Il Problema Di Steiner

Iacopo Malaspina

Ci proponiamo di trovare tra tutte le curve di lunghezza fissata L quella che racchiude la porzione di piano più grande.

Affronteremo il problema allo stesso modo del matematico Steiner, partendo dall'ipotesi che una soluzione esista.

Supponiamo che la curva C sia la soluzione del nostro problema, cioè sia la curva di lunghezza assegnata L e di area massima. Questa curva dovrà per forza essere convessa, nel senso che il segmento che congiunge due punti qualsiasi di C deve stare completamente all' interno o sul bordo di C.

Infatti se C non fosse convessa, come in figura 1, si potrebbe tracciare un segmento come $\overline{OP}$ che congiunge i punti O e P di C.

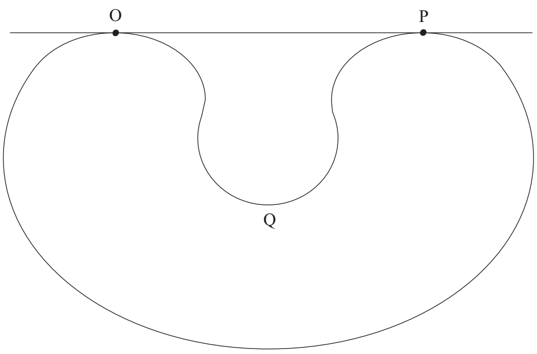


Figura 1: Curva concava

Riflettiamo l'arco OQP rispetto il segmento $\overline{OP}$ e consideriamo l'area della figura così ottenuta.

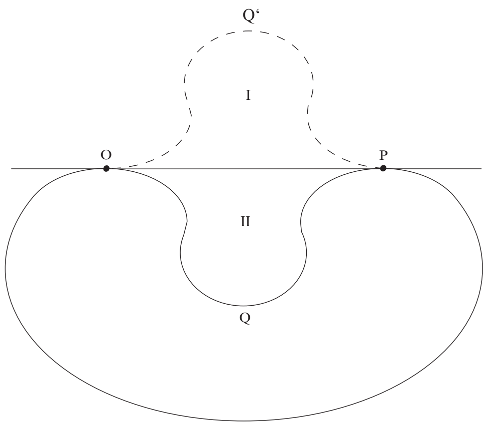


Figura 2: Curva con area maggiore rispetto alla precedente

Essa è sicuramente maggiore rispetto alla precedente, infatti ha in più l'area I e II, e ciò va in contraddizione con il fatto che la curva C sia la soluzione del nostro problema, cioè la curva che racchiude l'area più grande.

Scegliamo ora due punti A e B che dividano la curva C in due archi di uguale lunghezza. La retta passante per A e per B deve dividere l'area di C in due parti uguali.

Se ciò non fosse vero potremmo riflettere l'area della parte maggiore rispetto la retta AB come in figura 3.

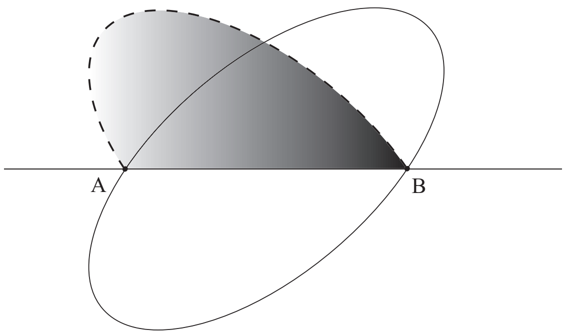


Figura 3: Area della parte maggiore riflessa rispetto la retta AB

Quindi avremmo una curva di lunghezza L come prima, ma con area più grande, che ancora una volta contraddice l'ipotesi secondo cui la curva C sia quella di area maggiore.

A questo punto cambiamo problema: *trovare l'arco di lunghezza $L/2$ avente i suoi estremi A e B su una retta, in modo tale che l'area compresa tra l'arco stesso e la retta sia massima.*

Si capisce che allora la soluzione del nostro nuovo problema è la meta della curva C.

Quindi prendiamo l'arco AOB come in figura 4 e inscriviamo in esso un triangolo AOB.

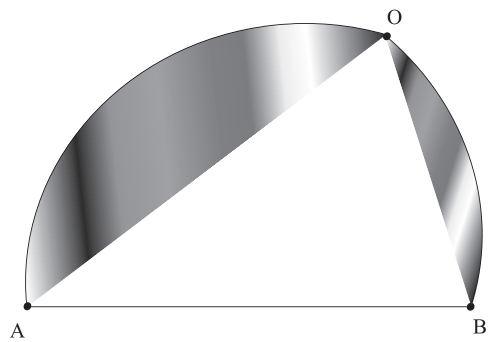


Figura 4: Arco AOB

Costruiamo un'altra figura in cui le aree colorate rimangano le stesse, come pure i lati AO e OB, mentre l'angolo $\widehat{AOB}$ è di 90° (Figura 5).

La lunghezza dell'arco AOB è rimasta uguale a $L/2$, ma l'area del triangolo AOB viene aumentata, perché un triangolo avente due lati lunghezza assegnata ha area massima quando l'angolo compreso fra essi è retto.

Possiamo ripetere questa dimostrazione per ogni punto O di C. Quindi alla fine avremo una curva con la proprietà che ogni angolo inscritto $\widehat{AOB}$ (associato ad ogni punto O) è retto e l'unica curva che gode di questa proprietà è il semicerchio.

Per finire basta ricondurci alla curva iniziale di lunghezza L. In questo modo abbiamo che la curva di lunghezza L che ha area massima è il cerchio.

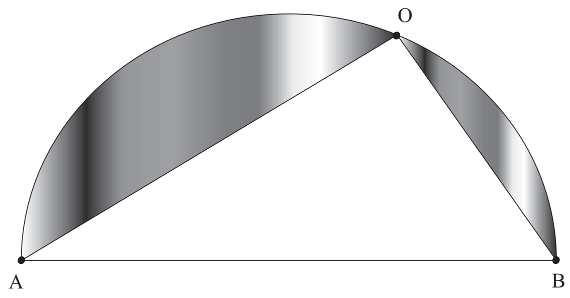
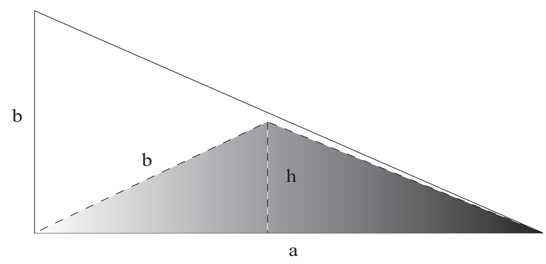


Figura 5: Figura in cui le aree colorate rimangano le stesse, come pure i lati AO e OB, mentre l'angolo $\widehat{AOB}$ è di 90°

Infine dimostriamo che il triangolo avente due lati fissati a e b di area massima è quello rettangolo. Consideriamo un qualsiasi triangolo avente due lati a e b come nella figura 6. Se h è l'altezza relativa alla base a, l'area è $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ah$. Ora $\frac{1}{2}ah$ è evidentemente massimo quando è massimo h, e questa accade quando h coincide con b, cioè per un triangolo rettangolo.



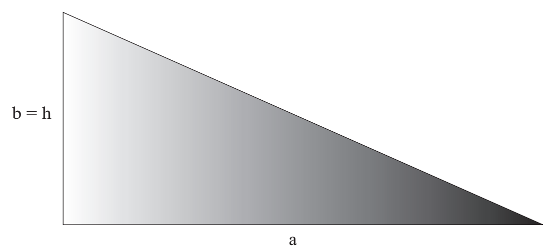


Figura 6: Triangoli aventi due lati fissati a e b