Esercizi di Geometria 1

Foglio n. 7 – 18 dicembre

1) Sia V spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica $\neq 2$. Dimostrare che una forma bilineare $\beta \in \operatorname{Bil} V$ è prodotto di due forme lineari (cio esistono $\lambda, \mu \in V^*$ forme lineari tali che $\beta(v,w) = \lambda(v) \cdot \mu(w)$ per ogni $v, w \in V$) se e solo se $\operatorname{rg} \beta \leq 1$.
Sia $\alpha_c : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ la forma quadratica definita $\alpha_c(x) = c(x_1^2 - x_2^2) + (1-c^2)x_1x_2 + (1+c^2)x_3x_4$ per ogni $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$. Stabilire per quali valori del parametro $c \in \mathbb{C}$ la forma polare $\beta_c \in \operatorname{Bil} \mathbb{C}^4$ di α_c (cioè la forma bilineare simmetrica β_c a cui α_c è associata) risulta prodotto di due forme lineari, e per questi valori determinare tali forme lineari.

2) Stabilire per quali valori del parametro $c \in \mathbb{C}$ la seguente matrice $A_c \in M_{4,4}\mathbb{C}$ congruente a una matrice diagonale $D \in M_{4,4}\mathbb{C}$; per tali valori determinare D e una matrice invertibile $M \in M_{4,4}\mathbb{C}$ tale che $D = M^* \cdot A \cdot M$.

$$A_c = \begin{pmatrix} c+1 & c & 1 & c+c\,i \\ 1-i & -c & c+1-i & 0 \\ 1 & 2c & 1-c & c \\ c\,i+1-i & 0 & 1-i & -c \end{pmatrix}$$

3) Usando il teorema di Sylvester, classificare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ la forma quadratica $\alpha_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita $\alpha_t(x) = x_1^2 + (2t+1)x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2(t-1)x_1x_3 + 2(t+1)x_2x_3$ per ogni $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$.

4) Sia $V = V_1 + V_2$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita somma dei sottospazi propri $V_1, V_2 \subsetneq V$ tali che $V_0 = V_1 \cap V_2 \neq \{0_V\}$. Diciamo che questi spazi sono orientati coerentemente se esistono basi ordinate $(v_1, \ldots, v_{n_0})$ di V_0, $(v_1, \ldots, v_{n_0}, v'_{n_0+1} \ldots, v'_{n_1})$ di V_1 e $(v_1, \ldots, v_{n_0}, v''_{n_0+1} \ldots, v''_{n_2})$ di V_2, rappresentanti le orientazioni di tali spazi, per cui $(v_1, \ldots, v_{n_0}, v'_{n_0+1} \ldots, v'_{n_1}, v''_{n_0+1} \ldots, v''_{n_2})$ sia una base ordinata di V rappresentante l'orientazione di V. Provare che comunque scelte le orientazioni di tre degli spazi V_0, V_1, V_2 e V esiste un'unica orientazione del quarto, tale che le quattro orientazioni siano coerenti. Dati $V_1 = \langle (1,-2,0,2), (1,2,1,-2), (0,-1,-1,1) \rangle$ e $V_2 = \langle (1,2,1,-2), (1,-1,1,2), (-1,-1,-1,0) \rangle$ in $\mathbb{R}^4$, trovare una base ordinata di $V_0 = V_1 \cap V_2$ che rappresenti l'orientazione di V_0 coerente con quelle di V_1 e V_2 date dalle basi ordinate con cui questi sottospazi sono stati definiti e con l'orientazione canonica di $\mathbb{R}^4$.

5) Sia $\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare definita $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + i\,x_3, x_2 + i\,x_3, x_1 + i\,x_2)$. Determinare gli autovalori di ϕ e trovare una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori per ϕ.

6) Dato un endomorfismo $\phi \in \operatorname{End} V$, con V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, dimostrare che:
   a) se $k \in \mathbb{C}$ è un autovalore per ϕ, allora k^m è un autovalore per ϕ^m, per ogni $m \geq 1$;
   b) ϕ ha come unico autovalore $0 \Leftrightarrow$ è nilpotente (cioè esiste $m \geq 1$ tale che $\phi^m = 0$);
   c) ϕ ha come unico autovalore $k \Leftrightarrow \phi = \psi + k\,\mathrm{id}_V$ con ψ nilpotente.