Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 10 – 9 maggio 2024

1) Provare che in ogni superficie regolare compatta $S \subset R^3$ esiste almeno un punto $p \in S$ con $K(p) > 0$. Infatti, se $S \subset B(0, r)$ allora esiste un punto $p \in S$ tale che $K(p) > 1/r^2$. Si può sostituire l'ipotesi della compattezza con quella della limitatezza?

2) Calcolare la curvatura di Gauss e la curvatura media di una superficie regolare $S \subset R^3$ in termini di una sua equazione cartesiana regolare $f(x, y, z) = 0$.

3) Sia $S \subset R^3$ una superficie rigata e sia $C \subset S$ una sua direttrice (cio una curva regolare che incontra ogni generatrice trasversalmente in un punto). Provare che:
   a) C è asintotica in S, se ogni generatrice esce da C nella direzione della normale;
   b) C è geodetica in S, se ogni generatrice esce da C nella direzione della binormale.

4) Data $C \subset R^3$ curva regolare orientata con curvatura limitata ovunque positiva, si consideri la *superficie tubolare* di raggio $r > 0$ intorno a C definita come segue:

$$T_r = \{p + r(\cos\alpha\, N(p) + \sin\alpha\, B(p)) \mid p \in C,\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}\,,$$

   dove N e B sono i campi dei versori normali e binormali lungo C. Verificare che T_r è una superficie regolare se r è sufficientemente piccolo. Esprimere la curvatura di Gauss di T_r in funzione della curvatura e della torsione di C.

5) Data una superficie regolare orientata $S \subset R^3$ con curvature limitate. Per ogni $r > 0$, si consideri la *superficie parallela* a distanza r da S, definita come segue:

$$S_r = \{p + rN(p) \mid p \in S\}\,,$$

   dove N è il campo dei versori normali a S. Verificare che S_r è una superficie regolare per r sufficientemente piccolo, ed esprimere la curvatura di Gauss e la curvatura media di S_r in funzione di quelle di S. Provare inoltre che gli integrali della curvatura di Gauss in regioni corrispondenti di S e S_r coincidono.

6) Dimostrare che una superficie regolare connessa $S \subset R^3$ ha curvatura di Gauss e curvatura media entrambe costanti se e solo se è contenuta in un piano, in una sfera o in un cilindro circolare retto.