Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 2 – 23 ottobre

1) Verificare che nel piano e nello spazio euclidei vale quanto segue:
   a) ogni isometria è una similitudine (cioè $\mathrm{Iso} \subset \mathrm{Sim}$);
   b) ogni similitudine è la composizione di una isometria e una dilatazione.

2) Sia ϕ un'affinità del piano euclideo. Considerando l'applicazione indotta $\phi_* : V \to V$ sui vettori liberi, provare che esiste un (unico) numero reale $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Area}(\phi(\mathcal{P})) = k\,\mathrm{Area}(\mathcal{P})$ per ogni parallelogramma $\mathcal{P}$. Provare inoltre che ϕ è una similitudine se e solo se esiste un (unico) numero reale $h \in \mathbb{R}$ tale che $|\phi(\overline{PQ})| = h\,|\overline{PQ}|$ per ogni segmento $\overline{PQ}$. Che relazione c'è in questo caso tra k e h? Cosa si può dire di analogo per le affinità dello spazio euclideo?

3) Verificare che tre punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ nel piano euclideo sono allineati se e solo se i vettori $v_1 = (x_1, y_1, 1)$, $v_2 = (x_2, y_2, 1)$ e $v_3 = (x_3, y_3, 1)$ nello spazio euclideo sono complanari. Scrivere quindi la condizione di allineamento per i punti dati in termini di prodotto misto dei corrispondenti vettori.

4) Utilizzando le proprietà del prodotto scalare tra vettori, dimostrare che un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se la somma dei quadrati delle lunghezze dei quattro lati è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze delle due diagonali.

5) Classificare i trapezi, cioè i quadrilateri piani con (almeno) due lati (opposti) paralleli a meno di affinità, similitudini e isometrie, descrivendo in tutti e tre i casi dei parametri geometrici che caratterizzino le classi di equivalenza.

6) Un poligono nel piano si dice regolare se ha tutti i lati congruenti tra loro e tutti gli angoli interni congruenti tra loro. Verificare che per ogni $n \geq 3$ esiste un poligono regolare P_n e che questo è unico a meno di similidutini del piano. Determinare il gruppo delle simmetrie di P_n, cioè il gruppo delle isometrie ϕ del piano tali che $\phi(P_n) = P_n$.