Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 4 – 19 novembre 2025

1) Dati uno spazio topologico X compatto di Hausdorff e uno spazio topologico Y metrizzabile con la metrica d_Y, sia $C(X,Y)$ lo spazio delle applicazioni continue di X in Y, con la topologia indotta dalla metrica $d(f,g) = \max\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$. Dimostrare che: $H : X \times [0,1] \to Y$ è un'omotopia $\Leftrightarrow \eta : [0,1] \to C(X,Y)$ definita da $\eta(t)(x) = H(x,t)$ è continua $\Leftrightarrow \alpha : X \to C([0,1], Y)$ definita da $\alpha(x)(t) = H(x,t)$ è continua.

2) Un sottospazio $Y \subset X$ si dice *retratto di* X se esiste un'applicazione continua $r : X \to Y$ tale che $r(y) = y$ per ogni $y \in Y$ (*retrazione continua*). Verificare che in tal caso:
   a) Y può avere tipo di omotopia diverso da X (se $i \circ r \not\simeq \mathrm{id}_X$);
   b) X semplicemente connesso $\Rightarrow Y$ semplicemente connesso;
   c) X contraibile $\Rightarrow Y$ contraibile.

3) Siano X, X', Y e Y' spazi topologici. Provare che valgono le implicazioni: a) $X \simeq X'$ e $Y \simeq Y' \Rightarrow X \times Y \simeq X' \times Y'$; b) $X \simeq X'$ e $Y \simeq Y' \Rightarrow X \sqcup Y \simeq X' \sqcup Y'$. Cosa si può dire delle implicazioni inverse?

4) Siano $p : X \to Y$ e $q : Y \to Z$ due applicazioni continue. Verificare che:
   a) $q \circ p$ e p rivestimenti $\Rightarrow q$ rivestimento;
   b) $q \circ p$ e q rivestimenti $\Rightarrow p$ rivestimento
   c) p e q rivestimenti $\not\Rightarrow q \circ p$ rivestimento.

5) Dimostrare che se $p : X \to Y$ è un rivestimento tra spazi topologici connessi (non necessariamente connessi per archi), allora tutte le fibre $F_y = p^{-1}(y)$ con $y \in Y$ hanno la stessa cardinalità. Dimostrare inoltre che questa stessa proprietà vale anche senza l'ipotesi di connessione per rivestimenti regolari $\pi : X \to X/G$ (indotti da un'azione propriamente discontinua di un gruppo G su X), ma non in generale.

6) Sia X uno spazio connesso per archi con rivestimento universale $p : \widetilde{X} \to X$. Per ogni sottogruppo $H \subset G_p \cong \pi_1(X)$, sia $X_H = \widetilde{X}/H$ e sia $p_H = p/H : X_H \to X$ l'applicazione che si ottiene passando p al quoziente. Dimostrare che l'applicazione $H \mapsto p_H$ induce una corrispondenza biunivoca tra le classi di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X)$ e i rivestimenti di X a meno di equivalenza topologica (due rivestimenti $r : R \to X$ e $r' : R' \to X$ sono equivalenti se esiste un omeomorfismo $h : R \to R'$ tale che $r = r' \circ h$).