Università di Camerino – Facoltà di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2009/2010

VARIETÀ DIFFERENZIABILI

prof. Riccardo Piergallini

Primo semestre (5 ottobre 2009 – 29 gennaio 2010)

Registro delle lezioni

Lezione 1. (5 ottobre, 2 ore)
Intorduzione al corso. Richiami sulle varietà topologiche.

Lezione 2. (6 ottobre, 1 ora)
Richiami sulle funzioni differenziabili tra aperti euclidei, funzioni di classe C^k, funzioni differenziabili $= C^\infty$ (in questo corso), diffeomorfismi, differenziale e matrice jacobiana di una funzione, differenziale di funzioni composte (regola della catena).

Lezione 3. (7 ottobre, 1 ora)
Teorema della funzione inversa, intepretazione in termini di sistemi di equazioni, relazione con il teorema della funzione implicita.

Lezione 4. (12 ottobre, 2 ore)
Carte differenziabilmente compatibili, atlanti differenziabili e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura generata da un atlante. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m), prodotto di varietà differenziabili, quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenzaibili propriamente discontinue. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R.

Lezione 5. (13 ottobre, 1 ora)
Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili, varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa.

Lezione 6. (14 ottobre, 1 ora)
Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

Lezione 7. (19 ottobre, 2 ore)
Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3.

Lezione 8. (20 ottobre, 1 ora)
Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili; esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2.

Lezione 9. (21 ottobre, 1 ora)
Partizioni dell'unità differenziabili; teorema di approssimazione differenziabile; immersione differenziabile di varietà differenziabili in R^n.

Lezione 10. (26 ottobre, 2 ore)
Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni.

Lezione 11. (27 ottobre, 1 ora)
Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni. Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà.

Lezione 12. (28 ottobre, 1 ora)
Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

Lezione 13. (2 novembre, 2 ore)
Campi di vettori, parentesi di Lie e proprietà.

Lezione 14. (3 novembre, 1 ora)
Curve integrali per un campo di vettori. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati.

Lezione 15. (4 novembre, 1 ora)
Caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie.

Lezione 16. (9 novembre, 2 ore)
Forme differenziali lineari, k-forme differenziali, prodotto esterno e algebra di Grassmann.

Lezione 17. (10 novembre, 1 ora)
Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Lezione 18. (11 novembre, 1 ora)
Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità in aperti euclidei.

Lezione 19. (16 novembre, 2 ore)
Differenziale esterno, esistenza e unicità in varietà differenziabili. Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincarè (forma chiusa $\Rightarrow$ localmente esatta). Chiusi ammissibili. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiusio ammissibili di R^m.

Lezione 20. (17 novembre, 1 ora)
Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata. Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili.

Lezione 21. (18 novembre, 1 ora)
Forme di volume e orientazioni, integrale di una funzione su una varietà differenziabile con una forma di volume.

Lezione 22. (23 novembre, 2 ore)
Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes.

Lezione 23. (24 novembre, 1 ora)
Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^3.

Lezione 24. (25 novembre, 1 ora)
Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorame di Gauss, teorema di Stokes classico.

Lezione 25. (30 novembre, 2 ore)
Struttura differenziabile degli spazi tangenti e cotangenti, orientazioni canoniche. Esistenza di metriche Riemanniane sulle varietà, dualità Riemanniana tra spazi tangenti e cotangenti.

Lezione 26. (1 dicembre, 1 ora)
Teorema di immersione di Whitney.

Lezione 27. (2 dicembre, 1 ora)
Teorema di approssimazione trasversale.

Lezione 28. (9 dicembre, 1 ora)
Grado di applicazioni tra varietà compatte orientate.