Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 5 – 4 dicembre

1) Sia V uno spazio vettoriale e sia $U \subset V$ sottospazio vettoriale. Provare che per ogni coppia di sottospazi vettoriali $W_1 \subset W_2 \subset V$ tali che $U \cap W_1 = \{0_V\}$ e $U + W_2 = V$, esiste un sottospazio $W \subset V$ tale che $W_1 \subset W \subset W_2$ e $V = U \oplus W$. Verificare che queste ipotesi sono soddisfatte e determinare un tale sottospazio W nei seguenti casi, in cui $V = \mathbb{K}^4$:
 a) $U = \langle(1,0,1,0),(2,1,0,1)\rangle$, $W_1 = \langle(2,1,3,0)\rangle$, $W_2 = \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
 b) $U = \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$, $W_1 = \langle(2,2,1,1)\rangle$, $W_2 = \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$.

2) Verificare che le seguenti applicazioni ϕ sono lineari e determinare delle basi di $\operatorname{Ker}\phi$ e $\operatorname{Im}\phi$:
 a) $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ definita $\phi(x) = (x_1 - i\,x_2, x_2 - x_3 + (1+i)\,x_4, x_1 - i\,x_3 - (1+i)\,x_4)$;
 b) $\phi : \operatorname{End}\mathbb{R}^2 \to \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ definita $\phi(h) = h \circ \sigma - h$, con $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$;
 c) $\phi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ definita $\phi(p(x)) = x\,p'(x) - p(2x+1)$, con $p'(x)$ derivata di $p(x)$.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n e sia $\phi \in \operatorname{End} V$. Un sottospazio $U \subset V$ si dice *ϕ-invariante* se $\phi(U) \subset U$, in tal caso U si dice *minimale* se l'unico suo sottospazio proprio ϕ-invariante è $\{0_V\}$. Provare che:
 a) il sottospazio $\langle\{v, \phi(v), \phi^2(v), \dots, \phi^{n-1}(v)\}\rangle \subset V$ è ϕ-invariante, per ogni $v \in V$;
 b) un sottospazio ϕ-invariante $U \subset V$ di dimensione m è minimale se e solo se l'insieme $\{u, \phi(u), \phi^2(u), \dots, \phi^{m-1}(u)\}$ è una base di U, per ogni $u \in U$ con $u \neq 0$.

4) Verificare che un'applicazione $\phi : V \to W$ tra spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ è lineare se e solo se $\text{Grafico}(\phi) = \{(v, \phi(v)) \mid v \in V\} \subset V \times W$ è un sottospazio vettoriale di $V \times W$. In tal caso, ponendo $V' = V \times \{0_W\}$ e $W' = \{0_V\} \times W$, verificare inoltre che:
 a) $\text{Grafico}(\phi)$ è complementare di W' in $V \times W$ (cio $V \times W = \text{Grafico}(\phi) \oplus W'$);
 b) $\text{Grafico}(\phi)$ è complementare di V' in $V \times W$ se e solo se ϕ è un isomorfismo.

5) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Dimostrare che le forme lineari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in V^*$ costituiscono una base di V^* se e solo se l'applicazione $\phi : V \to \mathbb{K}^n$ definita $\phi(v) = (\lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v))$ è un isomorfismo. Se V è lo spazio dei vettori liberi dello spazio euclideo, per ogni vettore $u \in V$ si consideri la forma lineare $\lambda_u : V \to \mathbb{R}$ definita $\lambda_u(v) = \langle u, v\rangle$. Dati $u_1, u_2, u_3 \in V$, verificare che:
 a) $\{\lambda_{u_1}, \lambda_{u_2}, \lambda_{u_3}\}$ è una base di V^* se e solo se $\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di V;
 b) $\{\lambda_{u_1}, \lambda_{u_2}, \lambda_{u_3}\}$ coincide con la base duale $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ se e solo se $\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base ortonormale di V (cioè gli u_i sono a due a due ortogonali e hanno tutti norma $= 1$).

6) Dato lo spazio di polinomi $\mathbb{K}[x]$ e il sottospazio $\mathbb{K}[x]_n \subset \mathbb{K}[x]$ con $n \geq 1$, provare che:
 a) $\varepsilon_k : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ definita $\varepsilon_k(p(x)) = p(k)$ è una forma lineare per ogni $k \in \mathbb{K}$;
 b) ε_k è combinazione lineare delle forme duali dei polinomi della base $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ di $\mathbb{K}[x]$ se e solo se $k = 0$ (quindi queste forme non generano lo spazio duale di $\mathbb{K}[x]$);
 c) esprimere $\varepsilon_k : \mathbb{K}[x]_n \to \mathbb{K}$ (restrizione di ε_k a $\mathbb{K}[x]_n$) come combinazione lineare delle forme duali dei polinomi della base canonica $\{1, x, \dots, x^n\}$ di $\mathbb{K}[x]_n$;
 d) dati $k_0, \dots, k_n \in \mathbb{K}$, le forme lineari $\varepsilon_{k_0}, \dots, \varepsilon_{k_n}$ costituiscono una base per lo spazio duale di $\mathbb{K}[x]_n$ se e solo se $k_0, \dots, k_n$ sono a due a due distinti.