathcal{H}^k A' \oplus \mathcal{H}^k C_\ell) < \infty$
$(\dim \mathcal{H}^{k-1} A'', \dim \mathcal{H}^k A' < \infty$ per ipotesi induttiva$)$

M varietà differenziabile compatta
$\rightsquigarrow b_k(M) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \dim \mathcal{H}^k M \in \mathbb{N}$ per ogni $k \geq 0$
k-esimo <u>numero di Betti</u>
$\rightsquigarrow \chi(M) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Sigma_{k \geq 0} (-1)^k b_k(M) \in \mathbb{Z}$
<u>caratteristica di Eulero-Poincaré</u>

Nota: $b_k(M)$ e $\chi(M)$ sono invarianti omotopici

Prop. M varietà differenziabile compatta connessa
$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ricoprimento aperto di M tale che
$A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \varnothing \Rightarrow$ contraibile $\forall\, 1 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$
$\Rightarrow \chi(M) = \Sigma_{k \geq 0}(-1)^k n_k$ con $n_k = \#\{A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \varnothing\}$

Dim. induzione su $n \geq 1$ a partire dal caso banale $n = 1$
$\forall\, M = A_1 \cup \dots \cup A_n$ come sopra ma non necess. compatto
$A' = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$, $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_{n-1}\}$, n'_k come sopra
$A'' = A' \cap A_n$, $\mathcal{A}'' = \{A_1 \cap A_n, \dots, A_{n-1} \cap A_n\}$, n''_k come sopra
$n_k = n'_k + n''_{k-1}\ \forall\, k \geq 0$ (con $n''_{-1} \overset{\text{def}}{=\!=} 1$) e ipotesi induttiva
$\Rightarrow \Sigma_{k \geq 0}(-1)^k n_k = \Sigma_{k \geq 0}(-1)^k (b_k(A') + b_{k-1}(A'')) + 1$
$\mathcal{H}^{k-1}A'' \xrightarrow{\Delta^{k-1}} \mathcal{H}^k M \xrightarrow{\varphi^k} \mathcal{H}^k A' \oplus \mathcal{H}^k A_n \xrightarrow{\psi^k} \mathcal{H}^k A''$ succ. esatta

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow b_k(M) &= \dim \operatorname{Ker} \varphi^k + \dim \operatorname{Im} \varphi^k \\
b_k(A') &= \dim \operatorname{Ker} \psi^k + \dim \operatorname{Im} \psi^k - \delta_{k,0} \\
&= \dim \operatorname{Im} \varphi^k + \dim \operatorname{Im} \psi^k - \delta_{k,0} \\
b_{k-1}(A'') &= \dim \operatorname{Ker} \Delta^{k-1} + \dim \operatorname{Im} \Delta^{k-1} \\
&= \dim \operatorname{Im} \psi^{k-1} + \dim \operatorname{Ker} \varphi^k
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow b_k(A') + b_{k-1}(A'') = b_k(M) + \dim \operatorname{Im} \psi^{k-1} + \dim \operatorname{Im} \psi^k - \delta_{k,0}$
$\Rightarrow \Sigma_{k \geq 0}(-1)^k (b_k(A') + b_{k-1}(A'')) + 1 = \Sigma_{k \geq 0}(-1)^k b_k(M)$

Note: 1) M superficie compatta, $\mathcal{P}$ poligonazione di M
$\chi(M) = \#\{\text{vert. di } \mathcal{P}\} - \#\{\text{lati di } \mathcal{P}\} + \#\{\text{polig. di } \mathcal{P}\}$
(basta considerare il caso speciale $\mathcal{P}$ triangolazione
$\mathcal{A} = \{A_v = \operatorname{Int}(\cup\{\text{triangoli di } \mathcal{P} \text{ con vertice } v\})\}$)

2) M varietà diff. compatta, $\mathcal{P}$ decomp. poliedrale di M
$\chi(M) = \Sigma_{k \geq 0}(-1)^k \#\{\text{poliedri } k\text{-dimensionali di } \mathcal{P}\}$
(basta considerare il caso speciale $\mathcal{P}$ decomp. simpliciale
$\mathcal{A} = \{A_v = \operatorname{Int}(\cup\{\text{simplessi di } \mathcal{P} \text{ con vertice } v\})\}$)

3) $\chi(S^m) = \begin{cases} 2 \text{ se } m \text{ pari} \\ 0 \text{ se } m \text{ dispari} \end{cases}$
($\mathcal{A} = \{A_i^{\pm} = S^m \cap \{x^i \gtrless 0\}\}_{i=1,\dots,m+1} \Rightarrow n_k = \binom{m+1}{k+1} 2^{k+1}$)

4) $\chi(T^m) = 0$ per ogni $m \geq 1$
(in generale $\chi(M_1 \times M_2) = \chi(M_1) \cdot \chi(M_2)$)

5) $\chi(P^m) = \begin{cases} 1 \text{ se } m \text{ pari} \\ 0 \text{ se } m \text{ dispari} \end{cases}$
(in generale $p\colon M \to N$ d-rivest. $\Rightarrow \chi(M) = d\,\chi(N)$)

Prop. $\mathcal{H}^k S^m \cong \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq 0, m \\ R \text{ se } k = 0, m \text{ e } m > 0 \\ R^2 \text{ se } k = m = 0 \end{cases}$

Dim. $\mathcal{H}^0 S^0 \cong R^2$ e $\mathcal{H}^0 S^m \cong R \;\forall\, m > 0$ (# comp. conn.)
$\mathcal{H}^k S^0 \cong 0 \;\forall\, k > 0$ ($S^0 = \{-1\} \sqcup \{+1\}$)
$S^m = A_1 \cup A_2$ con $A_i = S^m - \{p_i\} \cong R^m$ e $A_1 \cap A_2 \searrow S^{m-1} \rightsquigarrow$
$\mathcal{H}^{k-1} R^m \oplus \mathcal{H}^{k-1} R^m \to \mathcal{H}^{k-1} S^{m-1} \to \mathcal{H}^k S^m \to \mathcal{H}^k R^m \oplus \mathcal{H}^k R^m$
succ. esatta $\Rightarrow \mathcal{H}^1 S^1 \cong R$ e $\mathcal{H}^1 S^m \cong 0 \;\forall\, m > 1$
$\mathcal{H}^k S^m \cong \mathcal{H}^{k-1} S^{m-1} \;\forall\, k > 1, m \geq 1$

Prop. $S^n \cong_{\text{omeo}} S^m \Leftrightarrow S^n \simeq S^m \Leftrightarrow n = m$

Dim. $S^n \simeq S^m \Rightarrow \mathcal{H}^k S^n \simeq \mathcal{H}^k S^m \Rightarrow n = m$

Teorema di invarianza della dimensione

$R^n \cong_{\text{omeo}} R^m \Leftrightarrow n = m$

Dim. $h : R^n \cong R^m \rightsquigarrow \tau_{-h(0)} \circ h_| : R^n - \{0\} \cong R^m - \{0\}$
$\Rightarrow S^{n-1} \simeq S^{m-1}$ ($S^{n-1} \swarrow R^n - \{0\} \cong R^m - \{0\} \searrow S^{m-1}$)

Teorema di non retrazione

$\nexists$ retrazione continua $r : B^m \to S^{m-1}$

Dim. per assurdo $\mathrm{id}_{S^{m-1}} = r \circ i : S^{m-1} \xrightarrow{i} B^m \xrightarrow{r} S^{m-1} \Rightarrow$
$i^* \circ r^* = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{m-1} S^{m-1}} : \mathcal{H}^{m-1} S^{m-1} \xrightarrow{r^*} \mathcal{H}^{m-1} B^m \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}^{m-1} S^{m-1}$

Teorema del punto fisso di Brouwer

$f : B^m \to B^m$ applicazione continua
$\Rightarrow \exists\, x \in B^m$ tale che $f(x) = x$ (punto fisso)

Dim. $f(x) \neq x \;\forall\, x \in B^m \rightsquigarrow r : B^m \to S^{m-1}$ retraz. cont. definita
$r(x) = s_{f(x),x} \cap S^{m-1}$, $s_{f(x),x}$ semir. ap.

<u>Prop</u>. $X, Y \subset R^m$ sottospazi chiusi

$X \cong_{\text{omeo}} Y \Rightarrow \mathcal{H}^k(R^m - X) \cong \mathcal{H}^k(R^m - Y)\ \forall\, k \geq 0$

<u>Dim</u>. $R^m \subset R^{m+1} \rightsquigarrow \mathcal{H}^0(R^m - X) \cong R \oplus \mathcal{H}^1(R^{m+1} - X)$

$\mathcal{H}^k(R^m - X) \cong \mathcal{H}^{k+1}(R^{m+1} - X)\ \forall\, k > 0$

$(R^{m+1} - X = A_- \cup A_+$, con $A_\pm = \operatorname{Int} R^{m+1}_\pm \cup (R^m - X) \times R$,

$A_\pm \searrow *$, $A_- \cap A_+ = (R^m - X) \times R \searrow R^m - X \rightsquigarrow$

$\oplus\, \mathcal{H}^k A_\pm \to \mathcal{H}^k(R^m - X) \to \mathcal{H}^{k+1}(R^{m+1} - X) \to \oplus\, \mathcal{H}^{k+1} A_\pm)$

$\mathcal{H}^0(R^m - X) \cong R \oplus \mathcal{H}^m(R^{2m} - X)$

$\cong R \oplus \mathcal{H}^m(R^{2m} - Y) \cong \mathcal{H}^0(R^m - Y)$

$\mathcal{H}^k(R^m - X) \cong \mathcal{H}^{k+m}(R^{2m} - X)$

$\cong \mathcal{H}^{k+m}(R^{2m} - Y) \cong \mathcal{H}^k(R^m - Y)\ \forall\, k > 0$

$(h : X \to Y$ omeo $\rightsquigarrow k : R^{2m} \to R^{2m}$ omeo tale che

$X \times 0_{R^m} \mapsto \operatorname{Gr}(h) \mapsto 0_{R^m} \times Y$

$\Rightarrow R^{2m} - (X \times 0_{R^m}) \cong_{\text{omeo}} R^{2m} - (0_{R^m} \times Y)$

$\Rightarrow R^{2m} - X \cong_{\text{omeo}} R^{2m} - Y)$

<u>Teorema di separazione per sfere topologiche</u>

$S \subset R^m$ sfera topologica (cioè $S \cong_{\text{omeo}} S^{m-1}$)

$\Rightarrow R^m - S$ ha due componenti connesse $I(S)$ ed $E(S)$ t.c.

$I(S)$ limitata, $E(S)$ illimitata, $\operatorname{Fr} I(S) = \operatorname{Fr} E(S) = S$

<u>Dim</u>. $S \cong_{\text{omeo}} S^{m-1} \Rightarrow \mathcal{H}^0(R^m - S) \cong \mathcal{H}^0(R^m - S^{m-1}) \cong R^2$

$\Rightarrow R^m - S$ ha due comp. conn. di cui una sola illimitata

$(S$ compatto $\Rightarrow S \subset B(0, r) \Rightarrow R^m - B(0, r) \subset E(S))$

$\forall\, C \subsetneq S$ compatto, $C \cong_{\text{omeo}} C' \subsetneq S^{m-1}$ compatto

$\Rightarrow \mathcal{H}^0(R^m - C) \cong \mathcal{H}^0(R^m - C') \cong R \Rightarrow R^m - C$ connesso

$\Rightarrow \operatorname{Fr} I(S) = \operatorname{Fr} E(S) = S$

<u>Teorema di invarianza del dominio</u>

$f : A \to B$ applicazione continua biiettiva con $A, B \subset R^m$

A aperto in $R^m \Rightarrow B$ aperto in R^m (in tal caso f omeo)

$(A, B \subset R^m$ con $A \cong_{\text{omeo}} B \Rightarrow [A$ aperto in $R^m \Leftrightarrow B$ aperto in $R^m])$

<u>Dim</u>. $x \in A$ aperto in $R^m \rightsquigarrow \varepsilon > 0$ t.c. $\operatorname{Cl} B(x, \varepsilon) \subset A$

$\operatorname{Cl} B(x, \varepsilon)$ compatto $\Rightarrow f_{|\operatorname{Cl} B(x,\varepsilon)}$ immersione

$\Rightarrow S = f(\mathrm{Fr}\, B(x,\varepsilon)) \subset R^m$ sfera topologica
$R^m - S = f(B(x,\varepsilon)) \sqcup (R^m - f(\mathrm{Cl}\, B(x,\varepsilon)))$
con $f(B(x,\varepsilon))$ e $R^m - f(\mathrm{Cl}\, B(x,\varepsilon))$ connessi
$\Rightarrow f(B(x,\varepsilon)) = I(C)$ intorno aperto di $f(x)$ in R^m

Note: 1) $A \subset R^n$, $B \subset R^m$ aperti non vuoti, $A \cong B \Rightarrow n = m$
$(n \leq m \rightsquigarrow A \subset R^n \subset R^m$ aperto in $R^m \Rightarrow n = m)$
2) M m-varietà topologica (con bordo) $\Rightarrow$
$m = \dim M$ invariante topologico univoc. determ.
3) M m-varietà topologica con bordo $\Rightarrow$
$\mathrm{Int}\, M \subset M$ m-varietà topologica (senza bordo)
$\mathrm{Bd}\, M \subset M$ $(m-1)$-varietà topologica (senza bordo)
$\mathrm{Int}\, M \cap \mathrm{Bd}\, M = \varnothing$, $\mathrm{Int}\, M \subset M$ aperto, $\mathrm{Bd}\, M \subset M$ chiuso

Lemma. M m-varietà diff. connessa
$\forall\, \lambda \in \mathcal{D}^m M (= \mathcal{C}^m M)$ con supp. compatto, $A \subset M$ aperto
$\exists\, \mu \in \mathcal{D}^m M$ con supp. compatto $\subset A$ tale che $\mu - \lambda \in \mathcal{E}^m M$

Dim. $\mathcal{A} = \{(A_n, \varphi_n)\}_{n \geq 1}$ atlante speciale
$\rightsquigarrow \{f_n\}_{n \geq 1}$ partizione dell'unità subordinata
$\rightsquigarrow \lambda = \Sigma_{n \leq \bar{n}} \lambda_n$ con $\lambda_n = f_n \lambda \in \mathcal{C}^m M$, $\mathrm{supp}(\lambda_n) \subset A_n$ (comp.)
$(\mathrm{supp}(\lambda)$ compatto $\Rightarrow$ somma finita, cioè $\lambda = \Sigma_{n \leq \bar{n}} \lambda_n)$
$\rightsquigarrow \mu = \Sigma_{n \leq \bar{n}} \mu_n$ con $\mu_n - \lambda_n \in \mathcal{E}^m M$ e $\mathrm{supp}(\mu_n) \subset A$ (comp.)
$(\exists\, h_n \simeq \mathrm{id}_M$ diffeo di M tale che $\mathrm{supp}(\lambda_n) \subset h_n(A)$
$\rightsquigarrow \mu_n = h_n^*(\lambda_n) \in \mathcal{C}^m M$ tale che $\mathrm{supp}(\mu_n) \subset A$
e $[\mu_n] = h_n^*([\lambda_n]) = \mathrm{id}_M^*([\lambda_n]) = [\lambda_n] \in \mathcal{H}^m M)$
$\Rightarrow \mathrm{supp}(\mu) \subset A$ comp. e $\lambda - \mu = \Sigma_{n \leq \bar{n}} (\mu_n - \lambda_n) \in \mathcal{E}^m M$

Nota: il lemma non vale per $\lambda \in \mathcal{D}^k M$ con $k < m$ $(\mathcal{D}^k M \neq \mathcal{C}^k M)$

Lemma. $\forall\, \lambda \in \mathcal{D}^m R^m$ con supp. compatto t.c. $\int_{R^m} \lambda = 0$
$\exists\, \mu \in \mathcal{D}^{m-1} R^m$ con supp. compatto t.c. $\lambda = d\mu$
(vale anche il viceversa per il teorema di Stokes)

Dim. $m = 1 \rightsquigarrow \lambda = f(x)dx \in \mathcal{D}^1 R$ con $\int_R \lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$
$\rightsquigarrow \mu = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi \in \mathcal{D}^0 R = C^\infty(R)$ con $\mathrm{supp}(\mu)$ comp.

$m > 1 \rightsquigarrow \lambda = f(x^1, \ldots, x^m) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, $\mathrm{supp}(f)$ comp.

$f = \sum_{i=1}^m \dfrac{\partial f_i}{\partial x^i}$, $\mathrm{supp}(f_i)$ compatto $\forall\, i = 1, \ldots, m$

$(g(x^1, \ldots, x^{m-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^1, \ldots, x^m) dx^m$

$\mathrm{supp}(g)$ comp. $\Rightarrow g = \sum_{i=1}^{m-1} \dfrac{\partial g_i}{\partial x^i}$, $\mathrm{supp}(g_i)$ comp.

$\rho \in C^\infty(R)$ t.c. $\mathrm{supp}(\rho)$ compatto e $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$

$\rightsquigarrow f_i(x) = g_i(x^1, \ldots, x^{m-1}) \rho(x^m)\ \forall\, i \leq m-1$

t.c. $\mathrm{supp}(f_i) \subset \mathrm{supp}(g_i) \times \mathrm{supp}(\rho)$ compatto

$\rightsquigarrow h = f - \sum_{i=1}^{m-1} \partial f_i / \partial x^i = f - g \cdot \rho \in C^\infty(R^m)$

$\rightsquigarrow f_m(x) = \int_{-\infty}^{x^m} h(x^1, \ldots, x^{m-1}, \xi) d\xi$

t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx^m = 0 \Rightarrow \mathrm{supp}(f_m)$ compatto)

$\rightsquigarrow \mu = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f_i(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^m$

<u>Prop</u>. M varietà diff. compatta connessa

$$\mathcal{H}^m M \cong \begin{cases} R \text{ se } M \text{ è orientabile} \\ 0 \text{ se } M \text{ non è orientabile} \end{cases}$$

<u>Dim</u>. M orientata $\rightsquigarrow \varphi : \mathcal{C}^m M = \mathcal{D}^m M \to R$ def. $\varphi(\lambda) = \int_M \lambda$

φ lineare (linearità dell'integrale)

φ suriettiva ($\omega \in \mathcal{D}^m$ forma di volume su $M \Rightarrow \varphi(\omega) > 0$)

$\ker \varphi \supset \mathcal{E}^m M$ ($\lambda = d\mu$ + teor. di Stokes $\Rightarrow \int_M \lambda = \int_{\partial M} \mu = 0$)

$\ker \varphi \subset \mathcal{E}^m M$ ($\lambda \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ con $\mathrm{supp}(\lambda) \subset A \cong R^m$ compatto

lemma $\Rightarrow \lambda_{|A} = d\nu$ con $\mathrm{supp}(\nu)$ compatto

$\rightsquigarrow \mu = \widetilde{\nu} \in \mathcal{D}^m M$ estensione nulla t.c. $\lambda = d\mu$)

$\Rightarrow \varphi / \mathrm{Ker}\, \varphi : \mathcal{H}^m M = \mathcal{C}^m M / \mathcal{E}^m M \to R$ iso def. $[\lambda] \mapsto \int_M \lambda$

M non orientabile $\Rightarrow \exists\, h \simeq \mathrm{id}_M : M \to M$ diffeo tale che

$h_{|A} : A \to A$ inverte l'orientazione

$[\lambda] \in \mathcal{H}^m M \rightsquigarrow \mu \in \mathcal{C}^m M$ t.c. $\lambda - \mu \in \mathcal{E}^m M$ e $\mathrm{supp}(\mu) \subset h(A)$

$\Rightarrow [\lambda] = [\mu] = h^*([\mu]) = -[\mu] = -[\lambda] \Rightarrow [\lambda] = 0$

$M = (M, \mathcal{O}_M)$ m-varietà diff. compatta connessa orientata

$\rightsquigarrow \eta_M \in \mathcal{H}^m M \stackrel{\text{def}}{=\!=} $ unica classe t.c. $\int_M \eta_M = 1$ ($\pm\, \eta_M \leftrightarrow \pm\, \mathcal{O}_M$)

<u>classe fondamentale</u> di M

$f : M \to N$ applicazione continua
con M e N m-varietà diff. compatte connesse orientate
$\rightsquigarrow d(f) \in \mathbb{Z}$ grado di f definito da $f^*(\eta_N) = d(f) \cdot \eta_M$

Note: 1) $d(f)$ è ben definito ($\mathcal{H}^m M = \langle \eta_M \rangle$)
$d(f) \in \mathbb{Z}$ ($f \simeq g : M \to N$ diff. (teorema di appross. diff.)
$\rightsquigarrow q \in N$ valore regolare di g (teorema di Sard)
$g^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\} \rightsquigarrow g^{-1}(B) = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$
carte sp. int. a q e p_i t.c. $g_{|A_i} : A_i \to B$ diffeo
$\eta_N = [\lambda]$ con $\mathrm{supp}(\lambda) \subset B \Rightarrow \int_N \lambda = 1 \Rightarrow$
$d(f) = d(g) = \int_M g^*(\lambda) = \sum_{i=1}^k \sigma_{p_i}(g) \in \mathbb{Z}$)
2) orientazione opposta su M o $N \rightsquigarrow d(f)$ opposto
3) $f \simeq g : M \to N \Rightarrow f^* = g^* \Rightarrow d(f) = d(g)$
4) $f : M \to N$, $g : N \to L \Rightarrow d(g \circ f) = d(f) \cdot d(g)$
5) $h : M \to N$ omeo $\Rightarrow d(h) = \pm 1$ se h cons./inv. l'orient.
6) $f : S^1 \to S^1 \Rightarrow d(f) =$ grado definito con $\pi_1(S^1)$

Prop. S^m ha campi di vettori ovunque non nulli $\Leftrightarrow m$ dispari

Dim. $V \in \mathcal{V}S^m$ ovunque non nullo $\rightsquigarrow H : \mathrm{id}_{S^m} \sim \alpha_{S^m} \Rightarrow m$ dispari
m dispari $\rightsquigarrow V = W_{|S^m} \in \mathcal{V}S^m$ campo di versori
con $W \in \mathcal{V}R^{m+1=2n}$ campo di vettori definito
$W_{(x^1, x^2, \dots, x^{2n-1}, x^{2n})} = (-x^2, x^1, \dots, -x^{2n}, x^{2n-1})$

Teorema di Hopf
M m-varietà diff. compatta connessa orientata
$f, g : M \to S^m$ applicazioni continue, $f \simeq g \Leftrightarrow d(f) = d(g)$

Dim. basta provare $\Leftarrow$ (l'inversa segue dalla nota 3 sopra)
$f, g : S^m \to S^m$ per induz. su $m \geq 1$ ($m = 1 \Leftarrow$ nota 6 sopra)
f, g diff. con $\pm e_{m+1} \in S^m$ val. reg. (teor. appross. diff. e Sard)
$f^{-1}(\pm e_{m+1}), g^{-1}(\pm e_{m+1}) \subset S^m_\pm$ (a meno di omotopia)
$\rightsquigarrow f' \simeq f$ e $g' \simeq g$ tali che $f'(S^m_\pm), g'(S^m_\pm) \subset S^m_\pm$
$\Rightarrow f' \simeq \Sigma(f'_| : S^{m-1} \to S^{m-1})$, $g' \simeq \Sigma(g'_| : S^{m-1} \to S^{m-1})$
$\Rightarrow d(f'_|) = d(f) = d(g) = d(g'_|) \rightsquigarrow H : f'_| \simeq g'_|$ (ipotesi ind.)
$\rightsquigarrow \Sigma(H) : \Sigma(f'_|) \simeq \Sigma(g'_|) \Rightarrow f \simeq g$

$f, g : M \to S^m$ diff. con $-e_{m+1} \in S^m$ val. reg. (come sopra)
$f^{-1}(-e_{m+1}), g^{-1}(-e_{m+1}) \subset A$ carta sp. (a meno di omotopia)
$\rightsquigarrow f', g' : S^m \to S^m$ t.c. $f \sim f' \circ \widehat{\varphi}$ e $g \sim g' \circ \widehat{\varphi}$
con $\widehat{\varphi} : M \to M/(M - A) \cong S^m$ e $d(\widehat{\varphi}) = 1$
$d(f) = d(g) \Rightarrow d(f') = d(g') \Rightarrow f' \sim g' \Rightarrow f \sim g$

<u>Note</u>: 1) in generale $d(f) = d(g) \not\Rightarrow f \simeq g$ per $f, g : M \to N$
($i_1 \circ \pi_1 \not\simeq i_2 \circ \pi_2 : T^2 \to T^2 \cong S^1 \times S^1$ anche se $d(i_i \circ \pi_i) = 0$)
2) $f : M \to N$ con M, N comp. conn. non orientabili/orientate
$\rightsquigarrow d_2(f) = \#(f^{-1}(q)) \bmod 2 \in \mathbb{Z}_2$ con $q \in N$ val. regolare
↳ <u>grado mod 2</u> di f ben definito e soddisfa prop. 3 , 4 , 5
(M, N orientabili $\rightsquigarrow d_2(f) = d(f) \bmod 2$ per ogni $\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_N$
M non orient., N orient. $\rightsquigarrow d_2(f) = d(f \circ p_M)/2 \bmod 2$
M orient., N non orient. $\rightsquigarrow d_2(f) = 2\, d(p_N \circ \widetilde{f}) = 0 \bmod 2$
M, N non orient. $\rightsquigarrow d_2(f) = d(\widetilde{f}\,) \bmod 2$, $p_N \circ \widetilde{f} = f \circ p_M$)

<u>Teorema di separazione per ipersuperfici differenziabili</u>
$M \subset R^{m+1}$ m-sottovarietà diff. compatta connessa
$\Rightarrow M$ orientabile e $R^{m+1} - M$ ha due comp. conn. $I(M)$ e $E(M)$
t.c. $I(M)$ limitata, $E(M)$ illimitata, $\mathrm{Fr}\, I(M) = \mathrm{Fr}\, E(M) = M$

<u>Dim</u>. $p \in R^{m+1} - M \rightsquigarrow \nu_p : M \to S^m$ def. $\nu_p(x) = (x - p)/\|x - p\|$
tale che $p, p' \in$ stessa comp. conn. di $R^{m+1} - M \Rightarrow \nu_p \simeq \nu_{p'}$
$M \subset R^{m+1} \rightsquigarrow M \subset T \subset R^{m+1}$ (teorema dell'intorno tubolare)
M orientabile $\Rightarrow (T, M) \cong (M \times [-1, 1], M \times \{0\})$
$\Rightarrow T - M$ ha due comp. conn. con $\mathrm{Fr}_T = M$
$\Rightarrow R^{m+1} - M$ ha due comp. conn. con $\mathrm{Fr} = M$
($\exists\, p, p' \in T - M$ tali che $d(\nu_p) \neq d(\nu_{p'})$)
M non orient. $\Rightarrow T - M$ connesso $\Rightarrow R^{m+1} - M$ connesso
assurdo ($\exists\, p, q \in T - M$ t.c. $d_2(\nu_p) \neq d_2(\nu_q)$)