Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 4 – 20 novembre

1) Fissato un intero $n > 1$, siano $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$ le radici n-esime di 1, cioè $\omega_k = e^{2k\pi i/n}$ (dove i è l'unità immaginaria). Dimostrare le seguenti affermazioni:
   a) $C_n = (\{\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\}, \cdot\,)$ è un gruppo commutativo;
   c) $\omega_0^m \cdot \ldots \cdot \omega_{n-1}^m = (-1)^{(n+1)m}$ per ogni esponente intero $m \geq 0$;
   b) $\omega_0^m + \ldots + \omega_{n-1}^m = 0$ per ogni esponente intero $m > 0$ che non sia multiplo di n.

2) Sia $K \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali costruibili con riga e compasso, cioè dei numeri $r \in \mathbb{R}$ per quali è possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza $|r|$ a partire da un segmento unitario. Dimostrare che K con le usuali operazioni di somma e prodotto tra numeri reali è un campo tale che $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{R}$. Provare a costruire con riga e compasso i seguenti numeri reali: $\sqrt{2}$, $(\sqrt{5} - 1)/2$, $2\cos(\pi/10)$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$, π.

3) Verificare che: un sottoinsieme $V \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $m \leq n$ $\iff$ esiste $\phi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ lineare e iniettiva tale che $V = \operatorname{Im} \phi$ (parametrizzazione lineare) $\iff$ esiste $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n-m}$ lineare e suriettiva tale che $V = \operatorname{Ker} \phi$ (equazione lineare).
   Determinare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ e per quelli che lo sono: calcolare la dimensione, trovare una base ed estendere poi tale base a una base di $\mathbb{R}^3$.
   a) $\{(2t_1 + t_2, 2t_2 - t_3, t_2 + t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$
   b) $\{(t_1 + t_2 - 5, 2t_1 - 3t_2, t_2 - 2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$
   c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y - z = z + 1 = 0\}$
   d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 3z = 2x - 5z = 4y + z = 0\}$

4) Sia V lo spazio dei vettori (liberi) del piano. Provare che comunque scelte due triple di vettori $v_1, v_2, v_3 \in V$ e $w_1, w_2, w_3 \in V$ a due a due non paralleli (cioè $v_i \nparallel v_j$ e $w_i \nparallel w_j$ per ogni $i \neq j$) esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che $\phi(\langle v_1 \rangle) = \langle w_1 \rangle$, $\phi(\langle v_2 \rangle) = \langle w_2 \rangle$ e $\phi(\langle v_3 \rangle) = \langle w_3 \rangle$. Tale applicazione lineare è univocamente determinata? È possibile richiedere in più che $\phi(v_1) = w_1$, $\phi(v_2) = w_2$ e $\phi(v_3) = w_3$?

5) Sia V lo spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio e $U \subset V$ il sottospazio dei vettori liberi del piano π. Dato un qualunque vettore $v \in V$ si consideri l'applicazione $\phi_v : U \to V$ definita da $\phi_v(u) = u \times v$ (prodotto vettoriale per v) per ogni $u \in U$. Verificare che ϕ_v è un'applicazione lineare e determinare $\operatorname{Im} \phi_v$ e $\operatorname{Ker} \phi_v$ al variare di v e π.

6) Sia V uno spazio vettoriale reale (cioè su $\mathbb{R}$) e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Provare che $\operatorname{Fix} \phi = \{v \in V \mid \phi(v) = v\}$ un sottospazio di V. Provare inoltre che:
   a) $\phi \circ \phi = \phi \iff V = \operatorname{Ker} \phi \oplus \operatorname{Fix} \phi$;
   b) $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V \iff V = U \oplus \operatorname{Fix} \phi$ con $U \subset V$ sottospazio t.c. $\phi(u) = -u$ per ogni $u \in U$.
   Quali di queste implicazioni valgono ancora se si sostituisce $\mathbb{R}$ con un arbitrario campo $\mathbb{K}$?