Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2010/2011

GEOMETRIA 4 (Teoria dei nodi)

prof. Riccardo Piergallini

Primo semestre (4 ottobre 2010 – 28 gennaio 2011)

Programma del corso

Definizioni di base. Nodi e link, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica (isotopia ambiente). Esempi di nodi selvaggi e deformazioni selvagge. Nodi docili, intorni tubolari topologici, rappresentazione come nodi lisci e poligonali a meno di ε-isotopie. Deformazioni docili, estensione ad isotopie ambiente, defomazioni poligonali e deformazioni lisce. Classificazione di nodi lisci, diffeomorfismi e orientazioni dello spazio, diffeomorfismi che conservano l'orientazione sono realizzabili mediante isotopie. Nodi banali, K banale se e solo se bordo di un disco docile. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di ε-isotopie, determinazione del nodo a meno di isotopie verticali, movimenti di Reidemeister. Banalizzazione di nodi e di diagrammi mediante inversione di incroci, banalità dei nodi in R^n con $n > 3$. Gruppo $G(K)$ di un nodo K, presentazione di Wirtinger, abelianizzato $H(K) = \mathrm{Ab}(G(K))$ e numero $n(K)$ delle componenti di K. Esempi di classi di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Somma connessa $K_1 \# K_2$ di nodi connessi K_1 e K_2.

Invarianti numerici. Indice di allacciamento $\mathrm{lk}(K_1, K_2)$ tra nodi orientati K_1 e K_2, invarianza isotopica (link di Hopf non banale), dipendenza dall'orientazione, K_1 e K_2 separati implica $\mathrm{lk}(K_1, K_2) = 0$ ma non viceversa (link di Whitehead, anelli di Borromeo). Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi, simmetria dell'indice di allacciamento. K banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$ (lemma del cappio). Genere $g(K)$ di un nodo K, K banale se e solo se $g(K) = 0$, $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$, decomposizione in nodi primi. Numero $c(K)$ di incroci necessari per rappresentare K, K banale se e solo se $c(K) = 0$ (teorema di Schönfließ), tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi. Indice di contorcimento $\mathrm{wr}(K)$ di un (diagramma di un) nodo K, invarianza per isotopia regolare. Nodi n-colorabili, invarianza isotopica della n-colorabilità, esempi di nodi non equivalenti. Nodi geometrici, numero di incroci medio e indice di contorcimento medio, indice di allacciamento e integrale di Gauss, indice di attorcigliamento per nodi paralleli, teorema di White.

Polinomi di Kauffman e Jones. Parentesi di Kauffman, risoluzione di incroci e stati di un diagramma, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare. Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e somma connessa. Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman, parità delle potenze che vi appaiono. Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica, esempi (non simmetria dei nodi trifoglio). Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti, proprietà del polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

Trecce e polinomio di Jones in due variabili. Trecce e isotopia di trecce, gruppo $\mathcal{B}_n$ delle n-trecce. Spazio $\Gamma_n R^2$ delle n-configurazioni del piano, rivestimento delle n-uple ordinate (coefficienti e radici di polinomi complessi). $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(\Gamma_n R^2)$, omomorfismo $\phi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$, $\mathcal{B}_1 \cong 0$ e $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}_n$ non commutativo per $n > 2$. Trecce chiuse, teorema di Alexander, algoritmo di Vogel. Relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister, stabilizzazione di trecce, teorema di Markov. Rappresentazioni del gruppo delle trecce, rappresentazione simmetrica e sua deformazione di

Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura (forma normale). Tracce sulle algebra di Hecke, polinomio di Jones in due variabili $V_K(x, y)$, equazione caratteristica, dipendenza dall'orientazione, polinomi $V_K(x, y)$ di nodi simmetrici e somma connessa.

Polinomio di Conway e forme di Seifert. Polinimio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa. Polinomio di Alexander $\Delta_K(t)$, calcolo basato sui diagrammi. Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Derivazione del polinomio di Conway dalle forme di Seifert, relazione tra polinomio di Conway e genere, polinomio di Conway e segnatura di nodi "slice".

Invarianti di Vassiliev. Nodi singolari, movimenti di isotopia liscia, inversione di incroci e singolarità doppie trasversali. Invarianti di Vassiliev, equazione caratteristica e conseguenze, invarianti di ordine finito, simboli. Diagrammi di Gauss, relazioni tra diagrammi e diagrammi base, determinazione dei diagrammi base di ordine 2, 3 e 4, calcolo degli invarianti di ordine finito. Teorema di Vassiliev-Kontsevich, polinomio di Conway e invarianti di Vassiliev. Grafi topologici nello spazio, movimenti di isotopia, grafi intrinsecamente annodati nello spazio.

Testi consigliati

W.B. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, GTM 175, Springer

A. Sossinsky, *Knots. Mathematics with a twist*, Harward University Press