Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 5 – 3 dicembre 2025

1) Dati due gruppi G_1 e G_2, sia $G = G_1 * G_2$ il loro prodotto libero. Dimostrare che per ogni coppia di omomorfismi $\varphi_1 : G_1 \to H$ e $\varphi_2 : G_2 \to H$ esiste un unico omomorfismo $\varphi : G \to H$ tale che $\varphi_{|G_1} = \varphi_1$ e $\varphi_{|G_2} = \varphi_2$. Concludere che se G_1 e G_2 hanno presentazioni $G_1 \cong \langle a_1, \dots, a_{n_1} | w_1, \dots, w_{m_1} \rangle$ e $G_2 \cong \langle b_1, \dots, b_{n_2} | v_1, \dots, v_{m_2} \rangle$, allora G ha presentazione $G \cong \langle a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2} | w_1, \dots, w_{m_1}, v_1, \dots, v_{m_2} \rangle$.

2) Dato un gruppo G, si denota con $[G, G] = \langle\!\langle \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\} \rangle\!\rangle$ il sottogruppo normale generato dai commutatori di G e si definisce l'*abelianizzato* di G come il gruppo quoziente $\mathrm{Ab}\, G = G/[G, G]$. Verificare che:
   a) $[G, G]$ è il più piccolo tra i sottogruppi normali di $H \triangleleft G$ tali che G/H è un gruppo abeliano (in particolare, $\mathrm{Ab}\, G$ è un gruppo abeliano);
   b) $\mathrm{Ab}\, G$ soddisfa la seguente proprietà universale: per ogni omomorfismo $\varphi : G \to A$ con A gruppo abeliano esiste un unico omomorfismo $\phi : \mathrm{Ab}\, G \to A$ tale che $\psi \circ \pi = \varphi$, dove $\pi : G \to \mathrm{Ab}\, G$ è la proiezione canonica;
   c) se $G \cong \langle a_1, \dots, a_n | w_1, \dots, w_m \rangle$ è una presentazione di G, allora una presentazione di $\mathrm{Ab}\, G$ è data da $\mathrm{Ab}\, G = \langle a_1, \dots, a_n | w_1, \dots, w_m, [a_i, a_j] \text{ con } i, j = 1, \dots n \rangle$.

3) Dato uno spazio X connesso per archi, sia $H_1(X) = \mathrm{Ab}\, \pi_1(X)$ (*primo gruppo di omologia* di X). Dimostrare $H_1(X)$ risulta indipendente dal punto base $* \in X$ utilizzato per definire $\pi_1(X) = \pi_1(X, *)$, a meno di isomorfismi canonici (per ogni $*, *' \in X$ esiste un isomorfismo canonico $\mathrm{Ab}\, \pi_1(X, *) \cong \mathrm{Ab}\, \pi_1(X, *')$ dipendente solo dai due punti base). Concludere che:
   a) per ogni applicazione continua $f : X \to Y$, l'omomorfismo $f_* : \pi_1(X, *) \to \pi_1(Y, f(*))$ induce un omomorfismo $f_* : H_1(X) \to H_1(Y)$ univocamente determinato da f, cio indipendente dal punto base $*$;
   b) $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow f_* = g_* : H_1(X) \to H_1(Y)$.

4) Dimostrare che ogni grafo topologico finito connesso $\Gamma \subset R^2$ ha lo stesso tipo d'omotopia di un'unione puntata $S^1 \vee \ldots \vee S^1$ di n copie di S^1 con $n \geq 0$, quindi $\pi_1(\Gamma)$ è il gruppo libero con n generatori. Determinare n in funzione di $n_0 = \#\{\text{vertici di } \Gamma\}$ e $n_1 = \#\{\text{spigoli di } \Gamma\}$.

5) Dati uno spazio topologico X connesso per archi e un'applicazione continua $\varphi : S^1 \to X$, sia $X \cup_\varphi B^2$ lo spazio quoziente $X \sqcup B^2/{\sim_\varphi}$, dove $\sim_\varphi$ è relazione d'equivalenza su $X \sqcup B^2$ generata da $x \sim \varphi(x)$ per ogni $x \in S^1$. Dimostrare che $\pi_1(X \cup_\varphi B^2) \cong \pi_1(X)/\langle\!\langle \varphi_*([\omega]) \rangle\!\rangle$, dove $[\omega]$ è un generatore di $\pi_1(S^1)$. Concludere che ogni gruppo finitamente presentato è gruppo fondamentale di uno spazio topologico. In particolare, costruire spazi topologici X_n tali che $\pi_1(X_n) \cong \mathbb{Z}_n$ con $n > 1$.

6) Siano $C_1, C_2 \subset R^3$ due circonferenze unitarie complanari disgiunte e siano $C_1', C_2' \subset R^3$ due circonferenze unitarie giacenti su piani ortogonali e passanti ciascuna per il centro dell'altra. Determinare i gruppi fondamentali $\pi_1(R^3 - (C_1 \cup C_2))$ e $\pi_1(R^3 - (C_1' \cup C_2'))$ e concludere che non esiste nessun omeomorfismo $h : R^3 \to R^3$ tale che $h(C_1) = C_1'$ e $h(C_2) = C_2'$.