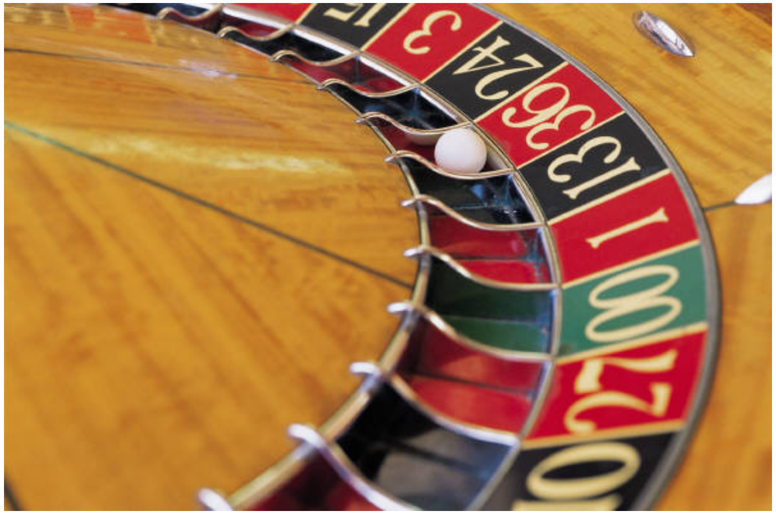
Teoria della Probabilità

M.S. Bernabei

Teoria della Probabilità

- La Probabilità è nata con i giochi d’azzardo?
- Il Calcolo delle Probabilità ha come oggetto l’analisi delle situazioni di incertezza e delle relative scelte operative.



L’inceretezza può vericarsi in modi diversi:

- Carenza di informazione su eventi passati o presenti, o su eventi futuri non univocamente determinati dalla situazione presente;
- Complessità del calcolo o del ragionamento richiestoper dedurre il risultato di interesse, p.e. la 10ª cifra del prodotto di 3 con un numero di 30 cifre;
- Studio di un fenomeno intrinsicamente incerto, quali tutti quelli derivanti dalle scelte individuali (p.e. numero di auto a Roma in un dato giorno in una data zona, clienti in fila ad uno sportello), quelli relativi all’evoluzione di una popolazione, di caratteri genetici, di grandezze termodinamiche, ecc..

Eventi aleatori

- Evento aleatorio: una proposizione di cui non conosciamo il valore logico (vero o falso, 0 o 1, ecc.). P.e. “dalle 9 alle 10 arrivano più di 10 clienti ad uno sportello”.
- Variabile aleatoria o numero aleatorio: una grandezza che assume valori in R, ma il cui valore è incerto e dipende dal verificarsi o meno di un dato evento. P.e. “numero di clienti che arrivano ad uno sportello dalle 9 alle 10 ”.
- Processo aleatorio: una grandezza che assume valori in uno spazio di funzioni, il cui valore è incerto. P.e. “numero di clienti che arrivano ad uno sportello nell’intervallo [0,t] in funzione di t.

Calcolo delle Probabilità

- Esigenza di modellare il mondo fisico.
- Stretto collegamento tra enti e proprietà matematiche e relativa interpretazione e giustificazione empirica.
- Il mondo che ci circonda è caratterizzato dall’incertezza che ne costituisce una condizione naturale

- La realtà economica, sociale, fisica, scientifica ha leggi che sono intrinsecamente incerte come pure le grandezze stesse.
- Azione e incertezza: il risultato della nostra azione è incerto e per questo conviene farsi un'idea di tale incertezza raccogliendo le conoscenze disponibili e i dati sperimentali
- L'aumento della conoscenza riduce l'incertezza iniziale e crea nuovi dubbi.

Evoluzione della probabilità

- Incertezza era terreno di interpretazione e predomio religioso.
- Nel Rinascimento la volontà di una scienza e di una espansione del dominio delle conoscenze razionali spingono verso la razionalizzazione dell'incerto
- Spunti con il Gioco d'azzardo
- Come in tutte le Scienze applicative il CdP è in accordo con lo sviluppo economico e sociale.

CdP e sviluppo economico

- Rinascimento: Italia
- Re Sole: Francia
- Concentrazione di capitale: Svizzera
- Con i traffici marittimi e lo scambio di merci con l'America: Paesi Bassi e Inghilterra
- Metà del '700: grandi nazioni europee, Francia, Inghilterra, Prussia.
- Fine dell' '800: Russia e scuola di San Pietroburgo.

Interpretazioni della probabilità

- Classica: Nella definizione classica ogni evento è simmetrico, cioe' non c'è nessuna ragione per supporre che un evento sia più probabile di un altro. La probabilità classica è definita come il rapporto tra i casi favorevoli e tutti i possibili casi possibili. P.e. Lancio di una moneta.
- Laplace nella Theorie (1812). Definizione operativa di Probabilità. E' stata data da Pascal un secolo e mezzo prima.
- Problema della divisione della posta. Studiato da Paciolo, Tartaglia, Cardano, Fermat e Pascal. Due giocatori A e B all'inizio di una partita si accordano che vincerà per primo chi si sarà aggiudicato 10 punti (10 giocate) e che la posta in gioco che competerà al vincitore sarà di 10 ducati. Se la partita venisse interrotta, per esempio quando hanno 7 e 4 punti rispettivamente, come andrebbe suddivisa la posta?

Risposte

- Paciolo: suddividere la posta proporzionalmente a 7 e a 4.
- Cardano: suddividere la posta proporzionalmente alle partite che mancano
- Tartaglia: suddividere la posta in due e poi B restituisce ad A una percentuale dei suoi ducati pari a (7-4)/10
- La risposta giusta è assegnare ad ogni giocatore una quota della posta proporzionale alle sue possibilità di vincere se continuasse (Cardano, Fermat e Pascal).

Theorie

- Nella Theorie viene enunciata l’ipotesi di Bayes-Laplace secondo cui tutti i valori possibili delle probabilità di un evento sono espressioni egualmente equiprobabili
- Principio di ragion sufficiente di Bernouilli: se non si conoscono ragioni per predicare di un soggetto l’una o l’altra di parecchie alternative allora, in mancanza di conoscenza, l’osservazione di ciascuna di essa ha la stessa probabilità.

Spazi di esiti equiprobabili

- Dato uno spazio campionario $S=\{1,2,\ldots,N\}$ e supponiamo che tutti i risultati dell' esperimento abbiano la stessa probabilità di realizzarsi, cioè

$$P(1)=P(2)=\ldots=P(N)=1/N$$

perché per gli assiomi 1 e 2

$$P(1)+P(2)+\ldots+P(N)=1$$

- Dato un sottoinsieme A di S, allora

$$P(A)=\frac{|A|}{N}$$

$|A|$ è il numero di elementi di A

Proprietà

- 1) $0 \le P(A) \le 1$ per ogni evento A
- 2) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2),$
  $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
- 3) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2),$

Limiti della Probabilità classica

- Non tutti gli eventi sono “equiprobabili”, p.e. prendere come voto 6 o 10 ad una interrogazione.
- La simmetria degli eventi suggerisce l’idea della non correlazione degli eventi. In realtà non tutti gli eventi sono tra loro indipendenti.

Interpretazioni della probabilità

- Frequentistica: Supponendo di ripetere un esperimento alle stesse condizione, al crescere del numero delle prove secondo una legge empirica, la frequenza relativa in cui compare un certo evento tende a ‘‘stabilizzarsi" intorno ad un valore che definiamo come probabilità dell'evento. P.e. numero di volte in cui esce testa in *n* successivi lanci di una moneta.

- 1663 Cardano in “De ludo alae”.

Frequentistica

- ‘600-’700: calcolo dei premi assicurativi contro certi rischi, p.e. probabilità di morte di un gruppo di individui conoscendo la tavola di mortalità di quel luogo.
- ‘800: astronomia, biologia e con la scuola anglosassone a tutta la sperimentazione scientifica.
- Statistica: metodi atti a determinare alcune caratteristiche incognite di una popolazione sulla base della conoscenza di un campione.
- Ripetizione di un esperimento o prova. Calcolo del numero dei successi.

Limiti della probabilità frequentistica

- Non tutti i fenomeni sono ripetibili, se l' aleatorietà non riguarda il futuro o se tale futuro non può essere messo in relazione ad un passato "simile" e noto, p.e. la 20ª cifra decimale di π.
- Le condizioni macroscopiche sono le stesse, quelle microscopiche no altrimenti il risultato sarebbe lo stesso.
- Indipendenza delle prove è in contraddizione con il fatto che si possa apprendere dai dati.

Differenze tra concezione classica e frequentistica

- Nella frequentistica la probabilità è determinata solo dopo aver effettuato delle prove.
- La probabilità è relativa solo all’interno di un insieme di osservazioni.

Interpretazioni della probabilità

- Soggettivistica: La probabilità di un evento è pari al grado di fiducia che l'osservatore ha nel verificarsi o meno di esso. Per esempio nelle scommesse si applica tale definizione.
- 1970. De Finetti.
- Metodi statistici come supporto delle tecniche di gestione aziendale. P.e. favore di un dato prodotto.
- Ora si pone l'accento sulla decisione di un soggetto.

Interpretazioni della probabilità

- Assiomatica (Kolmogorov 1933): Prescinde da cosa sia la probabilità, e si basa su degli assiomi a cui la probabilità deve sottostare.

Assiomi di Probabilità

- Assiomi di probabilità: La probabilità di un evento è un numero reale compreso tra 0 e 1 avente le seguenti proprietà (assiomi):

1. La probabilità dell'evento certo è 1 : $P(S)=1$
2. La probabilità di un qualunque evento è positiva: $P(A) \geq 0$ per ogni *evento A di S*.
3. La probabilità dell'unione di *2* eventi incompatibili A_1, A_2 è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento:

Assiomi di Probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2),$$
$$A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

Questo assioma può essere esteso ad *n* eventi a due a due Incompatibili A_1, A_2, …, A_n:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$
$$A_i \cap A_j = \varnothing$$
$$i \neq j$$

Teoria dei Giochi

- 1944 “Theory of Games and Economic Behavior” di John von Neumann e Oskar Morgenstern
- 1953 John Forbes Nash jr., Premio Nobel per l’Economia nel 1994

Che cos' è un gioco?

- Esistono molti tipi di giochi, giochi a carte, videogiochi, giochi sportivi (p.e. calcio), ecc..
- In questo corso prenderemo in considerazine i giochi in cui:
  - partecipano 2 o più giocatori;
  - ci sono decisioni dove conta la strategia, cioè l'insieme delle mosse che un giocatore intende fare;
  - il gioco può avere uno o più risultati;
  - il risultato o vincita finale di ciascun giocatore dipende dalle strategie scelte da tutti i giocatori; esiste una interazione strategica.

Teoria dei Giochi

- La Teoria dei Giochi (TdG) è la scienza matematica che analizza situazioni di conflitto e ne ricerca soluzioni competitive e cooperative. Studia le decisioni individuali in situazioni in cui vi sono interazioni tra diversi soggetti.
- Essendo coinvolti più decisori l'esito finale dipende dalle scelte operate da i giocatori.
- Assumiamo che i giocatori siano "intelligenti" cioè in grado di fare ragionamenti logici di complessità indefinitivamente elevata.
- Supponiamo che i giocatori siano "razionali", cioè hanno preferenze coerenti (transitive) sugli esiti finali del processo decisionale e che hanno l'obiettivo di "massimizzare" queste preferenze.
- Ogni partecipante ha una "sua" "funzione di utilità" sull'insieme dei beni o esiti del gioco.

Quali Giochi rimangono fuori?

- Giochi contro il caso, per esempio le lotterie, le slot machines dove c'è un solo giocatore che sfida la sorte, la strategia non è importante.
- Giochi senza interazione strategica tra giocatori, per esempio il solitario.

Perché gli economisti studiano la TdG?

- La teoria dei Giochi rappresentano un buon modello per descrivere le interazioni strategiche tra agenti economici. La teoria microeconomica è basata sulla teoria delle scelte individuali.
- Molti risultati economici coinvolgono l'interazione strategica.
  - Andamento di mercati non perfettamente competitivi, p.e. Coca-Cola contro la Pepsi.
  - Andamento nelle aste, p.e. offerta della Banca di Investimento sui Buoni Ordinari del Tesoro.
  - Andamento nelle negoziazioni economiche, p.e. il commercio.
- La teoria dei giochi è ampiamente utilizzata in Economia Industriale, p.e. nelle imprese dove gli agenti hanno interessi contrastanti.
- Teoria dei giochi non ha applicazioni solo nell' economia e nella finanza, ma anche nel campo strategico-militare, nella politica, nella sociologia, nella psicologia, nell'informatica, nella biologia, nello sport.

Le componenti di un gioco

1. I giocatori
   - Quanti giocatori ci sono?
   - Conta l'intelligenza, la fortuna?
2. Una descrizione completa su cosa i giocatori possono scegliere - l'insieme delle azioni possibili.
3. L' informazione che i giocatori hanno a disposizione quando prendono una decisione.
4. Una descrizione delle possibili vincite di ogni giocatore per ogni possibile combinazione delle mosse scelte da tutti i giocatori che partecipano al gioco.
5. Una descrizione di tutte le preferenze dei giocatori sugli esiti.

Il gioco del Dilemma del Prigioniero

- Due giocatori, i prigionieri 1 e 2.
- Ogni prigioniero ha due possibili scelte.
  - Prigioniero 1: Non confessare, Confessare
  - Prigioniero 2: Non confessare, Confessare
- I giocatori scelgono le loro azioni simultaneamente senza conoscere l'azione scelta dall'avversario.
- La vincita è quantificata in anni di prigione.

Dilemma del Prigionierio in forma “normale” o “strategica”

Prigioniero 1 Prigioniero 2	Non Confessa	Confessa
Non confessa	1,1	15,0
Confessa	0,15	5,5

Equilibrio di Nash:Dilemma del Prigioniero

Entrambi i prigionieri hanno una strategia dominante: la riduzione della pena

Prigioniero 1 Prigioniero 2	Non Confessa	Confessa
Non confessa	1,1	15,0
Confessa	0,15	5,5

Battaglia dei sessi

- Due fidanzati devono scegliere tra andare a teatro (T) o alla partita (P). Lei preferisce il teatro, mentre lui preferisce la partita, ma entrambi non hanno interesse a restare da soli. In termini di soddisfazione stare soli dà 0 a entrambi, il teatro dà 2 alla ragazza e 1 al ragazzo, mentre la partita dà 2 al ragazzo e 1 alla ragazza.

Rappresentare il gioco in forma strategica e ad albero.

Equilibrio di Nash: La Battaglia dei Sessi

Ragazza Ragazzo	Cinema	Teatro
Cinema	2,1	0,0
Teatro	0,0	1,2