Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 1 – 9 ottobre 2024

1) Verificare che gli assiomi di appartenenza e di ordinamento implicano che l'insieme dei punti di una retta, l'insieme delle rette di un piano e l'insieme dei piani dello spazio sono tutti insiemi infiniti. Tenendo conto anche degli altri assiomi provare che questi insiemi hanno la cardinalità del continuo (cioè la stessa dell'insieme dei numeri reali).

2) Utilizzando gli assiomi di appartenenza, di ordinamento e delle parallele, provare che:
   a) dati due piani π e π' tali che esistono due rette incidenti $r, s \subset \pi$ e due rette incidenti $r', s' \subset \pi'$ con $r \parallel r'$ e $s \parallel s'$, si ha che $\pi \parallel \pi'$;
   b) date tre rette r, s, t parallele o passanti per uno stesso punto P e punti $R_1, R_2 \in r$, $S_1, S_2 \in s$ e $T_1, T_2 \in t$ tali che $R_1S_1 \parallel R_2S_2$ e $S_1T_1 \parallel S_2T_2$, si ha $R_1T_1 \parallel R_2T_2$ (teorema di Desargues).

3) Senza utilizzare gli assiomi di congruenza e continuità, dimostrare che un quadrilatero $PQSR \subset \pi$ nel piano π è un parallelogramma (cioè ha i lati opposti paralleli) se e solo se $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{RS}$ (cioè $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono equipollenti). Utilizzando anche gli assiomi di congruenza, dimostrare che $PQSR$ è un parallelogramma se e solo se $PQ \parallel RS$ e $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ (cioè $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ sono congruenti).

4) Senza utilizzare gli assiomi di congruenza e continuità, dimostrare il teorema di Talete: se $r_1, s_1, r_2, s_2 \subset \pi$ sono rette parallele nel piano π e $t, t' \subset \pi$ sono due trasversali, allora, posto $P_i = t \cap r_i$, $Q_i = t \cap s_i$, $P'_i = t' \cap r_i$ e $Q'_i = t' \cap s_i$, si ha:
$$\overrightarrow{P_1Q_1} \equiv \overrightarrow{P_2Q_2} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{P'_1Q'_1} \equiv \overrightarrow{P'_2Q'_2}\,.$$
   Tenendo conto anche degli assiomi di congruenza e continuità, concludere che, considerati i corrispondenti vettori liberi $v_i = [\overrightarrow{P_iQ_i}]$ e $v'_i = [\overrightarrow{P'_iQ'_i}]$ e un numero reale a, si ha:
$$v_2 = av_1 \;\Leftrightarrow\; v'_2 = av'_1\,.$$

5) Sia φ una trasformazione del piano/spazio che trasforma ogni retta r in una retta $\varphi(r)$ parallela ad r (cioè φ è una dilatazione). Provare che se φ ha un punto fisso P (cioè $\varphi(P) = P$), allora esiste un numero reale a tale che $\varphi = \varphi_{P,a}$ (cioè φ è la dilatazione di centro P e fattore di dilatazione a). In particolare, se φ ha anche un altro punto fisso Q distinto da P, allora $\varphi = \mathrm{id}$.

6) Verificare la validità della seguente costruzione del punto medio M di un segmento PQ: si consideri la retta $r = PQ$ e un qualunque punto R non appartenente ad r; siano P' e Q' punti rispettivamente interni ai segmenti $\overline{RP}$ e $\overline{RQ}$, tali che la retta $r' = P'Q'$ è parallela alla retta r; sia inoltre S il punto di intersezione dei segmenti $\overline{PQ'}$ e $\overline{P'Q}$; allora M è il punto di intersezione tra la retta r e la retta $s = SR$.