Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 3 – 5 novembre 2025

1) Sia X uno spazio topologico II numerabile localmente compatto. Provare che X è unione di una successione di compatti $\{C_n \subset X \mid n \in \mathbb{N}\}$ tale che $C_n \subset \operatorname{Int} C_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.

2) Siano X e Y spazi di Hausdorff localmente compatti con Y non compatto e sia $\widehat{Y}$ la compattificazione di Alexandroff di Y. Data un'applicazione $f : A \to Y$, con $A \subset X$ aperto *relativamente compatto* (cioè: $\mathrm{Cl}_X A$ compatto), si denoti con $\widehat{f} : X \to \widehat{Y}$ l'estensione di f definita da $\widehat{f}(X - A) = \infty$. Verificare che $\widehat{f}$ è continua se e solo se f è continua e *propria* (cioè: $K \subset Y$ compatto $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset A$ compatto).

3) Si consideri lo spazio metrico $F = \{f : R \to [0,1]\}$ con la metrica definita $d(f,g) = \sup_{x \in R} |f(x) - g(x)|$ per ogni $f, g \in F$. Provare che F è completo ma non localmente compatto.

4) Provare che nessuna applicazione continua $f : S^1 \to R$ è iniettiva, mentre esiste una applicazione $f : S^1 \to R_{\text{sup}}$ continua ed iniettiva (si consideri l'inversa della parametrizzazione $\alpha : [0, 2\pi[\to S^1$ definita $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ per ogni $t \in [0, 2\pi[$).

5) Dimostrare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni applicazione $f : X \to R$ *localmente costante* (cioè: per ogni $x \in X$ esiste un intorno I di x in X tale che $f_{|I}$ è costante) è costante.

6) Sia $X = R \times [-1, 1]$ con la topologia generata dagli "intervalli aperti" rispetto all'ordine lessicografico (definito $(x,y) <_l (x',y')$ se e solo se $x < x'$ oppure $x = x'$ e $y < y'$), cioè dagli insiemi:

$$](a,b),(c,d)[_l = \{(x,y) \in R \times [-1,1] \mid (a,b) <_l (x,y) <_l (c,d)\} \text{ con } (a,b) <_l (c,d)\,.$$

Dimostrare che X è connesso ma non connesso per archi.