Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 3 – 6 novembre

1) Nel piano euclideo con coordinate cartesiane (x, y), siano r_1 e r_2 rette distinte, rispettivamente di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Provare che le equazioni $\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, con λ_1 e λ_2 numeri reali non entrambi nulli, rappresentano tutte e sole le rette per $P = r_1 \cap r_2$ (fascio di rette incidenti) se tale punto esiste o parallele a r_1 e r_2 (fascio di rette parallele) altrimenti. Enunciare e dimostrare una proprietà analoga per i piani nello spazio euclideo.

2) Date r e r' rette sghembe (cioè non complanari) nello spazio euclideo, dimostrare che: *a*) esistono piani (paralleli) π e π' tali che $r \subset \pi \parallel r'$ e $r' \subset \pi' \parallel r$; *b*) esiste una retta t che interseca r e r' ed è ortogonale ad entrambe; *c*) π, π' e t sono univocamente determinati da r e r'. Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z), scrivere le equazioni dei piani π, π' e della retta t nel caso in cui r e r' siano le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} 2y - 3z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

3) Esprimere in termini di prodotti scalare/vettoriale/misto la distanza tra due rette r ed r' nello spazio euclideo (cioè la minima distanza tra un punto di r e un punto di r') e la condizione di complanarità (cioè l'esistenza di un piano contenente sia r che r'). Fissato un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z), verificare che le seguenti rette non sono complanari e determinarne la distanza:

$$r : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + 4z = -1 \end{cases}$$

4) Nel piano euclideo si considerino una retta r e un punto $F \notin r$. Verificare che il luogo geometrico C dei punti P del piano tali che $d(P, F) = e\, d(P, r)$, con e costante positiva, è un'ellisse, una parabola o un'iperbole, a seconda che sia $e < 1$, $e = 1$ o $e > 1$ (la costante e detta eccentricità di C). Verificare che in tal modo si ottengono tutte le ellissi/parabole/iperboli ad eccezione delle circonferenze (per le quali si pone per definizione $e = 0$) e che il punto F coincide con uno dei fuochi di C.

5) Sia $\mathcal{C}$ una conica nel piano euclideo. Dato un qualunque fascio di rette parallele $\mathcal{F}$ nello stesso piano, provare che i punti medi delle corde staccate da C sulle rette di $\mathcal{F}$ sono allineati lungo una retta r. Provare inoltre che r è un asse di simmetria per C se e solo se è ortogonale alle rette di $\mathcal{F}$. Vale una proprietà analoga per le quadriche nello spazio euclideo?

6) Siano r e s due rette sghembe ma non ortogonali nello spazio euclideo. Verificare che la superficie S generata dalla rotazione di r intorno ad s è un iperboloide iperbolico, scrivendone l'equazione in un opportuno sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Dalle proprietà di simmetria di S (in quanto superficie di rotazione) derivare che S contiene due famiglie di rette $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$, tali che: a) le rette di $\mathcal{F}$ sono tra loro sghembe; *b*) le rette di $\mathcal{F}'$ sono tra loro sghembe; *c*) per ogni punto $p \in S$ passano due rette $r \in \mathcal{F}$ e $r' \in \mathcal{F}'$. Concludere che tali famiglie di rette esistono in qualunque iperboloide iperbolico (non solo in quelli di rotazione).