

**GEOMETRIA 2***prof. Riccardo Piergallini***Programma del corso***I Parte – Elementi di topologia*

*Spazi topologici.* Aperti e chiusi, intorni, basi di aperti e di intorni, confronto tra topologie. Operatori topologici (interno, chiusura e frontiera), sottoinsiemi densi, chiusi regolari. Sotto-spazi topologici, unioni topologiche, prodotti topologici, quozienti topologici. Applicazioni continue, applicazioni aperte, omeomorfismi e omeomorfismi locali, immersioni e immersioni locali. Gruppi topologici, azioni topologiche e spazi di orbite.

*Proprietà topologiche.* Proprietà globali e locali, invarianza per omeomorfismi e omeomorfismi locali. Assiomi di separazione, metrizzabilità, lemma di Urysohn e teorema di Tietze per spazi metrizzabili. Assiomi di numerabilità, separabilità, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità. Compattezza e compattezza locale, compattificazioni, compattificazione di Alexandroff. Compattezza negli spazi metrici, numero di Lebesgue, continuità uniforme. Completezza, teorema del punto fisso per le contrazioni, teorema di Baire. Connessione e connessione locale, connessione per archi, componenti connesse e componenti connesse per archi. Relazioni tra le proprietà topologiche, conservazione mediante applicazioni continue e operazioni topologiche.

*Omotopia e rivestimenti.* Equivalenza omotopica applicazioni e tra spazi, omotopia relativa, deformazioni, spazi semplicemente connessi, spazi contraibili. Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni libere discrete. Proprietà di sollevamento unico dei cammini e delle omotopie, sollevamento unico delle applicazioni continue, rivestimenti universali.

*Gruppo fondamentale.* Cappi in spazi puntati, composizione e omotopia tra cappi, definizione del gruppo fondamentale, indipendenza dal punto base. Omomorfismi indotti da applicazioni continue, funtorialità e invarianza omotopica. Gruppo fondamentale e rivestimenti, gruppo fondamentale della circonferenza. Presentazioni di gruppi, teorema di Van Kampen.

*Topologia del piano e dello spazio.* Teorema del punto fisso di Brouwer per  $B^2$ , teorema di Borsuk-Ulam per  $S^2$ . Curve di Jordan, indice di allacciamento, teoremi di Jordan e di Schönflies. Teorema di invarianza dei domini piani e della dimensione. Nodi nello spazio, gruppi dei nodi.

*Curve e superfici topologiche.* Varietà topologiche, carte locali e atlanti (sfere e proiezioni stereografiche, spazi proiettivi e carte affini), carte speciali, atlanti numerabili, metrizzabilità, teorema di immersione in  $R^n$ . Classificazione delle curve. Somma connessa di superfici, genere delle superfici orientabili e non orientabili, poligonazioni, caratteristica di Eulero, classificazione delle superfici chiuse, gruppi fondamentali delle superfici chiuse.

*II Parte – Curve e superfici*

*Curve nel piano euclideo.* Equazioni cartesiane e parametrizzazioni, lunghezza d'arco. Riferimenti e formule di Frenet. Curvatura, forma canonica locale, congruenza tra curve nel piano euclideo, rotazione totale e curvatura totale, curve di Jordan regolari.

*Curve nello spazio euclideo.* Equazioni cartesiane e parametrizzazioni, lunghezza d'arco. Riferimenti e formule di Frenet, curvatura e torsione, forma canonica locale, congruenza tra curve (orientate) nello spazio euclideo, condizione di planarità. Nodi regolari, intorni tubolari, teorema di Fenchel.

*Superfici nello spazio euclideo.* Equazioni cartesiane e parametrizzazioni locali, orientazioni e campi di versori normali. Applicazione di Gauss, operatore di forma, forme fondamentali, formule di Gauss-Weingarten. Curvatura normale e curvatura geodetica, teorema di Meusnier, curvatures principali, direzioni principali e asintotiche, formula di Eulero, forma canonica locale (punti ellittici, iperbolici e parabolici, punti ombelicali e planari). Curvatura gaussiana e curvatura media, equazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi, teorema “egregium” di Gauss, isometrie e congruenze tra superfici (orientate) nello spazio. Superfici rigate, rigate sviluppabili. Superfici di rotazione, equazioni di Clairaut. Superfici a curvatura gaussiana costante (teoremi di Liebmann, Massey e Hilbert). Superfici minime, curvatura media e variazione prima dell’area.

*Geometria intrinseca delle superfici.* Metriche riemanniane, curvatura gaussiana. Curvatura geodetica, geodetiche. Teorema di Gauss-Bonnet. Teorema di Minding, classificazione delle superfici riemanniane chiuse a curvatura costante. Geodetiche e isometrie del piano euclideo, della sfera e del piano iperbolico, modelli riemanniani delle geometrie piane.

### **Testi di riferimento**

E. Sernesi, *Geometria 2*, Boringhieri

I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e geometria*, Boringhieri

### **Testi consigliati**

C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli

C. De Fabritiis e C. Petronio, *Esercizi svolti e complementi di topologia e geometria*, Boringhieri

M.M. Lipschutz, *Geometria differenziale*, Collana Schaum, McGraw Hill

B. O’Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press

M.P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc.