Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 2 – 22 ottobre 2025

1) Sia $X = (R \times R_{\text{disc}})/\!\sim$ lo spazio topologico quoziente rispetto alla relazione d'equivalenza generata da $(x,y) \sim (x,y')$ per ogni $x \neq 0$ e ogni $y, y' \in R$. Provare che X è localmente metrizzabile, in quanto ogni punto ha un intorno omeomorfo alla retta euclidea R, ma non è T_2. Concludere che gli assiomi di separazione e la metrizzabilità non sono proprietà topologiche locali.

2) Dimostrare che X è uno spazio topologico T_2 se e solo se la diagonale $D = \{(x,x) \mid x \in X\}$ è chiusa nel prodotto topologico $X \times X$. Dimostrare inoltre che, per ogni applicazione continua $f : X \to Y$, con X spazio topologico arbitrario e Y spazio topologico T_2, il grafico $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ è chiuso nel prodotto topologico $X \times Y$.

3) Sia X uno spazio metrico e sia $S \subset X$ un suo sottospazio. Dimostrare che ogni applicazione uniformemente continua $f : S \to [0,1]$ ammette un'unica estensione continua $g : \mathrm{Cl}_X S \to [0,1]$ e quindi ammette anche un'estensione continua $h : X \to [0,1]$.

4) Provare che uno spazio I numerabile X è T_2 se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ esiste al più un solo $x \in X$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Considerando lo spazio $X = R_{\text{con}}$ costituito dalla retta reale con la topologia conumerabile, in cui gli aperti non vuoti sono i complementari dei sottoinsiemi numerabili (inclusi quelli finiti), verificare che tale equivalenza non vale se X non è I numerabile,

5) Provare che se X è uno spazio topologico localmente II numerabile allora X è I numerabile. Mostrare inoltre che il viceversa non vale, infatti $R_{\mathcal{S}}$ (retta reale con la topologia generata dagli intervalli semiaperti $[a,b[\,$) è I numerabile ma non localmente II numerabile.

6) Sia $X = R_{\mathcal{S}} \times R_{\mathcal{S}}$ il piano reale con la topologia prodotto generata dai rettangoli semiaperti $[a,b[\times[c,d[$ e sia $C = \{(x,y) \in X \mid x+y = 0\}$. Verificare che C è chiuso in X e determinare la topologia indotta su C come sottospazio di X. Dimostrare inoltre che X è separabile mentre C non è separabile (quindi la separabilità non è ereditaria).