Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 8 – 26 marzo 2026

1) Data una curva regolare connessa $C \subset R^2$ con curvatura ovunque non nulla, sia $C' = \{c(p) = p + N(p)/k(p) \mid p \in C\}$ il luogo dei centri di curvatura di C. Provare che C' è una curva regolare (l'*evoluta* di C) se la funzione curvatura non ha punti critici lungo C. In tal caso, verificare che: a) C' è tangente in $c(p)$ alla retta normale a C in p, per ogni $p \in C$, cioè C' è inviluppo delle rette normali a C; b) la lunghezza dell'arco di C' di estremi $c(p_1)$ e $c(p_2)$ coincide con $|r(p_1) - r(p_2)|$, per ogni $p_1, p_2 \in C$, quindi C è la curva descritta dall'estremo di un filo di lunghezza costante che si svolga senza strisciare dalla curva C' restando, per la parte svolta, teso lungo una retta tangente a C' (un'*evolvente* di C').

2) Sia $C \subset R^2$ una curva di Jordan regolare orientata in modo che il versore normale $N(p)$ punti verso $I(C)$ per ogni $p \in C$. Denotando con $L = \operatorname{Lung} C$ la lunghezza di C e con $A = \operatorname{Area} I(C)$ l'area di $I(C)$, dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $C_\varepsilon = \{p + \varepsilon N(p) \mid p \in C\} \subset R^2$ è una curva di Jordan regolare, tale che $\operatorname{Lung} C_\varepsilon = L - 2\pi\varepsilon$ e $\operatorname{Area} I(C_\varepsilon) = A - \varepsilon(L - \pi\varepsilon)$. Concludere che il rapporto L^2/A minimo quando C è una circonferenza (cioè le circonferenze massimizzano l'area racchiusa a parità di lunghezza).

3) La definizione di rotazione totale $\rho(C) = \int_0^l \theta'(s)ds$ data per un arco di curva regolare orientato $C \subset R^2$ di lunghezza l, resta valida anche se C non semplice, cioè presenta autointersezioni. Verificare che per ogni curva chiusa regolare orientata, con eventuali autointersezioni, si ha $\rho(C) = 2k\pi$ con k intero. Inoltre se le sole autointersezioni di C sono n punti doppi trasversali (nei quali si incontrano due archi di C con tangenti distinte), allora $|k| < n+1$. Provare quindi che non esiste nessuna omotopia differenziabile di curve regolari orientate tra una circonferenza orientata in senso antiorario e una orientata in senso orario.

4) Sia $S_r \subset R^3$ una sfera di raggio $r > 0$ e sia $C \subset S_r$ una curva regolare in R^3. Provare che la curvatura di C soddisfa la disuguaglianza $\kappa(p) \geq 1/r$ per ogni $p \in C$ e che C è un cerchio massimo di S_r se e solo se vale l'uguaglianza per ogni $p \in C$. Verificare inoltre che la torsione di C può essere espressa in funzione della curvatura e della sua derivata rispetto all'ascissa curvilinea lungo C.

5) Sia $C \subset R^3$ una curva regolare connessa con curvatura ovunque non nulla, provare che le seguenti proprietà sono equivalenti:
   a) C è un arco di *elica cilindrica*, cioè C è contenuta in un cilindro e incontra le generatrici del cilindro formando angoli di ampiezza costante;
   b) il campo dei versori tangenti T_C forma un angolo costante con una direzione fissa;
   c) il campo dei versori normali N_C è ortogonale ad una direzione fissa;
   d) il rapporto τ_C/k_C tra curvatura e torsione è costante lungo C.

6) Nello spazio euclideo R^3 con coordinate x, y e z, provare che:
   a) la curva di equazioni parametriche $x = t + \sqrt{3}\sin t$, $y = 2\cos t$, $z = \sqrt{3}t - \sin t$ è un'elica circolare (determinarne l'asse, il raggio e il passo);
   b) la curva di equazioni parametriche $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ è congruente a una curva del tipo $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$, per opportuni valori di a,b e c.