Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2019/2020

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (1° ottobre, 2 ore)
Richiami sulle varietà topologiche. Varietà con bordo, invarianza dell'interno e del bordo. Richiami sulle funzioni differenziabili tra aperti euclidei, differenziale e matrice jacobiana di una funzione, differenziale di funzioni composte (regola della catena). Diffeomorfismi, teorema della funzione inversa.

Lezione 2. (2 ottobre, 2 ore)
Carte differenziabilmente compatibili, atlanti differenziabili e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura differenziabile generata da un atlante differenziabile. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m).

Lezione 3. (8 ottobre, 2 ore)
Strutture differenziabili su varietà con bordo. Varietà differenziabili con bordo. Struttura differenziabile indotta sul bordo, S^m come bordo di B^{m+1}. Prodotto di varietà differenziabili (con bordo). Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R. Quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue.

Lezione 4. (15 ottobre, 2 ore)
Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili (con bordo), varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Orientazione indotta sul bordo. Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà oriantabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

Lezione 5. (29 ottobre, 2 ore)
Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3. Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili; esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2.

Lezione 6. (31 ottobre, 2 ore)
Partizioni dell'unità differenziabili. Teorema di approssimazione differenziabile; immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in R^n.

Lezione 7. (5 novembre, 2 ore)
Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni. Vettori tangenti ad una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni.

Lezione 8. (7 novembre, 2 ore)
Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà. Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà. Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni.

Lezione 9. (12 novembre, 2 ore)

Fibrati tangenti e cotangenti come varietà differenziabili orientate. Teorema di Sard, teorema di immersione di Whitney. Campi di vettori, forme differenziali lineari, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Lezione 10. (14 novembre, 2 ore)

Parentesi di Lie e proprietà. Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati.

Lezione 11. (19 novembre, 2 ore)

Caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie. Distribuzioni, criterio di integrabilità.

Lezione 12. (21 novembre, 2 ore)

Forme differenziali, prodotto esterno e algebra di Grassmann. Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili.

Lezione 13. (26 novembre, 2 ore)

Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità. Forme chiuse e forme esatte.

Lezione 14. (28 novembre, 2 ore)

Lemma di Poincarè (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta).

Lezione 15. (3 dicembre, 2 ore)

Chiusi ammissibili in varietà differenziabili. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibili di R^m. Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata. Forme di volume e orientazioni, integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: R^m con la forma di volume euclidea).

Lezione 16. (5 dicembre, 2 ore)

Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta. Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^3. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

Lezione 17. (7 gennaio, 2 ore)

Coomologia di De Rham, struttura moltiplicativa, coomologia in dimensione 0 e m. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni differenziabili. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica.

Lezione 18. (9 gennaio, 2 ore)

Successione esatta di Mayer-Vietoris. Coomologia delle sfere. Teorema di punto fisso di Brouwer. Teorema di separazione di Jordan in R^m, invarianza del dominio e della dimensione.

Lezione 19. (14 gennaio, 2 ore)

Finitezza della coomologia delle varietà compatte. Coomologia in dimensione m e orientabilità.

Lezione 20. (16 gennaio, 1 ora)

Grado di applicazioni continue, invarianza omotopica, teorema di Hopf.

Lezione 21. (16 gennaio, 2 ore)

Grado di applicazioni in termini di fibre regolari (anche mod 2). Teorema di separazione per ipersuperfici lisce in R^m, non esistenza di ipersuperfici chiuse non orientabili in R^m.

Lezione 22. (9 marzo, 2 ore)

Metriche riemanniane, elementi di lunghezza. Spazi modello (metriche euclidee, sferiche e iperboliche). Esistenza di metriche riemanniane sulle varietà, metriche riemanniane indotte su sottovarietà.

Lezione 23. (11 marzo, 2 ore)

Campi di riferimenti ortogonali, esistenza locale, campi di riferimenti coordinati ortogonali e caratterizzazione delle metriche euclidee. Applicazioni isometriche e conformi, isometrie e conformità, similitudini.

Lezione 24. (16 marzo, 2 ore)

Dualità riemanniana tra campi di vettori e forme differenziali lineari, formule di innalzamento e abbassamento degli indici, gradiente di funzioni, dualità tra fibrato tangente e cotangente.

Lezione 25. (18 marzo, 2 ore)

Elementi di volume riemanniani, misura di angoli, lunghezze, volumi. Distanza geodetica, compatibilità con la topologia.

Lezione 26. (23 marzo, 2 ore)

Connessioni affini, connessione di Levi-Civita, esistenza e unicità, simboli di Christoffell. Trasporto parallelo, campi di vettori paralleli, campi di riferimenti paralleli e caratterizzazione delle metriche euclidee. Derivata covariante in sottovarietà riemanniane.

Lezione 27. (25 marzo, 2 ore)

Geodetiche, applicazione esponenziale, intorni convessi e coordinate normali. Rigidità delle isometrie.

Lezione 28. (30 marzo, 2 ore)

Sottovarietà totalmente geodetiche. Sottovarietà luogo di punti fissi di isometrie sono totalmente geodetiche. Geodetiche delle sfere e degli spazi iperbolici.

Lezione 29. (1° aprile, 2 ore)

Minimalità locale della lunghezza, equazioni di Eulero-Lagrange.

Lezione 30. (6 aprile, 2 ore)

Isometrie riemanniane come isometrie rispetto alla distanza geodetica.

Lezione 31. (8 aprile, 2 ore)

Completezza geodetica, teorema di Hopf-Rinow.

Lezione 32. (15 aprile, 2 ore)

Operatore di curvatura sui campi di vettori, proprietà tensoriale, identità di Bianchi. Curvature sezionali. Curvatura di Ricci e curvatura scalare.

Lezione 33. (20 aprile, 2 ore)

Curvatura di sottovarietà riemanniane. Varietà a curvatura costante, omogeneità e isotropia locale.

Lezione 34. (22 aprile, 2 ore)

Forme di connessione e di curvatura, equazioni strutturali.

Lezione 35. (27 aprile, 2 ore)

Curvature sezionali come curvature di superfici. Isotropia implica completezza e curvatura costante.

Lezione 36. (29 aprile, 2 ore)

Spazi a curvatura costante, spazi modello e loro gruppi di isometrie.

Lezione 37. (4 maggio, 2 ore)

Teorema di Cartan locale, isotropia e omogeneità locale degli spazi a curvatura costante.

Lezione 38. (6 maggio, 2 ore)
Rivestimenti riemanniani e classificazione globale delle varietà a curvatura costante.