Teoria dei Giochi

M.S. Bernabei

Prima lezione

- 1944 “Theory of Games and Economic Behavior” di John von Neumann e Oskar Morgenstern
- 1953 John Forbes Nash jr., Premio Nobel per l’Economia nel 1994

Che cos’ è un gioco?

- Esistono molti tipi di giochi, giochi a carte, videogiochi, giochi sportivi (p.e. calcio), ecc..
- In questo corso prenderemo in considerazine i giochi in cui:
  - partecipano 2 o più giocatori;
  - ci sono decisioni dove conta la strategia, cioè l’insieme delle mosse che un giocatore intende fare;
  - il gioco può avere uno o più risultati;
  - il risultato o vincita finale di ciascun giocatore dipende dalle strategie scelte da tutti i giocatori; esiste una interazione strategica.

Teoria dei Giochi

- La Teoria dei Giochi (TdG) è la scienza matematica che analizza situazioni di conflitto e ne ricerca soluzioni competitive e cooperative. Studia le decisioni individuali in situazioni in cui vi sono interazioni tra diversi soggetti.
- Essendo coinvolti più decisori l'esito finale dipende dalle scelte operate da i giocatori.
- Assumiamo che i giocatori siano "intelligenti" cioè in grado di fare ragionamenti logici di complessità indefinitivamente elevata.
- Supponiamo che i giocatori siano "razionali", cioè hanno preferenze coerenti (transitive) sugli esiti finali del processo decisionale e che hanno l'obiettivo di "massimizzare" queste preferenze.
- Ogni partecipante ha una "sua" "funzione di utilità" sull'insieme dei beni o esiti del gioco.

Quali Giochi rimangono fuori?

- Giochi contro il caso, per esempio le lotterie, le slot machines dove c'è un solo giocatore che sfida la sorte, la strategia non è importante.
- Giochi senza interazione strategica tra giocatori, per esempio il solitario.

Perché gli economisti studiano la TdG?

- La teoria dei Giochi rappresentano un buon modello per descrivere le interazioni strategiche tra agenti economici. La teoria microeconomica è basata sulla teoria delle scelte individuali.
- Molti risultati economici coinvolgono l’interazione strategica.
  - Andamento di mercati non perfettamente competitivi, p.e. Coca-Cola contro la Pepsi.
  - Andamento nelle aste, p.e. offerta della Banca di Investimento sui Buoni Ordinari del Tesoro.
  - Andamento nelle negoziazioni economiche, p.e. il commercio.
- La teoria dei giochi è ampiamente utilizzata in Economia Industriale, p.e. nelle imprese dove gli agenti hanno interessi contrastanti.
- Teoria dei giochi non ha applicazioni solo nell’ economia e nella finanza, ma anche nel campo strategico-militare, nella politica, nella sociologia, nella psicologia, nell'informatica, nella biologia, nello sport.

Le componenti di un gioco

1. I giocatori
   – Quanti giocatori ci sono?
   – Conta l'intelligenza, la fortuna?
2. Una descrizione completa su cosa i giocatori possono scegliere - l'insieme delle azioni possibili.
3. L'informazione che i giocatori hanno a disposizione quando prendono una decisione.
4. Una descrizione delle possibili vincite di ogni giocatore per ogni possibile combinazione delle mosse scelte da tutti i giocatori che partecipano al gioco.
5. Una descrizione di tutte le preferenze dei giocatori sugli esiti.

Giochi cooperativi e non cooperativi

- Un gioco si dice cooperativo se c'e' la possibilità per i giocatori di sottoscrivere accordi vincolanti, che possono essere di vantaggio ai singoli giocatori (von Neumann).
- Un gioco si dice non cooperativo quando il meccanismo delle decisioni riguarda i singoli giocatori sulla base di ragionamenti individuali (Nash).
- Prenderemo in considerazione solo giochi non cooperativi.

Il gioco del Dilemma del Prigioniero

- Due giocatori, i prigionieri 1 e 2.
- Ogni prigioniero ha due possibili scelte.
  - Prigioniero 1: Non confessare, Confessare
  - Prigioniero 2: Non confessare, Confessare
- I giocatori scelgono le loro azioni simultaneamente senza conoscere l'azione scelta dall'avversario.
- La vincita è quantificata in anni di prigione.

Dilemma del Prigionierio in forma “normale” o “strategica”

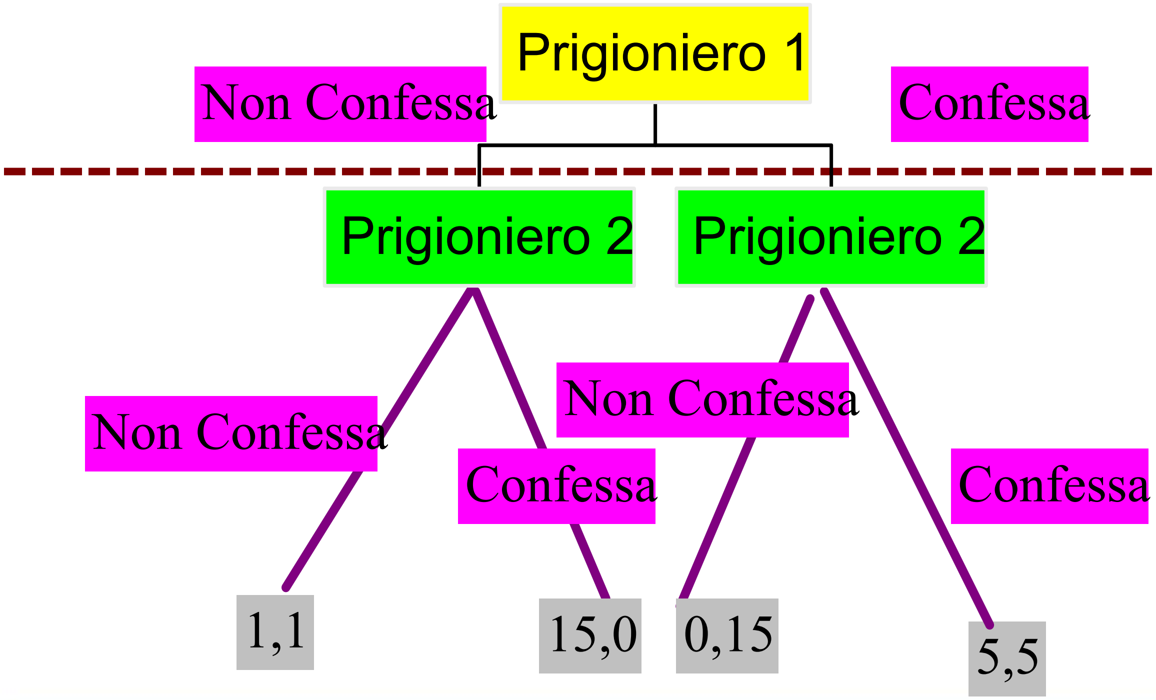
Prigioniero 1 Prigioniero 2	Non Confessa	Confessa
Non confessa	1,1	15,0
Confessa	0,15	5,5

Come giocare utilizzando un software

http://www.gametheory.net/applets/

Dilemma del Prigionierio: descrizione ad “albero”

Dilemma del Prigioniero



Mentre il Prigioniero 2 sceglie non conosce la scelta che ha fatto il suo avversario.

Giochi con somma non nulla

- Un gioco si dice a somma nulla se la somma delle vincite è zero, per esempio nel calcio se una squadra vince l'altra perde.
- Altrimenti un gioco si dice a somma non nulla, per esempio nel caso del Dilemma del Prigioniero se entrambi i giocatori scelgono di non confessare entrambi hanno una riduzione della pena.

Forma estesa e normale

- Un gioco è in forma estesa se può essere descritto con un “albero”: si tratta di costruire un grafo che, partendo dalla radice, descriva il gioco mossa per mossa, fino ad arrivare a presentare tutte le situazioni finali, ciascun esito univoco di una serie di mosse (introdotta da von Neumann e Morgenstern(1944) e formalizzata da Kuhn (1953)).
- Un gioco è in forma normale (o strategica) se il numero dei giocatori è prefissato, come lo spazio delle loro strategie, e la funzione di utilità di ciascuno di loro.

Informazione completa e incompleta

- In un gioco a informazione completa le regole del gioco e la funzione di utilità di tutti i giocatori sono conoscenza comune dei giocatori.
- In un gioco a informazione incompleta le regole del gioco e la funzione di utilità di tutti i giocatori non sono conoscenza comune dei giocatori.
- L'informazione incompleta è più realistica e interessante da studiare.

Applicazione del Dilemma del Prigioniero

- Corsa alle armi nucleari.
- Risoluzione di controversia e la decisione di assumere un avvocato.
- Contributi politici (o di corruzione) tra imprenditori e politici.

Giochi simultanei e sequenziali

- I giochi sono simultanei se i giocatori scelgono le azioni simultaneamente.
  - Esempi: Dilemma del Prigioniero, Vendite all'asta.
- I giochi sono sequenziali se i giocatori scelgono le azioni secondo una successione particolare.
  - Esempi: Gioco degli scacchi, contrattazioni.
- Molte strategie comprendono sia la simultaneità che la sequenzialità.

Giochi one-shot e ripetuti

- Un gioco è one-shot quando c'e' una sola scelta.
  - I giocatori di solito non sanno molto degli avversari.
- Un gioco è ripetuto quando ciascun giocatore può fare più di una scelta. Questo tipo di gioco favorisce le cooperazioni.

Strategie

- Una strategia è un “piano di azione”, una mossa o insieme delle mosse che un giocatore intende fare seguendo tutte le possibiltà del gioco.
- Le strategie dipendono dal tipo di gioco, nel gioco ad una sola scelta le strategie sono fisse. P.e.: Confessare, Non confessare nel Dilemma del Prigioniero.
- Nel gioco ripetuto, è possibile adottare strategie che dipendono dalle mosse fatte nelle partite precedenti del gioco.

Informazione perfetta e imperfetta

- Un gioco si dice avere informazione perfetta se i giocatori conoscono con certezza la storia delle giocate precedenti (sa in quale ramo dell'albero si trova).
  - Es.: scacchi, dama, Dilemma del Prigioniero.
- Altrimenti l'informazione è imperfetta.
  - Es.: scopa, briscola (non si conosce la giocata dell'avversario)

Equilibrio

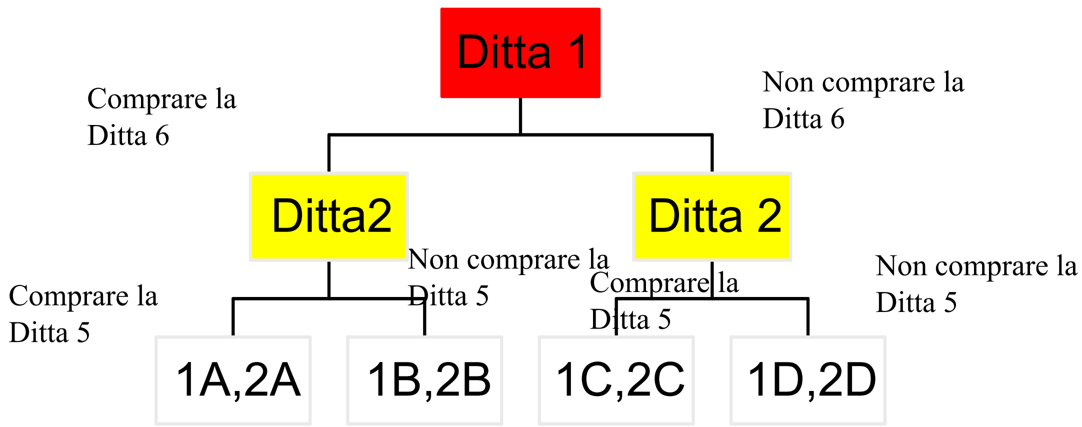
- L' interazione di tutte le strategie dei giocatori "razionali" portano all'"equilibrio".
- In stato di equilibrio ciascun giocatore sta giocando la strategia che risulta la "migliore risposta" alle strategie degli altri giocatori. Nessuno è disposto a cambiare tale strategia date le scelte strategiche degli altri.
- L' equilibrio non è
  - il risultato migliore: l'equilibrio per il Dilemma del Prigioniero è per entrambi i prigionieri di confessare.
  - quando i giocatori scelgono la stessa azione. Talvolta l'equilibrio comporta un cambiamento di mossa (equilibrio nella strategia mista).

Giochi sequenziali con Informazione Perfetta

- Modelli di situazioni strategiche dove c'è un ordine stretto di gioco
- L'informazione perfetta implica che i giocatori sanno tutto quello che è successo prima di prendere una decisione.
- I giochi con mosse sequenziali sono più facilmente rappresentabili usando un gioco ad albero.
  - Il gioco di fusione: supponiamo che un'industri ha 6 grandi ditte. Denotiamo la più grande con 1 e la più piccola con 6. Supponiamo che la ditta 1 proponga una fusione con la 6, e la ditta 2 consideri l'eventualità di fondersi con la 5.

L’albero per il Gioco di Fusione

Il Gioco di Fusione



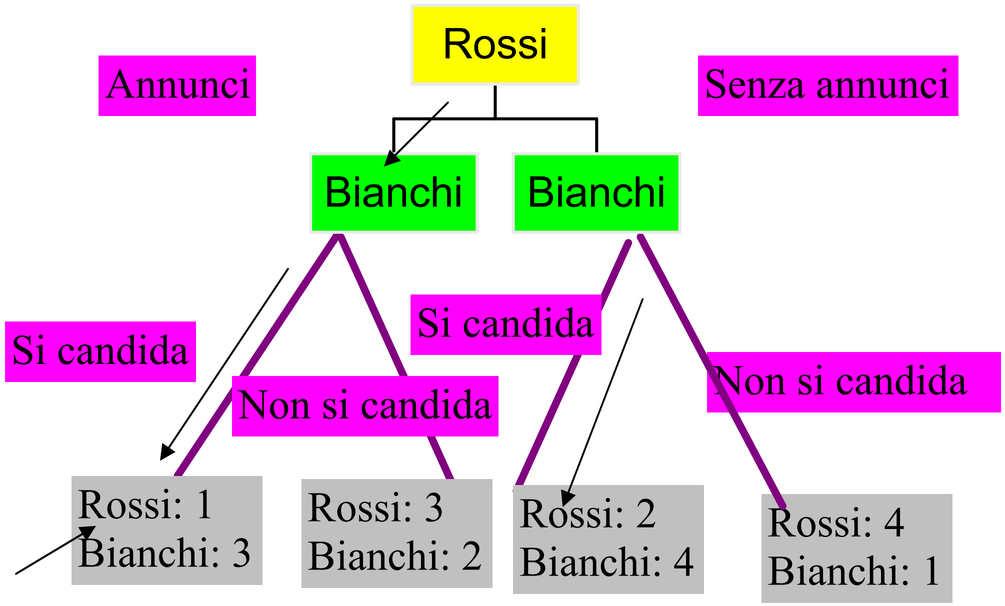
Ditta 1: 1B>1A>1D>1C
Ditta 2: 2C>2A>2D>2B
Tali valori rappresentano il profitto di ciascuna ditta

Esempio: il Gioco della Candidatura al Senato

- Il Senatore in carica Rossi è candidato per la rielezione. La sfidante è la signora Bianchi.
- Il Senatore Rossi fa la prima mossa e deve decidere se fare propaganda con annunci pubblicitari o no.
- La sfidante Bianchi fa la seconda mossa e deve decidere se candidarsi o no.
- Modello del gioco:
  - I giocatori sono Rossi e Bianchi. Inizia a giocare Rossi.
  - Le scelte per Rossi sono Annunci, Senza Annunci; per Bianchi: Candidarsi, Non Candidarsi.
  - La propaganda è costosa, così Rossi vorrebbe non farla.
  - Per Bianchi sarà più facile vincere se Rossi non farà propaganda.

Gioco della Candidatura al Senato

Candidatura al Senato



Equilibrio

I numeri 1,2,3,4 rappresentano in ordine crescente le utilit□ dei due candidati. Per esempio se il Senatore Rossi non fa pubblicit□ e Bianchi non si candida ottiene il massimo della sua utilit□; viceversa ottiene il minimo quando paga la sua pubblicit□ e Bianchi si candida.

Quali sono le strategie?

- Una pura strategia per un giocatore è un piano completo di azioni che specifica la scelta da fare ad ogni nodo. Nel quarto capitolo vedremo che esiste anche una strategia mista.
- Rossi ha due pure strategie: Annunci e Senza Annunci
- Bianchi ha quattro strategie:
  - Se Rossi sceglie Annunci sceglie Candidatura, C, e se Rossi sceglie Senza Annunci sceglie Candidatura (C, C)
  - Se Rossi sceglie Annunci sceglie Non Candidatura, NC, e se Rossi sceglie Senza annunci sceglie Candidatura (NC,C)
  - Se Rossi sceglie Annunci sceglie Candidatura e se Rossi sceglie Senza annunci sceglie Non Candidatura (C, NC)
  - Se Rossi sceglie Annunci sceglie Non Candidatura e se Rossi sceglie Senza annunci sceglie Non Candidatura (NC, NC)

Come trovare l’equilibrio di un gioco: induzione a ritroso

- Supponiamo di avere due giocatori A e B e che A decide per primo e B per secondo
- Consideriamo le vincite del giocatore B nei nodi finali e assumiamo che il giocatore B sceglierà sempre l’azione che gli darà la vincita massima
- Indichiamo con delle frecce questi rami dell’albero, mentre gli altri sono “potati”
- Consideriamo il penultimo nodo. Data la decisione di B, quale mossa farà A? Assumiamo che anche il giocatore A sceglierà sempre l’azione che gli darà la vincita massima. Mettiamo una freccia su questi rami dell’albero.
- Continuiamo così ad andare a ritroso fino alla radice del primo nodo dell’albero. Il cammino indicato da queste frecce è il cammino che porta all’equilibrio.

Esercizi

1. La Battaglia dei sessi. Due fidanzati devono scegliere tra andare a teatro (T) o alla partita (P). Lei preferisce il teatro, mentre lui preferisce la partita, ma entrambi non hanno interesse a restare da soli. In termini di soddisfazione stare soli dà 0 a entrambi, il teatro dà 2 alla ragazza e 1 al ragazzo, mentre la partita dà 2 al ragazzo e 1 alla ragazza.

   Rappresentare il gioco in forma strategica e ad albero.
2. Morra cinese. Due giocatori contemporaneamente devono scegliere tra sasso, forbice e carta. Se i due giocatori scelgono lo stesso la partita è pari. Sasso vince su forbice, forbice vince su carta e carta vince su sasso. Rappresentare il gioco in forma strategica e ad albero.

Seconda lezione

Giochi simultanei: Equilibrio

Giochi simultanei: Equilibrio

- Sono i giochi in cui i giocatori devono fare la loro scelta strategica simultaneamente, senza conoscere le strategie che sono state scelte dagli altri giocatori
  - Due ditte decidono indipendentemente se sviluppare e immettere sul mercato un nuovo prodotto.
- Mentre non ci sono informazioni su cosa gli altri giocatori sceglieranno al momento, assumiamo che le scelte strategiche possibili per ogni giocatori siano conosciute da tutti i giocatori
- I giocatori non devono pensare solo alla propria migliore scelta strategica ma anche a quella degli altri giocatori.

Forma normale o strategica

- Un gioco simultaneo è rappresentato in forma normale o strategica usando una tabella di gioco che mette in relazione le scelte strategiche dei giocatori rispetto alle loro vincite

Forma normale o strategica

	Strategia C1	Strategia C1
Strategia R1	a,b	c,d
Strategia R2	e,f	g,h

Tipi di strategie: la pura e la mista

- Un giocatore persegue una strategia pura se sceglie sempre la stessa mossa tra le azioni strategiche possibili di ogni partita.
- Un giocatore persegue una strategia mista se sceglie una mossa tra le azioni strategiche possibili di ogni partita con una certa probabilità.

Esempio: la Battaglia delle Reti

- Supponiamo che ci siano solo 2 reti televisive
- Entrambe sono in lotta per gli shares dei telespettatori: sono preferibili shares più alti
- La Rete 1 ha un vantaggio nei programmi di intrattenimento sui giochi, mentre la Rete 2 ha maggior successo nei giochi

La Battaglia delle Reti

Rete 2

Rete 1

	Intrattenimento	Giochi
Intrattenimento	55%, 45%	52%, 48%
Giochi	50%, 50%	45%, 55%

Equilibrio di Nash

- In un gioco simultaneo non possiamo applicare la induzione a ritroso, e quindi come potremmo trovare una soluzione?
- Determiniamo la migliore risposta di ciascun giocatore ad ogni scelta strategica fatta dagli altri giocatori. Ripetiamo la stessa procedura per gli altri giocatori.
- Se la scelta strategica di ogni giocatore è la migliore risposta alla scelta strategica degli altri giocatori, allora abbiamo trovato l'equilibrio (o gli equilibri) del gioco.
- L'equilibrio è conosciuto come equilibrio di Nash, poiché è stato proposto per primo da Nash
- Un gioco potrebbe avere 0,1 o più equilibri di Nash.

Il metodo dell'ispezione cella per cella

- Il metodo della ispezione cella per cella è il più sicuro per trovare gli equilibri di Nash.
- Se la Rete 2 trasmette un programma di Intrattenimento la migliore risposta della Rete 1 è trasmettere un programma di Intrattenimento.
- Se la Rete 2 trasmette un programma di Giochi la migliore risposta della Rete 1 è trasmettere un programma di Intrattenimento.

Il metodo della ispezione cella per cella

Rete 2

Rete 1

	Intrattenimento	Giochi
Intrattenimento	55%, 45%	52%, 48%
Giochi	50%, 50%	45%, 55%

Il metodo dell'ispezione cella per cella

- Ora troviamo la migliore risposta della Rete 2.
- Se la Rete 1 trasmette un programma di Intrattenimento la migliore risposta della Rete 2 è trasmettere un programma di Giochi.
- Se la Rete 1 trasmette un programma di Giochi la migliore risposta della Rete 2 è trasmettere un programma di Intrattenimento.

Il metodo dell'ispezione cella per cella

Rete2

Rete 1

	Intrattenimento	Giochi
Intrattenimento	55%, 45%	52%48%
Giochi	50%, 50%	45%, 55%

Equilibrio di Nash è L'interse-zione delle due migliori risposte Strategi-che dei Giocatori.

Strategia dominante

- Un giocatore ha una strategia dominante se ha vincita più alta (strettamente) di tutte le altre strategie indipendentemente dalle strategie scelte dai giocatori avversari
- Per esempio nella Battaglia delle reti la Rete 1 ha la strategia dominante di scegliere sempre un programma di Intrattenimento, mentre la Rete 2 ha la strategia dominante di scegliere sempre un programma di Giochi.
- L'eliminazione di strategie non dominanti o dominate può essere utile per trovare l'equilibrio di Nash.

Eliminazioni successive delle strategie dominanti

- E' un altro modo per trovare gli equilibri di Nash
- Tracciare delle linee sulle strategie dominate del giocatore
- Se l'eliminazione successiva delle strategie dominate dà un unico risultato, tale risultato è l'equilibrio di Nash
- Chiamiamo questi giochi risolvibili per dominanza

Successive eliminazioni delle strategie dominate

Rete2

Rete 1

	Intrattenimento	Giochi
Intrattenimento	~~55%, 45%~~	52%48%
Giochi	~~50%, 50%~~	~~45%, 55%~~

Equilibrio di Nash

Più strategie

- Aggiungiamo la strategia Reality

Rete 2

Rete 1

	Intr.	Giochi	Reality
Intr.	55,45	52,48	51,49
Giochi	50,50	45,55	46,54
Reality	52,48	49,51	48,52

Eliminazione delle strategie dominate

I Giochi sono una strategia dominata per la Rete 1, l' Intrattenimento per la Rete 2

Rete 2

Rete 1		Intr.	Giochi	Reality
	Intr.	~~55,45~~	52,48	51,49
	Giochi	~~50,50~~	~~45,55~~	~~46,54~~
	Reality	~~52,48~~	49,51	48,52

Eliminazione delle strategie dominate

Dopo aver eliminato le strategie dominate, continuare a cercare le strategie dominate tra le rimanenti scelte. Ora il Reality è una strategia dominata per la Rete 1 e i Giochi per la Rete 2

Rete 2

Rete 1

	Intr.	Giochi	Reality
Intr.	55,45	~~52,48~~	51,49
Giochi	~~50,50~~	~~45,55~~	~~46,54~~
Reality	~~52,48~~	~~49,51~~	~~48,52~~

Ispezione cella per cella

dominate

Rete 2

Rete 1

	Intr.	Giochi	Reality
Intr.	55,45	52,48	51,49
Giochi	50,50	45,55	46,54
Reality	52,48	49,51	48,52

Giochi con somma non costante

- Il gioco della Battaglia delle reti è un gioco a somma costante, infatti le vincite di ogni giocatore ha somma costante uguale a 100%
- Potremmo considerare le vincite nell'intervallo

  (-50%,50%) invece di (0,100%) cosicchè il gioco è a somma 0
- Gli equilibri di Nash potrebbero esistere anche per i giochi con somma non nulla o variabile dove i giocatori potrebbero avere interessi comuni, per esempio il Dilemma del Prigioniero

Dilemma del Prigioniero

Entrambi i prigionieri hanno una strategia dominante: la riduzione della pena

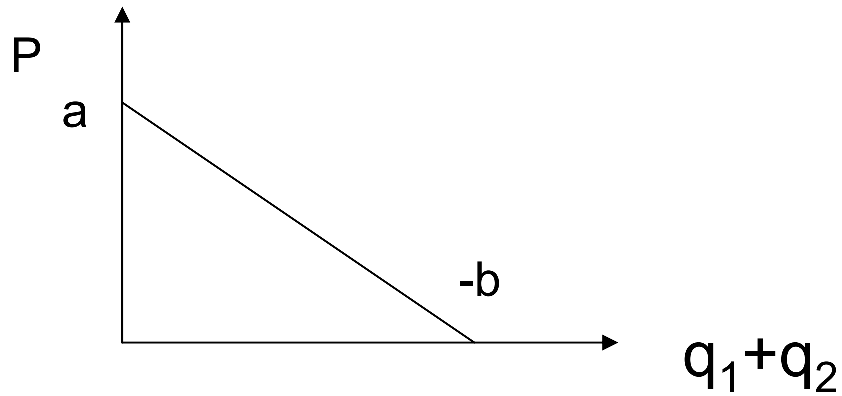
Prigioniero 1 Prigioniero 2	Non Confessa	Confessa
Non confessa	1,1	15,0
Confessa	0,15	5,5

Competizione di Cournot

- Un gioco dove due ditte competono tra loro in termini di quantità vendute (divisione del mercato) di un bene omogeneo si chiama Gioco di Cournot in onore dell'economista francese che lo ha studiato
- Siano q_1 e q_2 il numero di unità del bene che sono state portate sul mercato dalle Ditte 1 e 2. Assumiamo che il prezzo di mercato, P è determinato dalla domanda di mercato:

  $P=a-b(q1+q2)$ se $a> b(q1+q2)$, $P=0$ altr.
- I profitti della Ditta 1 sono $P=a-cq_1$, quelli della Ditta 2 sono $P=a-cq_2$, dove c è il costo marginale di produzione di ogni unità del bene.
- Assumiamo che entrambe le ditte cercano di massimizzare i profitti.

Gioco di Cournot



Esempio numerico

- Supponiamo che $P=130-(q_1 + q_2)$ cosicchè $a=130$ e $b=1$
- Il costo marginale per unità, c=10$ per entrambe le ditte
- Supponiamo che ci siano solo 3 possibili quantità che le ditte possono scegliere, $q_i=30,40$ o 60, $i=1,2$.
- Per le 2 ditte ci sono 3x3=9 possibili profitti
- Per esempio se la Ditta 1 sceglie $q_1=30$ e la Ditta 2 $q_2=60$, allora P=130-(30+60)=$40
- I profitti della Ditta 1 sono allora
  - (P-c) q_1=($40-$10)30=$900,

  i profitti della Ditta 2 sono
  - (P-c) q_2=($40-$10)60=$1800 .

Matrice delle vincite del Gioco di Cournot

Ditta 1 \ Ditta 2	$q_2=30$	$q_2=40$	$q_2=60$
$q_1=30$	1800,1800	1500,2000	900,1800
$q_1=40$	2000,1500	1600,1600	800,1200
$q_1=60$	1800,900	1200,800	0,0

Equilibrio di Nash: ispezione cella per cella

Ditta 2

Ditta 1	$q_2=30$	$q_2=40$	$q_2=60$
$q_1=30$	1800,1800	1500,2000	900,1800
$q_1=40$	2000,1500	1600,1600	800,1200
$q_1=60$	1800,900	1200,800	0,0

Q=60 è debolmente dominata da entrambe le ditte

Terza lezione

Teoria della Probabilità

- Nella Teoria dei Giochi lo studio dei giochi con strategie miste richiede la conoscenza dei concetti di base della Teoria della Probabilità.

Spazio campionario ed eventi

- Lo Spazio campionario S è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento. Esso puo' essere discreto (Es.: Lancio di un dado) o continuo (Es.: Peso). Ciascun punto di S sarà chiamato evento elementare e sarà denotato con la lettera s.
- Consideriamo solo spazi campionari discreti finiti:
  - $S=\{s_1, s_2\}$, successo/insuccesso, p.e. lancio di una moneta, $S=\{T,C\}$;
  - $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, p.e. numero di pezzi di un dato prodotto che sono stati venduti;
- Un evento è un sottoinsieme di S cioè è un esperimento che a priori può avere diversi esiti, non prevedibili con certezza.
- In particolare S è detto evento certo e Ø (insieme vuoto) è detto evento impossibile .

Assiomi di Probabilità

- Assiomi di probabilità: La probabilità di un evento è un numero reale compreso tra 0 e 1 avente le seguenti proprietà (assiomi):

1. La probabilità dell'evento certo è 1 : $P(S)=1$
2. La probabilità di un qualunque evento è positiva: $P(A) \geq 0$ per ogni *evento A di S*.
3. La probabilità dell'unione di *2* eventi incompatibili A_1, A_2 è uguale alla somma delle probabilità di ciascun evento:

Assiomi di Probabilità

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2),$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Questo assioma può essere esteso ad *n* eventi a due a due Incompatibili A_1, A_2, …, A_n:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n),$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$i \neq j$$

Esempio 1. Nel lancio di un dado, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, un evento elementare è un punto di *S*, *p.e.* "Esce il numero 5". Un evento è per esempio A= ``Il risultato del lancio è un numero pari", cioè $A = \{2,4,6\}$.

Eventi composti

- La negazione o complementare di un evento A è l'evento che si verifica quando non si verifica A. Esso si indicherà con A^C. Allora $A^C = S - A$.
- L'intersezione di due eventi A_1, A_2 è l'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente A_1 e A_2 Essa si indicherà con $A_1 \cap A_2$
- L'unione di due eventi A_1, A_2 è l'evento che si verifica quando si verifica A_1 o A_2. Essa si indicherà con $A_1 \cup A_2$

Esempio

- **Esempio 2**. Sia A_1 l'evento "Il Signor Rossi prende il primo treno" e A_2 l'evento "Il Signor Bianchi prende il primo treno". Allora:

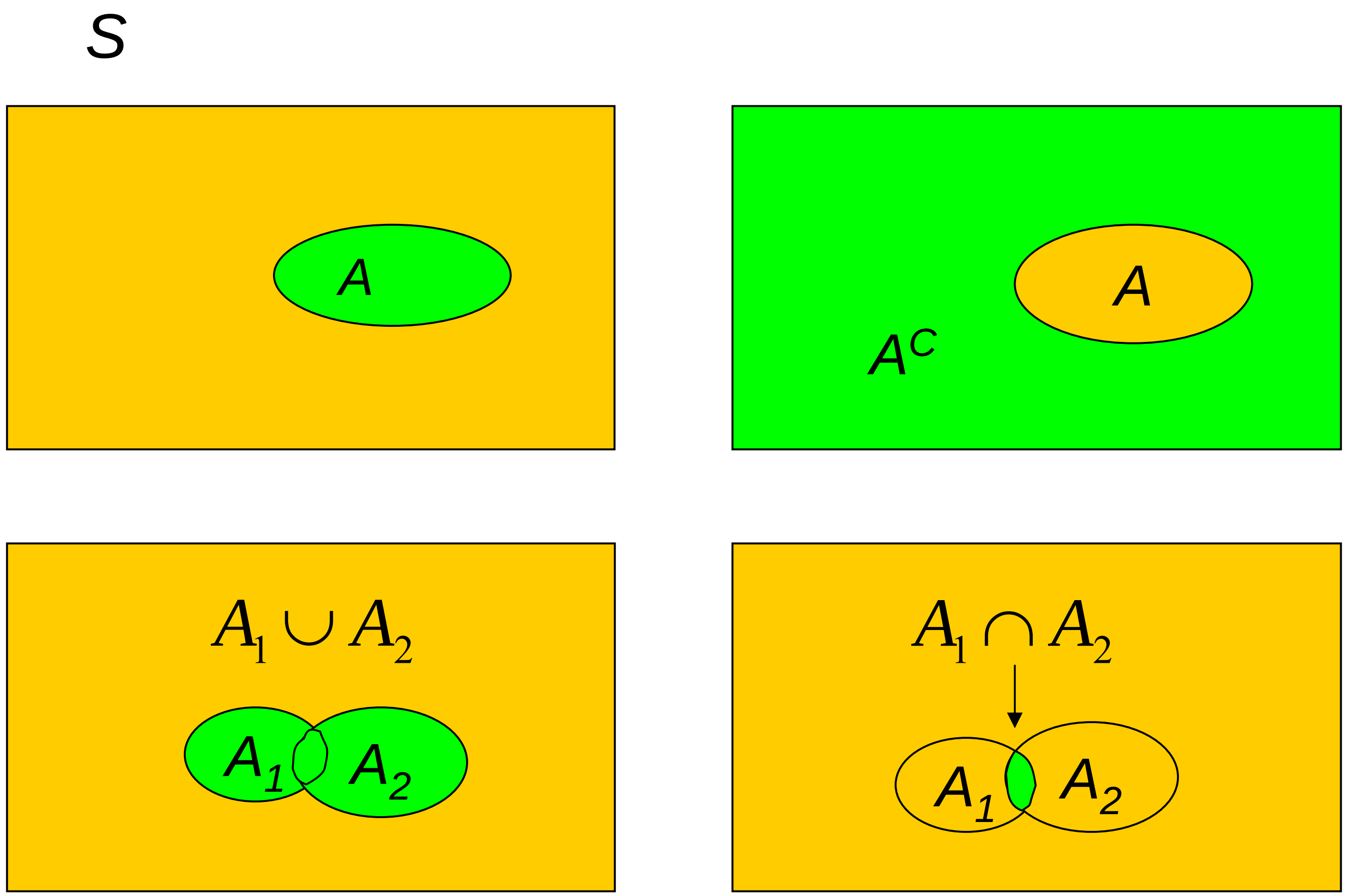
  - l'evento A_1^C= "Il Signor Rossi perde il primo treno";

  - l'evento $A_1 \cap A_2$ = "I Signori Rossi e Bianchi prendono il primo treno",

  - l'evento $A_1 \cup A_2$ = "Il Signor Rossi o il Signor Bianchi prendono il primo treno";

  - l'evento $A_1^C \cap A_2^C$ = "Nè il Signor Rossi nè il Signor Bianchi prendono il primo treno";

Diagrammi di Venn



Proprietà della Probabilità

$$P(A^C) = 1 - P(A), A \subseteq S$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2),$$

$$A_1, A_2 \subseteq S$$

Esempi

- **Esempio 3**: nel lancio di una moneta non truccata i possibili risultati sono ``Testa'', T e ``croce'', C , cioè S= {T, C} e P(T)=P(C) =1/2 .
- **Esempio 4**: nel lancio di un dado non truccato i possibili risultati sono S= {1,2,3,4,5,6} e P(1)=P(2) =P(3) = P(4) = P(5) = P(6) =1/6. Sia A l'evento ``Il risultato del lancio è un numero pari'', allora P(A)=1/2 .

Probabilità condizionata

Dato uno spazio di probabilità S ed un evento B tale che P(B) >0 , si definisce probabilità condizionata dell'evento A , dato B (sapendo che si è verificato l'evento B).

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Fissato l'evento *B*, $P(\cdot \mid B)$ è ancora una probabilità sullo spazio campionario *B* (invece di *S*).

Esempio

- **Esempio 5.** Supponiamo di avere un gruppo di dieci persone, delle quali 4 indossano un impermeabile e 5 hanno un ombrello. Siano 3 le persone che hanno entrambi (impermeabile ed ombrello).

a) Quale la probabilità che una persona con l'ombrello abbia anche l'impermeabile?

b) Quale la probabilità che una persona abbia l'ombrello o l'impermeabile?

Svolgimento

Svolgimento:

a) Invece di considerare il gruppo di dieci persone consideriamo il sottogruppo delle persone con l'ombrello, che è composto da 5 elementi, di cu 3 hanno anche l'ombrello. Se indichiamo con A l'evento ``la persona ha l'impermeabile'' e con B l'evento ``la persona ha l'ombrello'', otteniamo:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5}$$

Eventi indipendenti

b)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Def.: Dato uno spazio di probabilità, due eventi A e B di esso si dicono indipendenti se

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Esempio 6. Gli eventi A e B dell'esempio sopra sono dipendenti. Infatti P(A)= 4/10 e P(B)= 5/10=1/2 e

$$P(A\cap B)=\frac{3}{10}\neq P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{10}$$

Esercizio

- **Esercizio**. La probabilità che un gatto viva 12 anni è 1/4, la probabilità che un cane viva 12 anni è 1/3.
- Dati un cane ed un gatto appena nati, calcolare la probabilità che:
  a) il gatto non sia vivo fra 12 anni.
  b) siano entrambi vivi fra 12 anni;
  c) almeno uno sia vivo fra 12 anni;
  d) nessuno dei due sia vivo fra 12 anni.

Svolgimento

Sia A l'evento “il gatto sia vivo tra 12 anni” e B l'evento “il cane sia vivo tra 12 anni".

a) $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 1/4 = 3/4$.

b) Gli eventi A e B sono indipendenti.
Quindi si può applicare la proprietà:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

c) L'evento “almeno uno sia vivo fra 12 anni” è l'evento composto, per cui deriva che

Svolgimento

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

d) L'evento “nessuno dei due sia vivo fra 12 anni” è il complementare dell'evento *A U B*, quindi
P($((AUB)^C$) = 1 - P(AUB) = 1 - 1/2= 1/2.

Formula di Bayes

- Scambiando i ruoli di *A* e *B* e supponendo che *P(A)>0* si ottiene la Formula di Bayes:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

  - *P(B|A)* si chiama probabilità aposteriori;
  - *P(B)* si chiama probabilità apriori;
  - *P(A|B)* si chiama verosimiglianza;
  - Il valore della verosimiglianza più o meno grande significa che la conoscenza dell'evento *B* rende più o meno grande la probabilità di *A*.
  - Si utilizza la formula di Bayes soprattutto quando *B* costituisce una causa nel senso di evento dal quale il verificarsi di *A* dipende in modo diretto e facilmente valutabile, mentre *A* rappresenta l' effetto.

Formula delle probabilità totali

- Supponiamo di avere una partizione finita $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ di eventi, con $P(H_i)>0$ per ogni $i=1, 2, \ldots, n$. Dalla definizione di probabilità condizionata si ottiene la formula delle probabilità totali:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)\cdot P(H_i)$$

Esempio

- In un sistema di trasmissione dei simboli binari 0 e 1 si è potuto stabilire che lo 0 viene trasmesso con il 60% delle volte e che, se viene trasmesso lo 0, a causa del rumore lungo il canale di trasmissione viene correttamente ricevuto lo 0 il 70% delle volte. Qual' è la probabilità che venga trasmesso 0 e ricevuto 1?
- Consideriamo gli eventi
  – T_0="viene trasmesso 0"
  – T_1="viene trasmesso 1"
  – R_0="viene ricevuto 0"
  – R_1="viene ricevuto 1"
- Sappiamo che $P(T_0)=0,6$ e che $P(R_0|T_0)=0,7$. Allora poiché l'evento R_1 è il complementare di R_0 e pochè $P(\cdot \mid T_0)$ è una probabilità, si ha

$$P(T_0 \cap R_1) = P(R_1 \mid T_0) \cdot P(T_0) = (1 - P(R_0 \mid T_0)) \cdot P(T_0) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$$

Esempio

- Calcoliamo ora la probabilità degli eventi R_0 e R_1, sapendo che P(R_0| T_1)=0,2. Gli eventi {R_0, R_0} formano una partizione di *S*. Applicando la formula delle probabilità totali si ottiene

$$P(R_0)=P(R_0\,|\,T_0)\cdot P(T_0)+P(R_0\,|\,T_1)\cdot P(T_1)=0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}5$$

$$P(R_1)=1-P(R_0)=0{,}5$$

Formula di Bayes generalizzata

- Data una partizione finita $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ di eventi, con $P(H_i)>0$ per ogni $i=1, 2, \ldots, n$. Dalla formula delle probabilità totali e dalla formula di Bayes si ottiene la formula di Bayes generalizzata:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid H_j) \cdot P(H_j)}, i = 1, 2, \ldots, n$$

- Supponiamo di avere una *n*-pla di eventi (ipotesi o cause esaustive) a due a due disgiunte, e di conoscere la loro probabilità apriori e supponiamo che si sia verificato un evento (effetto) del quale siano date le probabilità condizionate a ciascuna delle ipotesi. Allora la formula sopra consente di aggiornare la probabilità di ciascuna delle ipotesi condizionatamente all'evento osservato.

Esempio precedente

- Con riferimento all'esempio precedente supponiamo che sia stato ricevuto il segnale 0. Qual è la probabilità che non ci sia stato errore di trasmissione?
- Si deve calcolare

$$P(T_0 \mid R_0) = \frac{P(R_0 \mid T_0) \cdot P(T_0)}{P(R_0)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}6}{0{,}5} = 0{,}84$$

- In tal caso il segnale trasmesso rappresenta la causa e quello ricevuto l'effetto.

Variabili aleatorie

- Dato uno spazio di probabilità una Variabile aleatoria (v.a.) è una funzione che associa un valore numerico a ciascun evento.
- Essa può essere discreta se l'insieme dei valori che può assumere è discreto, altrimenti è continua .
- Data una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori $x_1, ..., x_n$ possiamo associare ad ogni valore la probabilità che assuma quel valore, cioè

  $p_i = P(X=x_i), \quad i=1, ..., n$.
- L'insieme $\{p_1, ..., p_n\}$ è detto distribuzione di probabilità della variabile aleatoria. Dagli assiomi di probabilità si ha che $p_1+ ..., +p_n=1$.

Esempi

- **Esempio 7**. Sia X la variabile aleatoria che misura il numero di T (testa) in 3 lanci di una moneta non truccata. Allora i possibili valori che X può assumere sono {0,1,2,3} lo spazio degli eventi è

C	**C**	**C**
T	**C**	**C**
C	**T**	**C**
C	**C**	**T**
C	**T**	**T**
T	**C**	**T**
T	**T**	**C**
T	**T**	**T**

Esempio

e la distribuzione di probabilità è la seguente:

x_i	p_i
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Valore atteso di una v.a.

Valore atteso o media della v.a. X : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Proprietà

1) $E(C)=C$ se C e la v.a.costante;
2) $E(X)\geq 0$ se $X\geq 0$;
3) $E(a_1 X_1+ a_2 X_2)= a_1 E(X_1)+ a_2 E(X_2)$, per ogni v.a. X_1, X_2 *e per ogni costante* a_1, a_2.

Nell'esempio precedente il valore aspettato è

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

Quarta lezione

Strategia mista.
Equilibrio di Nash

Strategia mista. Equilibrio di Nash

- Una strategia pura specifica un piano di azione deterministico per un giocatore. Una strategia mista di un giocatore specifica che una scelta di strategia pura viene fatta casualmente dall’insieme delle strategie pure di quel giocatore, con specifiche probabilità.
- Se il gioco è ripetuto non conviene adottare la stessa strategia.
- Se un giocatore in un gioco con *n* partecipanti ha un numero finito di pure strategie, Nash ha provato che esiste almeno un punto di equilibrio per le strategie miste.
- Nelle strategie pure e miste i punti di equilibrio potrebbero anche coesistere,

Gioco del Tennis

- Paolo e Mario giocano a tennis.
- Supponiamo che Paolo abbia fatto un volée a fondo campo. Potrebbe farlo in lungo linea (LL) oppure incrociando il colpo (IN). D'altra parte Mario non sa se aspettarsi un colpo in (LL) e prepararsi da quella parte oppure un colpo (IN) e prepararsi dall'altra parte e a sua volta potrebbe rispondere con un (LL) o un (IN). Potremmo supporre che tale gioco sia simultaneo (ciascun giocatore nasconde la propria strategia fino all'ultimo momento).
- I pagamenti in questo gioco sono le frequenze con cui un giocatore vince il punto in ogni combinazione di colpo passante e di copertura di colpo passante.

Forma strategica

Mario

Paolo

	(LL)	(IN)
(LL)	50,50	80,20
(IN)	90,10	20,80

La pura strategia non è vincente

- Usando il metodo di ispezione cella per cella, si può vedere che non ci sono punti di equilibrio di Nash per la strategia pura.
- In tal caso è meglio comportarsi in modo non deterministico usando la strategia mista.

Mario

Paolo

	(LL)	(IN)
(LL)	50,50	80,20
(IN)	90,10	20,80

La strategia mista

- Sia p la probabilità che Paolo scelga (LL)

$$p= P_{Paolo}(LL),$$

così che la probabilità che scelga (IN) è 1-p.

- Sia q la probabilità che Mario si disponga in posizione (LL), così che la probabilità che si disponga in (IN) è 1-q

$$q= P_{Mario}(LL),$$

- Aggiungiamo quindi le generiche strategie miste p-mix e q-mix alla tabella precedente.

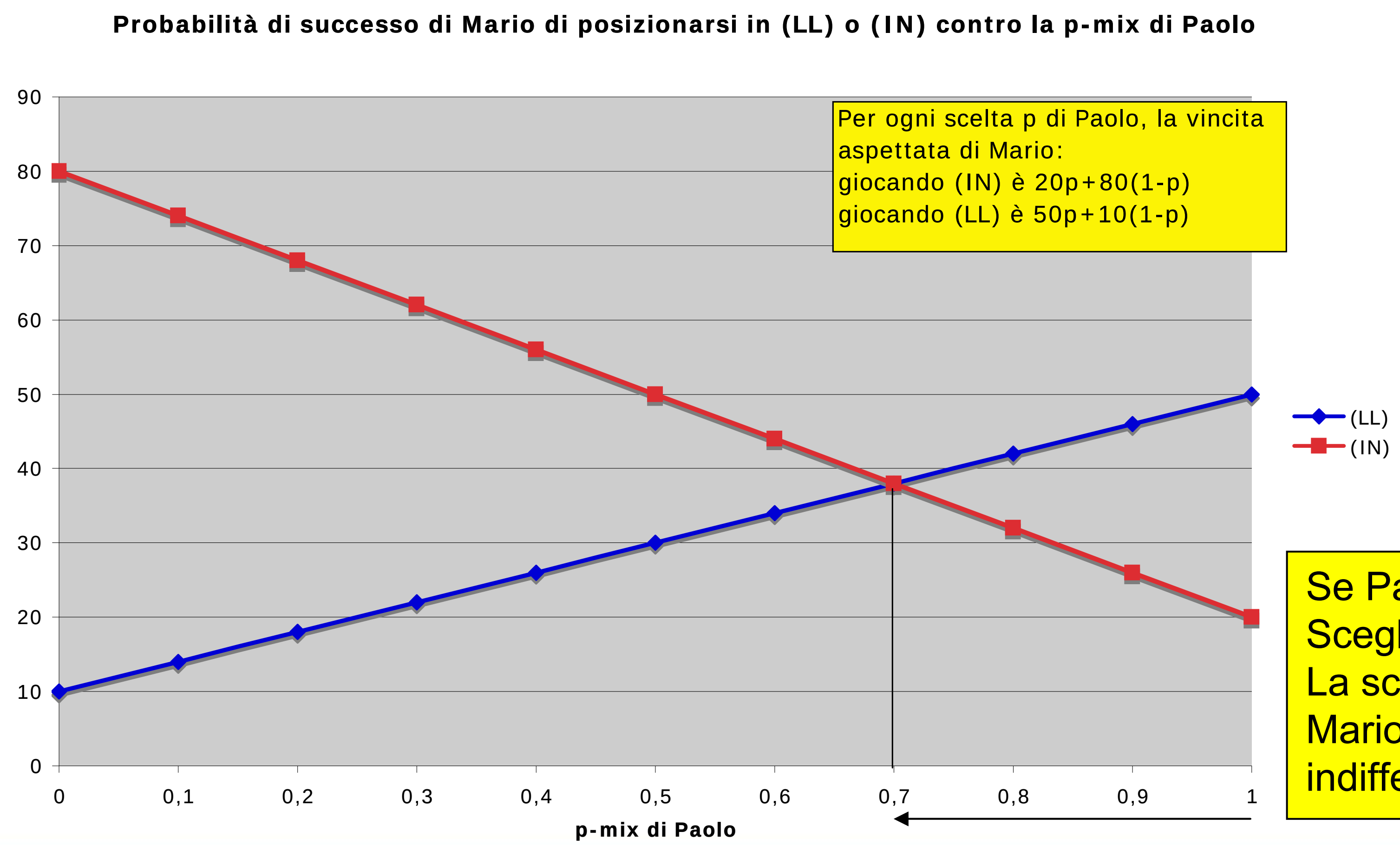
La strategia vincente

Mario

Paolo

	(LL)	(IN)	q-mix
(LL)	50,50	80,20	50q+80(1-q) 50q+20(1-q)
(IN)	90,10	20,80	90q+20(1-q) 10q+80(1-q)
p-mix	50p+90(1-p) 50p+10(1-p)	80p+20(1-p) 20p+80(1-p)	

Migliore scelta di p per Paolo (riga)



Se Paolo Sceglie p=0,7 La scelta di Mario è indifferente

- Scegliamo p in modo da uguagliare le vincite che il proprio avversario potrebbe ricevere giocando le due strategie pure.
- Quindi è necessario capire come la vincita del proprio avversario vari con p.

Algebricamente

- Paolo sceglie il valore di p che uguaglia la vincita di Mario nel posizionarsi in (LL) o (IN):

$$50p + 10(1-p) = 20p + 80(1-p) \Rightarrow$$

$$50p + 10 - 10p = 20p + 80 - 80p \Rightarrow$$

$$40p + 10 = 80 - 60p \Rightarrow$$

$$40p + 60p = 80 - 10 \Rightarrow$$

$$100p = 70 \Rightarrow$$

$$p = \frac{70}{100} = 0,7$$

…

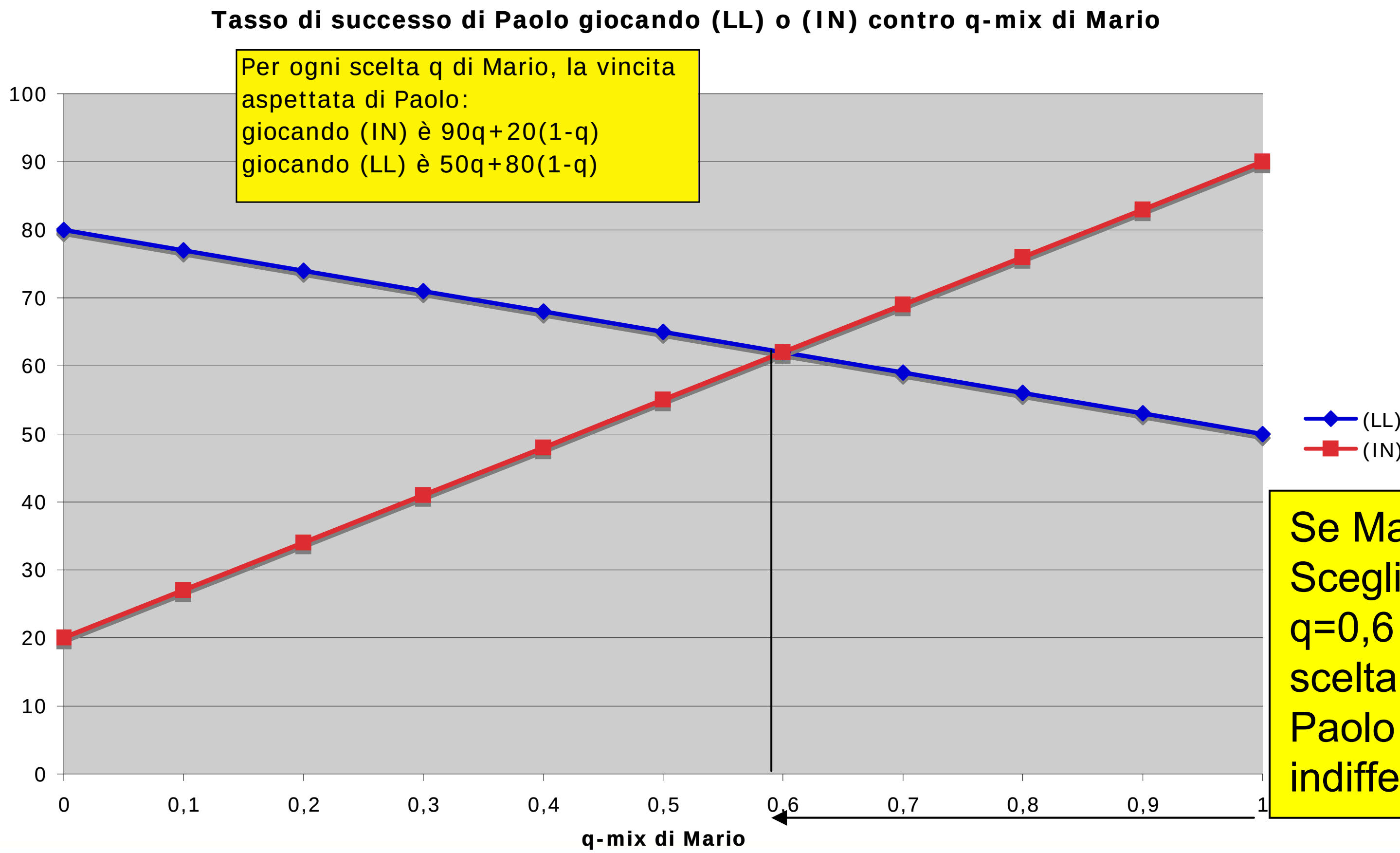
- Se Paolo sceglie (LL) con probabilità 0,7 e (IN) con probabilità 1-p=0,3, allora il tasso di successo di Mario è

(LL)=50(70%)+10(30%)=38%

(IN)=20(70%)+80(30%)=38%

- Poiché il gioco è a somma costante (100%) il tasso di successo di Paolo = 100%- tasso di successo di Mario= 100%-38%=62%.

Migliore scelta di q per Mario (colonna)



Se Mario Sceglie q=0,6 la scelta di Paolo è indifferente

- Scegliamo q in modo da uguagliare le vincite che il proprio avversario potrebbe ricevere giocando le due strategie pure.
- Quindi è necessario capire come la vincita del proprio avversario vari con q.

Algebricamente

- Mario sceglie il valore di q che uguaglia la vincita di Paolo nel posizionarsi in (LL) o (IN):

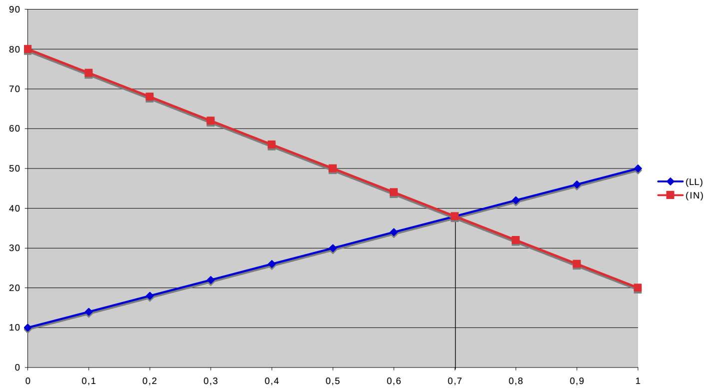
$$50q + 80(1-q) = 90q + 20(1-q) \Rightarrow$$
$$50q + 80 - 80q = 90q + 20 - 20q \Rightarrow$$
$$-30q + 80 = 20 + 70q \Rightarrow$$
$$-100q = -60 \Rightarrow$$
$$100q = 60 \Rightarrow$$
$$q = \frac{60}{100} = 0{,}6$$

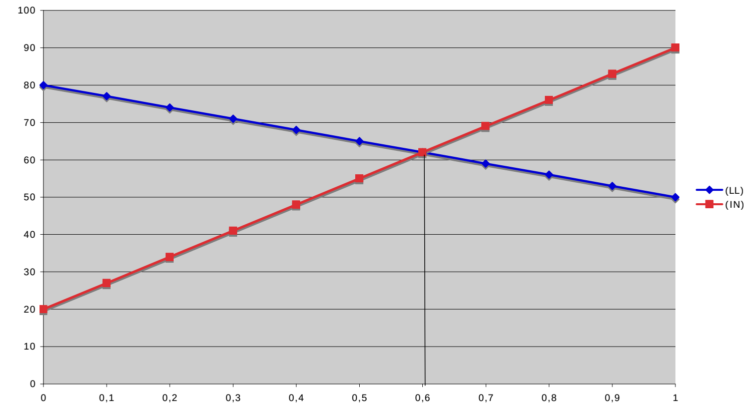
L'equilibrio della strategia mista

- L'equilibrio di Nash per una strategia mista in un gioco con 2 giocatori e 2x2 possibili scelte è $p>0$ e $q>0$ tali che p è la migliore risposta del giocatore di riga alla scelta del giocatore di colonna, q è la migliore risposta del giocatore di colonna alla scelta del giocatore di riga.
- Per $p=0,7$ e $q=0,6$, la vincita di Paolo è 62% e quella di Mario 38%.
- Le strategie pure sono strategie miste degeneri in cui $p=0,1$ e $q=0,1$. P.e. per p=0 e q=1 il giocatore di riga gioca sempre (IN) e quello di colonna sempre (LL).

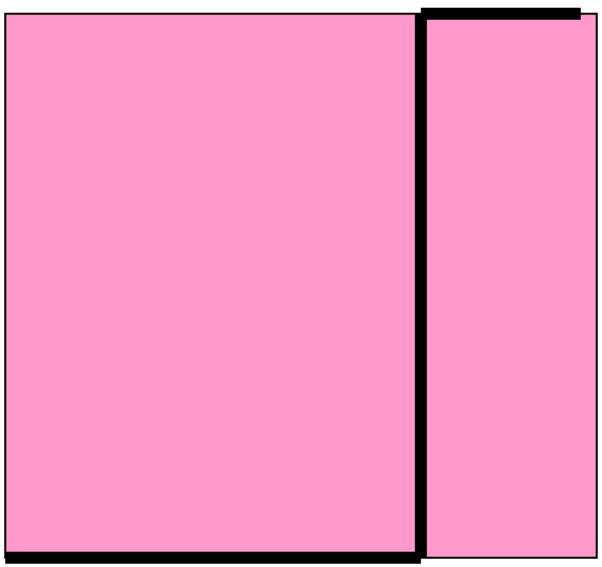
- Lo stesso obiettivo funziona anche per trovare equilibri della strategia mista nei giochi a somma non costante.

Funzioni della risposta ottimale



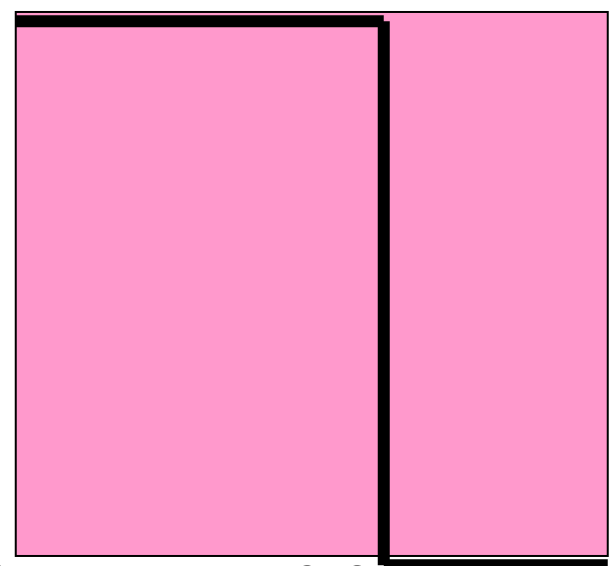


q=f(p)



0 p=0,7 1

p=g(q)



0 q=0,6 1

Funzioni di risposta ottimale

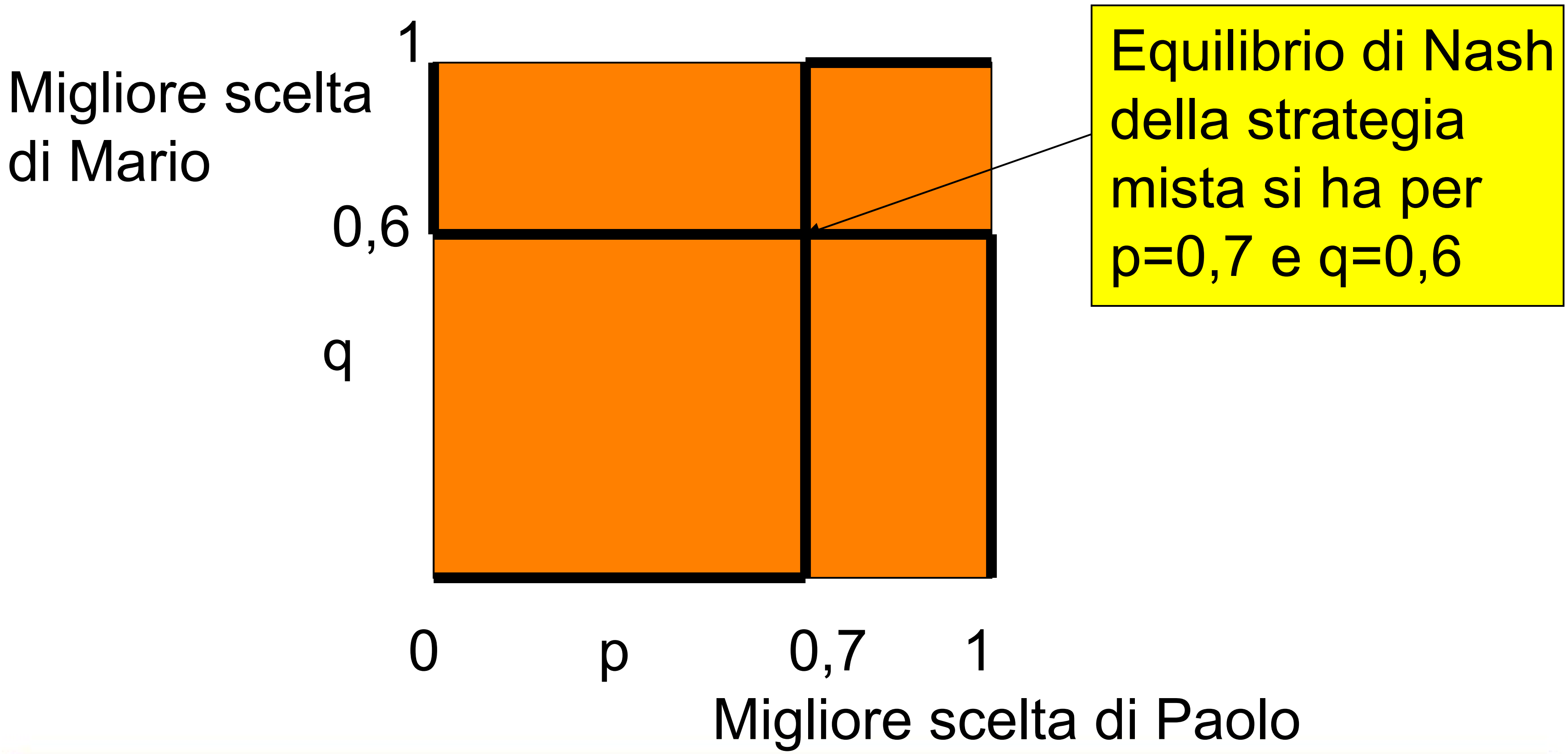
- Le funzioni di migliore risposta strategica

  q=f(p) Paolo

  p=g(q) Mario
- Se p=q=0 entrambi i giocatori scelgono (IN), mentre per p=q=1 la scelta di entrambi è (LL).
- Se $0 \leq p < 0{,}7$ allora la migliore risposta strategica di Mario è q=0 che corrisponde a (IN) perché la vincita è migliore (nel grafico la retta che corrisponde a (IN) è sopra a (LL)), mentre se $0{,}7 < p \leq 1$ allora la migliore risposta strategica di Mario è q=1 che corrisponde a (LL) perché la vincita è migliore.
- Se $0 \leq q < 0{,}6$ allora la migliore risposta strategica di Paolo è p=1 che corrisponde a (LL) perché la vincita è migliore (nel grafico la retta che corrisponde a (LL) è sopra a (IN)), mentre se $0{,}6 < q \leq 1$ allora la migliore risposta strategica di Paolo è p=0 che corrisponde a (IN) perché la vincita è migliore.

Equilibrio di Nash

Nella strategia pura (p=q=0 e p=q=1) non ci sono punti di equilibrio.



Gioco dell'Introduzione nel Mercato (somma non nulla)

- Due ditte A e B devono decidere se aprire uno dei loro ristoranti in un centro commerciale. Le strategie sono "Aprire" e "Non aprire".
- Se entrambe le ditte scelgono "Non aprire" il profitto di entrambe sarà 0.
- Se una ditta decide di non aprire il ristorante mentre l'altra lo apre, allora il profitto della ditta che sceglie "Aprire" avrà un profitto di $300.000 mentre l'altra non avrà profitto.
- Se entrambe le ditte decidono di aprire un ristorante, entrambe perderanno $100.000 perché non c'è abbastanza domanda per due ristoranti cosicchè il loro profitto non sarà positivo.

Forma strategica. Ci sono equilibri di Nash?

Unità di misura
$100.000

Ditta 2

Ditta 1

	Aprire	Non aprire
Aprire	-1,-1	3,0
Non aprire	0,3	0,0

Ispezione cella per cella: due strategie pure di equilibrio

Unità di misura $100.000

Ditta 2

Ditta 1

	Aprire	Non aprire
Aprire	-1,-1	3,0
Non aprire	0,3	0,0

Strategie miste

- La Ditta 1 (2) vuole scegliere con probabilità p (q) in modo che sia indifferente se la Ditta 2 (1) scelga “Aprire” o “Non aprire”.
- La Ditta 1 sceglie con probabilità p in modo che la vincita della Ditta 2 sia la stessa con “Aprire” e “Non aprire”.

Ditta 2

Ditta 1

	Aprire	Non aprire	q-mix
Aprire	-1,-1	3,0	-q+3(1-q) -q
Non aprire	0,3	0,0	0 3q
p-mix	-p -p+3(1-p)	3p 0	

Algebricamente

- Ditta 1:

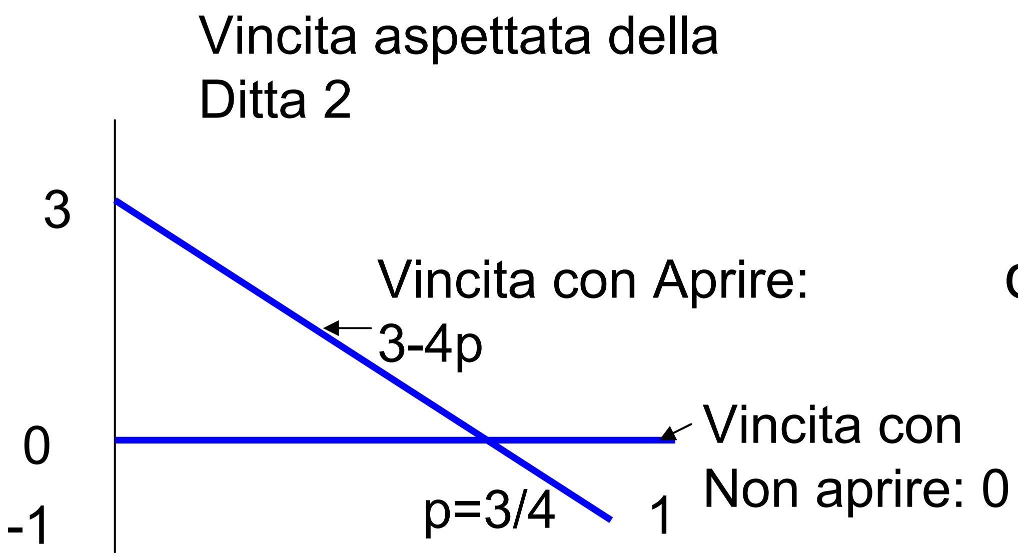
  $-p+3(1-p)=0 \Rightarrow -p-3p=-3 \Rightarrow 4p=3 \Rightarrow p=3/4$

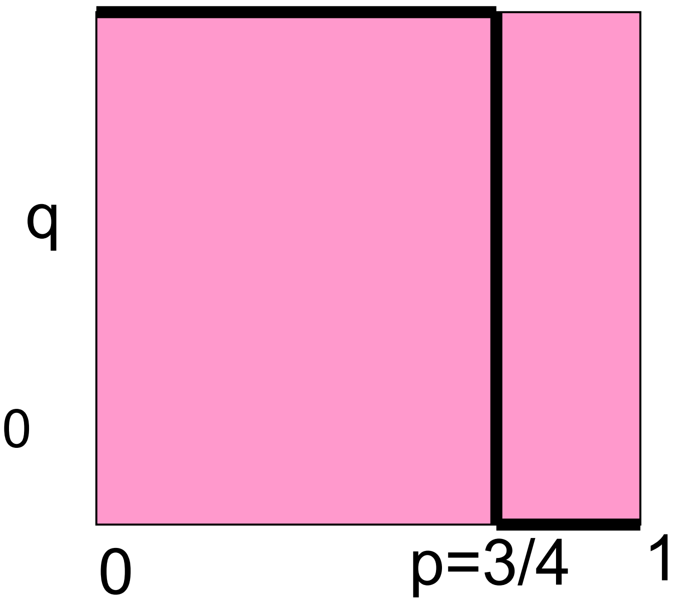
- Ditta 2:

  $-q+3(1-q)=0 \Rightarrow -q-3q=-3 \Rightarrow 4q=3 \Rightarrow q=3/4$

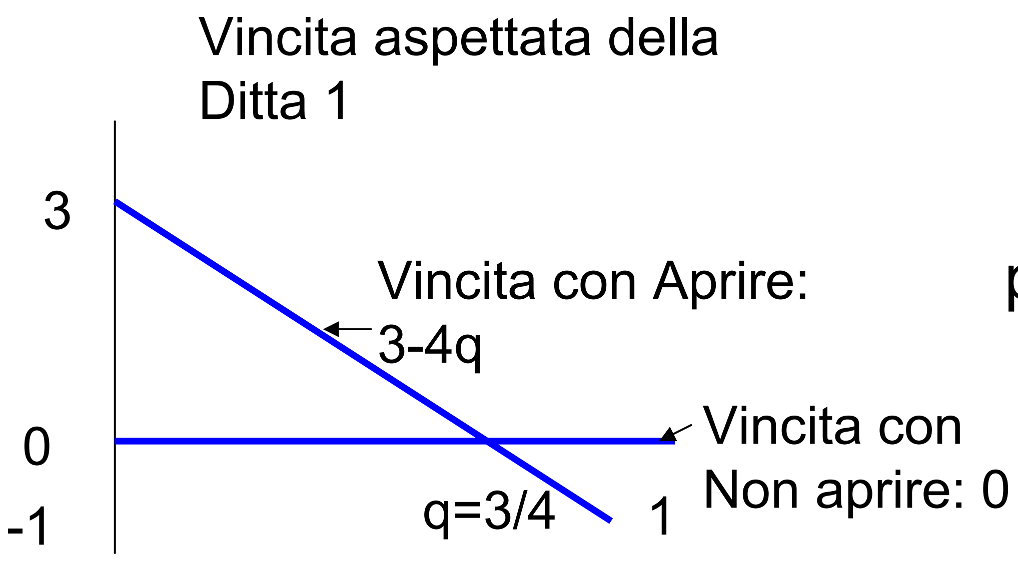
- Il punto di equilibrio di Nash per la strategia mista è che entrambe le ditte decidano di Aprire con probabilità 3/4 e di Non aprire con probabilità 1/4

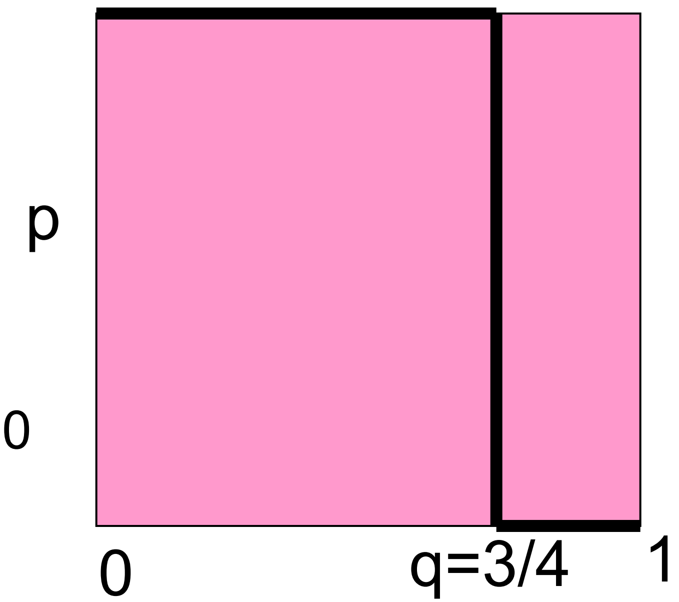
Graficamente



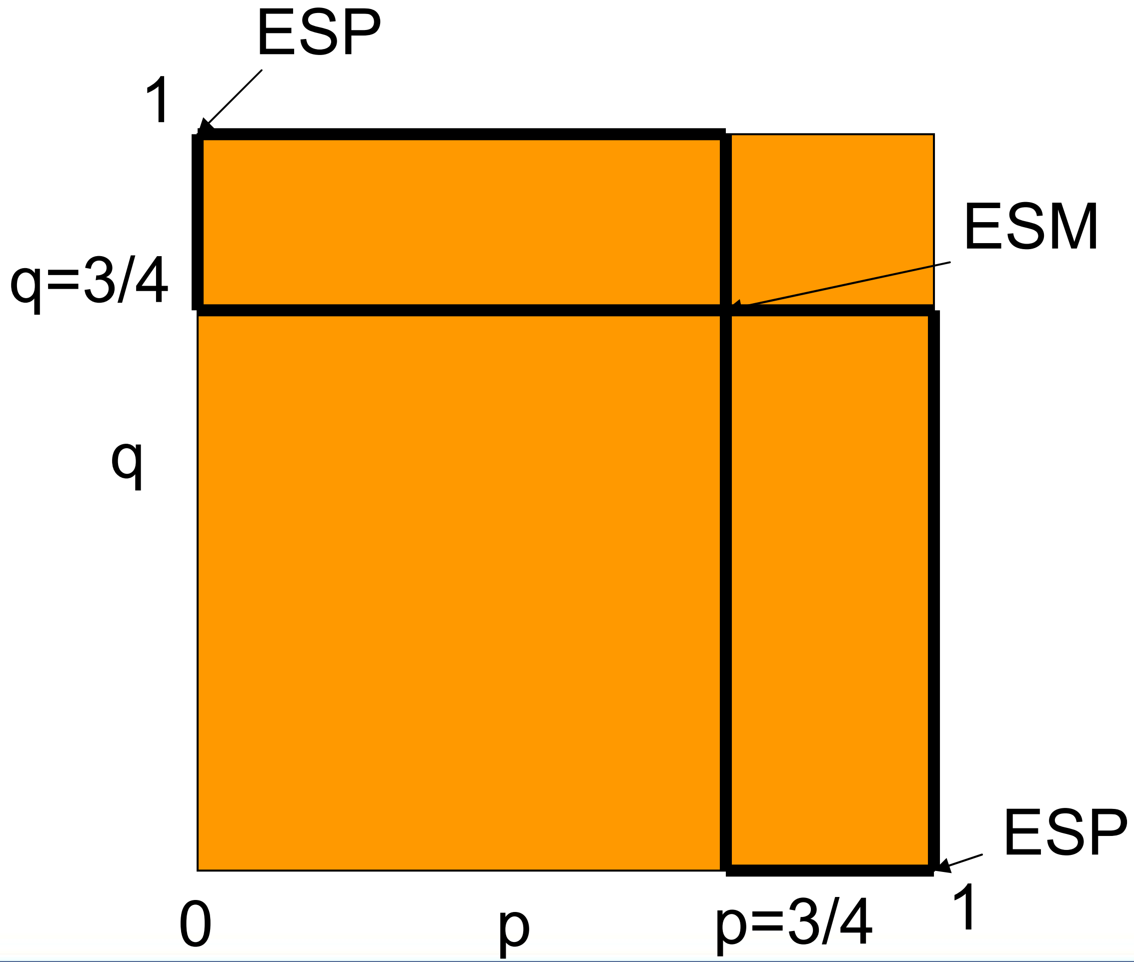


Simmetricamente





Equilibrio di Nash per la strategia mista



ESP=Equilibrio Strategia Pura
ESM=Equilibrio Strategia Mista

Vincita aspettata

- Entrambe le ditte decidono di aprire con probabilità 3/4x3/4 =9/16 (equilibrio);
- La Ditta 1 decide di aprire e la Ditta 2 no con probabilità 3/4x1/4=3/16;
- La Ditta 2 decide di aprire e la Ditta 1 no con probabilità 3/4x1/4=3/16;
- Entrambe decidono di non aprire con probabilità

  1/4x1/4=1/16
- Vincita aspettata della Ditta 1:

  -1x9/16+3x3/16+0x3/16+0x1/16=0

  Per la Ditta 2 è ancora 0.

Equilibrio di asimmetriche strategie miste

- Supponiamo che la Ditta 1 abbia vantaggio competitivo sulla Ditta 2: se la Ditta 1 apre da sola il suo profitto è $400.000. Per il resto è lo stesso:
- I punti di equilibrio per la strategia pura rimangono gli stessi: (A,NA) e (NA,A).

Ditta 1 \ Ditta 2	Aprire	Non aprire
Aprire	-1,-1	4,0
Non aprire	0,3	0,0

Strategie miste

- Poiché il profitto della Ditta 2 non cambia la scelta di p è la stessa, p=3/4
- L'equazione per q è

  -q+4(1-q)=0 => 4=5q => q=4/5
- Entrambe le ditte decidono di aprire con probabilità 3/4x4/5 =3/5 (equilibrio);
- La Ditta 1 decide di aprire e la Ditta 2 no con probabilità 4/5x1/4=1/5;
- La Ditta 2 decide di aprire e la Ditta 1 no con probabilità 1/5x3/4=3/20;
- Entrambe decidono di non aprire con probabilità

  1/4x1/5=1/20
- Vincita aspettata della Ditta 1:

  -1x1/5+4x1/5+0x3/20+0x1/20=3/5