Progetto Lauree Scientifiche

Iacopo Malaspina

Consideriamo il caso di un bagnino che debba salvare una persona in acqua. Partendo dalla posizione $A = (0, 5)$ deve arrivare al bagnante in pericolo nel punto $B = (26, -5)$.

Qual è il percorso che gli permetterà di arrivare alla persona in minor tempo possibile?

La situazione è descritta nel seguente grafico.

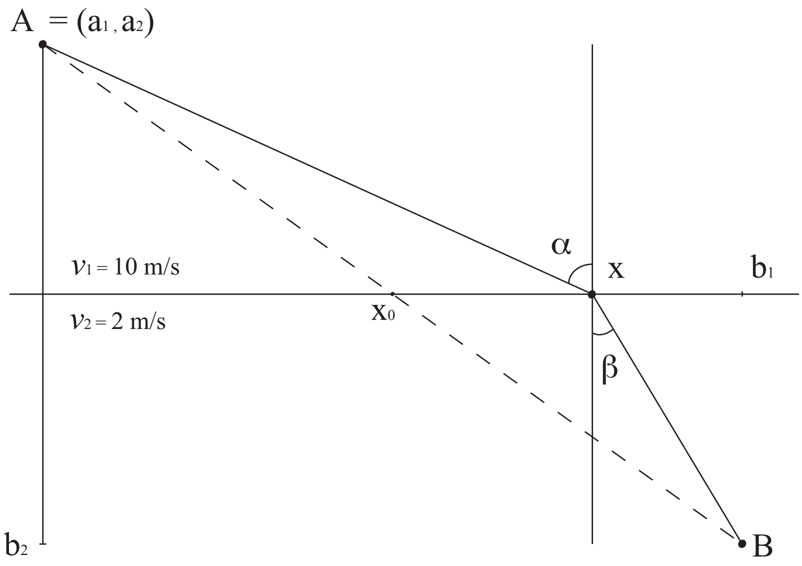

Figura 1: Ipotetica situazione

Prendendo come incognita proprio x, punto di passaggio sull' asse delle ascisse, cerchiamo quel punto tale per cui il tempo per andare da A a B è minimo.

Quest'ultimo è dato dai secondi impiegati per andare da A a X e da X a B quindi dalla seguente funzione

$$f(x) = \frac{\overline{Ax}}{v_1} + \frac{\overline{Bx}}{v_2}$$

dove v_1 e v_2 sono le rispettive velocità del bagnino sulla terra e in acqua, specificate in figura 1.
Esplicitiamo la funzione in x $\Big(\text{con } X = (x, 0)\Big)$

$$\overline{Ax} = \sqrt{{a_2}^2 + x^2}$$

$$\overline{Bx} = \sqrt{(b_1 - x)^2 + {b_2}^2}$$

Quindi la funzione da minimizzare è

$$f(x) = \frac{\sqrt{{a_2}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b_1 - x)^2 + {b_2}^2}}{v_2}$$

Si chiami $g = v_1 \cdot f$.
Sapendo che il rapporto tra v_1 e v_2 è 5

$$g(x) = \sqrt{{a_2}^2 + x^2} + 5 \cdot \sqrt{(b_1 - x)^2 + {b_2}^2}$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \left(\frac{2}{2 \cdot \sqrt{{a_2}^2 + x^2}}\right) \cdot x + 5 \cdot \frac{2 \cdot (x - b_1)}{2 \cdot \sqrt{(x - b_1)^2 + {b_2}^2}} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\iff \frac{x}{\sqrt{{a_2}^2 + x^2}} &= \frac{(b_1 - x) \cdot 5}{\sqrt{(b_1 - x)^2 + {b_2}^2}} \\
\iff x^2 \cdot \left((b_1 - x)^2 + {b_2}^2 \right) &= (b_1 - x)^2 \cdot ({a_2}^2 + x^2) \cdot 25
\end{aligned}
$$

ma $b_1 - x = 1$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow x^2 \cdot (1 + {b_2}^2) &= 25 \cdot ({a_2}^2 + x^2) \\
\Longrightarrow 26 \cdot x^2 &= 25 \cdot (25 + x^2) \\
\Longrightarrow x^2 &= 25 \cdot 25 \\
\Longrightarrow x &= 25
\end{aligned}
$$

Quindi il nostro punto di minimo è $x = 25$.

Vediamo quanto tempo impiega il bagnino ad arrivare alla persona in pericolo passando per l'x così trovato:

$$
\begin{aligned}
f(25) &= \frac{\sqrt{25 + 625}}{10} + \frac{\sqrt{1 + 25}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{650}}{10} + \frac{\sqrt{26}}{2} \approx 2,55 + 2,55 = 5,1 sec
\end{aligned}
$$

Mentre passando per il punto $x_0 = 13$, cioè andando in linea retta:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\sqrt{169 + 25}}{10} + \frac{\sqrt{169 + 25}}{2} \\
&= 1,4 + 7 = 8,4 sec
\end{aligned}
$$

Quindi in sostanza sono ben $3,3 sec$ di differenza.

Supponiamo ora che il bagnino corra molto più lentamente, con $v_1 = 2,4m/s$ e nuoti invece con la stessa velocità $v_2 = 2m/s$.

Partendo da $A = (0,5)$ deve arrivare in $B = (26,-5)$.

Procedendo con lo stesso calcolo di prima troviamo che il minimo adesso è raggiunto in $x = 19$.

Perciò

$$\begin{aligned} f(19) &= \frac{\sqrt{25+361}}{2,4} + \frac{\sqrt{(26-19)^2+25}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{386}}{2,4} + \frac{\sqrt{74}}{2} \approx 8,18 + 4,3 = 12,48sec \end{aligned}$$

Mentre passando per $b_1 = 26$, cioè seguendo il percorso a puntini e non quello tratteggiato come nel caso precedente(vedi Figura 2):

$$T = \frac{\sqrt{25+676}}{2,4} + \frac{\sqrt{25}}{2} \approx 11,03 + 2,5 = 13,53sec$$

Quindi anche in questo caso ci sono $1,05sec$ di differenza.

Abbiamo dimostrato che, contrariamente a quanto spesso si pensa, non si arriva prima ne passando per x_0, ossia in linea retta, ne passando per b_1, ma passando per x seguendo un particolare schema che vedremo essere quello della rifrazione.

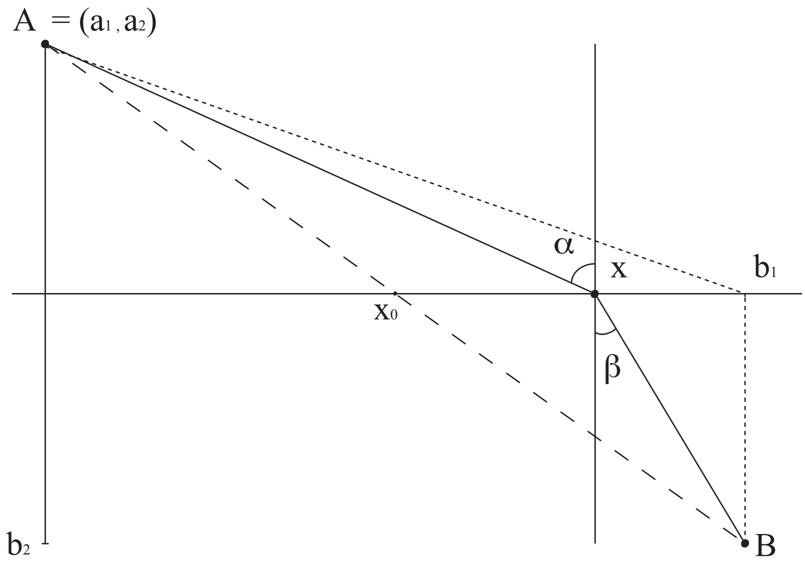

Figura 2: Schema riassuntivo