Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2013/2014

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (3 marzo, 2 ore)
Introduzione al corso.

Lezione 2. (4 marzo, 2 ore)
Spazi topologici, aperti e chiusi, sistemi di intorni, basi di aperti e di intorni, confronto tra topologie. Spazi metrici, topologia indotta da una metrica. Esempi di topologie metrizzabili e non metrizzabili.

Lezione 3. (7 marzo, 2 ore)
Operatori topologici di interno, chiusura e frontiera di un sottoinsieme, punti di accumulazione e punti isolati di un sottoinsieme. Applicazioni continue, definizione globale e locale (continuità in un punto), continuità della composizione di funzioni continue.

Lezione 4. (10 marzo, 2 ore)
Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi, immesioni topologiche. Sottospazi topologici, continuità delle restrizioni, teorema di incollamento delle funzioni continue.

Lezione 5. (11 marzo, 2 ore)
Unioni topologiche, caratterizzazione in termini di sottospazi aperti, continuità delle applicazioni definite su un'unione topologica. Prodotti topologici, proiezioni canoniche (continue e aperte, ma non chiuse), continuità delle applicazioni a valori in un prodotto topologico.

Lezione 6. (14 marzo, 2 ore)
Quozienti topologici, continuità di applicazioni definite su un quoziente, versione topologica del teorema di decomposizione canonica di un'applicazione.

Lezione 7. (17 marzo, 2 ore)
Azioni topologiche e quozienti, esempi di quozienti indotti da azioni topologiche (tori, sfere e proiettivi).

Lezione 8. (18 marzo, 2 ore)
Proprietà topologiche globali e locali. Assiomi di separazione e metrizzabilità, assioma di Hausdorff e unicità dei limiti, regolarità e basi di intorni chiusi. Lemma di Urysohn per gli spazi metrizzabili, metrizzabile implica normale, metrizzabilità delle unioni e dei prodotti topologici.

Lezione 9. (21 marzo, 2 ore)
Assiomi di numerabilità: basi numerabili, basi di intorni numerabili, separabilità. Chiusura e continuità per successioni, spazi metrizzabili separabili hanno basi numerabili, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità.

Lezione 10. (24 marzo, 2 ore)
Spazi topologici compatti, compattezza dell'intervallo $[0, 1]$, conservazione della compattezza, compattezza di unioni e prodotti, sottospazi compatti di R^m. Spazi di Hausdorff compatti, normalità, decomposizione canonica delle applicazioni continue.

Lezione 11. (25 marzo, 2 ore)

Compattificazioni, esempi ($\widetilde{R}^m \cong B^m$, $\overline{R}^m \cong P^m$, $\widehat{R}^m \cong S^m$), compattificazione di Alexander. Compattezza di spazi metrici, compattezza per successioni e proprietà di Bolzano-Weierstrasse.

Lezione 12. (28 marzo, 2 ore)

Completezza, relazioni con la compattezza (locale), teorema di Baire, teorema del punto fisso per le contrazioni.

Lezione 13. (31 marzo, 2 ore)

Connessione e connessione per archi, connessione dell'intervallo $[0, 1]$, conservazione della connessione, connessione di unioni e prodotti, sottospazi connessi di R. Componenti connesse e connesse per archi.

Lezione 14. (1° aprile, 2 ore)

Omotopia tra applicazioni, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili. Omotopia relativa, deformazioni su sottospazi, spazi semplicemente connessi. Gruppo fondamentale, omomorfismi indotto dalle applicazioni continue, indipendenza dal punto base.

Lezione 15. (4 aprile, 2 ore)

Invarianza omotopica del gruppo fondamentale. Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni propriamente discontinue, proprietà di sollevamento unico dei cammini, delle omotopie e delle applicazioni, rivestimenti universali ($R \to S^1$, $R^m \to T^m$, $S^m \to P^m$ per $m > 1$).

Lezione 16. (7 aprile, 2 ore)

Gruppo delle trasformazioni di un rivestimento, regolarità e unicità del rivestimento universale, calcolo del gruppo fondamentale mediante il rivestimento universale ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^m$, $\pi_1(P^m) \cong \mathbb{Z}_2$ per $m > 1$). Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto.

Lezione 17. (8 aprile, 2 ore)

Gruppi liberi e loro proprietà universale, presentazioni (finite) di gruppi, prodotto libero e prodotto diretto. Teorema di Seifert-Van Kampen. Unione puntata di spazi topologici, gruppo fondamentale di un'unione puntata, $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$. Altre applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen: $\pi_1(R^2 - \{p_1, \ldots, p_k\})$, $\pi_1(S^m)$ con $m > 1$, $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(P^2)$.

Lezione 18. (11 aprile, 2 ore)

Classificazione omotopica delle sfere, invarianza topologica della dimensione. Teorema di non retrazione e teorema del punto fisso di Brower. Teorema di Jordan e teorema di Schönfließ, casi speciali convesso e poligonale.

Lezione 19. (14 aprile, 2 ore)

Grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, indice di allacciamento di una curva piana orientata rispetto ad un punto, cenno alla dimostrazione del teorema di Jordan.

Lezione 20. (15 aprile, 2 ore)

Nodi nello spazio, gruppo di un nodo, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione. Gruppo del nodo banale e del nodo trifoglio.

Lezione 21. (22 aprile, 2 ore)

Varietà topologiche, carte locali e atlanti, carte spaciali, proprietà locali delle varietà, invarianza della dimensione per le varietà. Immergibilità delle varietà in spazi euclidei, metrizzabilità delle varietà.

Lezione 22. (23 aprile, 2 ore)

Curve topologiche, segmentazioni, classificazione delle curve connesse. Superfici topologiche, somma connessa, T_g (superficie orientabile di genere g) e P_g (superficie non orientabile di genere g), interpretazione topologica del genere.

Lezione 23. (28 aprile, 2 ore)

Poligonazioni, superfici compatte connesse come quozienti di dischi e come somme connesse di tori e proiettivi. Classificazione delle superfici compatte connesse.

Lezione 24. (29 aprile, 2 ore)

Gruppo fondamentale delle superfici compatte connesse, abelianizzazione. Caratteristica di Eulero-Poincaré, interpretazione topologica dell'orientabilità.

Lezione 25. (5 maggio, 2 ore)

Curve differenziabili regolari nel piano, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari. Riferimento di Frenet, curvatura.

Lezione 26. (6 maggio, 2 ore)

Formule di Frenet. Esempi: rette e circonferenze. Cerchio osculatore, forma canonica. Teorema fondamentale per le curve regolari nel piano, curve a curvatura costante.

Lezione 27. (9 maggio, 2 ore)

Rotazione e curvatura totale, rotazione totale di una curva di Jordan regolare, teorema di Fenchel, curve di Jordan convesse.

Lezione 28. (12 maggio, 2 ore)

Curve differenziabili regolari nello spazio, retta tangente, parametrizzazioni regolari e naturali, ascissa curvilinea, equazioni cartesiane regolari.

Lezione 29. (13 maggio, 2 ore)

Riferimenti di Frenet, curvatura e torsione, formule di Frenet. Esempi: rette, circonferenze e eliche circolari. Cerchio osculatore, forma canonica.

Lezione 30. (16 maggio, 2 ore)

Teorema fondamentale per le curve regolari nello spazio, curve a curvatura e torsione costante, condizione di planarità.

Lezione 31. (19 maggio, 2 ore)

Superfici regolari nello spazio, piano tangente, parametrizzazioni locali regolari, equazioni cartesiane regolari, orientazioni e campi di versori normali.

Lezione 32. (20 maggio, 2 ore)

Operatore forma, curvatura di Gauss e curvatura media, simmetria dell'operatore forma, curvature e direzioni principali. Forme fondamentali, invarianza per isometrie dello spazio.

Lezione 33. (23 maggio, 2 ore)

Forma canonica locale (punti ellittici, iperbolici e parabolici, punti ombelicali e planari), direzioni asintotiche, linee asintotiche e linee di curvatura. Curve regolari in superfici, curvatura normale e curvatura geodetica, curvature normali e sezioni piane normali, teorema di Meusnier, formula di Eulero.

Lezione 34. (26 maggio, 2 ore)

Curve geodetiche e parametrizzazioni geodetiche, equazione delle geodetiche di una superficie nello spazio, esistenza e unicità della geodetica uscente da un punto con una velocità data.

Lezione 35. (27 maggio, 2 ore)

Trasporto parallelo su una superficie nello spazio, derivata covariante di vettori tangenti, simboli di Christoffel, carattere intrinseco della derivata covariante. Equazione delle geodetiche, invarianza delle geodetiche per isometrie intrinseche.

Lezione 36. (30 maggio, 2 ore)

Teorema "egregium " di Gauss. Teorema principale delle superfici nello spazio.

Lezione 37. (3 giugno, 2 ore)

Superfici di rotazione, equazione di Claireaut, superfici di rotazione a curvatura di Gauss costante. Superfici rigate, rigate sviluppabili, condizione di sviluppabilità.

Lezione 38. (4 giugno, 2 ore)

Superfici minime, variazione prima dell'area e curvatura media, elicoide e catenoide. Strutture riemanniane su superfici astratte, isomerie, derivata covariante e trasporto parallelo, curvatura di Gauss.

Lezione 39. (5 giugno, 2 ore)

Modelli metrici delle geometrie non euclidee. Sfera e piano proiettivo, triangoli sferici. Piano iperbolico, disco e semipiano di Poincaré, curvatura di Gauss, geodetiche e isometrie iperboliche, triangoli iperbolici.