Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 6 – 11 dicembre

1) Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze relative al prodotto righe per colonne:
   a) posto $E(h,k,x) = (e_{i,j} = \delta_{i,j} + \delta_{i,h}\delta_{j,k}x)_{i,j=1,\dots,n} \in M_{n\times n}\mathbb{K}$, per ogni $h \neq k$ e $x, y \in \mathbb{K}$ si ha $E(h,k,x) \cdot E(h,k,y) = E(h,k,x+y)$;
   b) denotando con $P(\sigma) \in M_{n\times n}$ la matrice $(p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)})_{i,j=1,\dots,n}$ associata alla permutazione $\sigma \in \Sigma_n$, si ha $P(\sigma)^* = P(\sigma^{-1})$ e $P(\sigma) \cdot P(\tau) = P(\sigma \circ \tau)$ per ogni $\sigma, \tau \in \Sigma_n$.
2) Verificare che le matrici reali della forma $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ con $x, y \in \mathbb{R}$, con la somma per componenti e il prodotto righe per colonne, costituiscono un campo isomorfo a $\mathbb{C}$. Verificare inoltre che le matrici complesse della forma $\left(\begin{smallmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$ con $z, w \in \mathbb{C}$, con la somma per componenti e il prodotto righe per colonne, costituiscono un *corpo* (cioè valgono tutti gli assiomi di campo eccetto la commutatività della moltiplicazione) isomorfo a quello dei quaternioni $\mathbb{H}$ (formato dalle espressioni del tipo $a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j, k simboli soggetti alle relazioni $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$).
3) Sia $A \in M_{n,n}\mathbb{K}$ una matrice triangolare superiore. Dimostrare che A è *nilpotente* (cioè esiste $k \geq 1$ tale che $A^k = 0$) $\Leftrightarrow a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = a_{n,n} = 0$ (e in tal caso si può sempre porre $k = n$). Vale almeno una delle due implicazioni senza l'ipotesi che A sia triangolare?
4) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita $\phi(x) = M \cdot x$, dove M è la matrice reale
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Provare che: ϕ un isomorfismo; il sottospazio V di equazione $x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0$ è invariante rispetto a ϕ (cioè $\phi(V) \subset V$); la restrizione $\phi_| : V \to V$ è un isomorfismo. Determinare quindi la matrice di tale restrizione rispetto a una base di V.
5) Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $V \subset \mathbb{K}^n$. Verificare che la seguente procedura determina una base per $\operatorname{Nil} V$: si forma la matrice $M = (v_1, \dots, v_k) \in M_{n\times k}\mathbb{K}$ con i vettori colonna $v_1, \dots, v_k$ e si individua una sottomatrice quadrata $Q \subset M$ di ordine k con $\det Q \neq 0$; si completa la matrice M con il vettore colonna $x = (x_1, \dots, x_n)$ e si considerano gli $n-k$ orlati di Q nella matrice (M, x) cos ottenuta; i determinanti di tali orlati, visti come forme lineari in x costituiscono una base di $\operatorname{Nil} V$. Applicare questa procedura per scrivere un'equazione cartesiana del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori $(1,1,0,0,-1), (1,2,1,0,0), (1,0,-1,0,2) \in \mathbb{R}^5$.
6) Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare in $\mathbb{R}$, sia con il metodo di eliminazione di Gauss che con l'uso dei determinanti, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x + a\,y + z + t = a \\ x + z + (a+1)t = 1 - a \\ y - t = a \end{cases}.$$