Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 9 – 9 aprile 2026

1) Verificare il toro di rotazione $T \subset R^3$ di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$$

è una superficie regolare in R^3 e che le equazioni $x = \cos u\,(2 + \cos v)$, $y = \sin u\,(2 + \cos v)$ e $z = \sin v$, con parametri u e v, definiscono una parametrizzazione regolare di T. Utilizzando tale parametrizzazione, determinare l'operatore forma di T, la prima e la seconda forma fondamentale, le direzioni e le curvature principali, la curvatura di Gauss e la curvatura media in funzione dei parametri u e v.

2) Siano $S_1, S_2 \subset R^3$ due superfici regolari simili, cioè per le quali esiste una similitudine $\sigma : R^3 \to R^3$ tale che $S_2 = \sigma(S_1)$.
   a) Stabilire il legame tra le curvature di S_1 e S_2 in termini del fattore di similitudine di σ.
   b) Verificare che σ manda geodetiche e linee di curvatura di S_1 rispettivamente in geodetiche e linee di curvatura di S_2.

3) Sia $S \subset R^3$ una superficie regolare e sia $\pi \subset R^3$ un piano che taglia S trasversalmente in tutti i punti (cioè π non è in nessun punto tangente ad S) ed è piano di simmetria per S (cioè $\sigma(S) = S$, dove $\sigma : R^3 \to R^3$ è la simmetria rispetto al piano π). Verificare che $C = S \cap \pi$ è una curva regolare che è sia geodetica che linea di curvatura di S. Concludere che le linee di curvatura di una superficie di rotazione sono i meridiani e i paralleli.

4) Sia $S \subset R^3$ una superficie regolare orientata con curvature principali limitate. Provare che per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $S_\varepsilon = \{p + \varepsilon N(p) \mid p \in S\} \subset R^3$ è una superficie regolare (superficie *parallela*). Determinare il legame tra le curvature di S_ε e di S.

5) Data una parametrizzazione locale regolare $\omega : U \to R^3$ di una superficie in $S \subset R^3$, siano $V_1 = \partial\omega/\partial u_1$ e $V_2 = \partial\omega/\partial u_2$ i vettori tangenti ad S determinati dalle derivate parziali di ω rispetto ai parametri u_1 e u_2. Posto $W = V_1 \times V_2$ e $N = W/\|W\|$, provare che si hanno le uguaglianze $N_1 \times N_2 = K(V_1 \times V_2)$ e $N_1 \times V_2 + V_1 \times N_2 = -2H(V_1 \times V_2)$, dove K e H indicano rispettivamente la curvatura di Gauss e la curvatura media di S, mentre N_1 e N_2 denotano le derivate parziali di N rispetto ai parametri u_1 e u_2. Concludere che valgono le formule, dove W_1 e W_2 denotano le derivate parziali di W rispetto ai parametri u_1 e u_2:

$$K = \frac{W \cdot W_1 \times W_2}{\|W\|^4} \quad \text{e} \quad H = -\frac{W \cdot (W_1 \times V_2 + V_1 \times W_2)}{2\|W\|^3}\,.$$

6) Data una superficie differenziabile regolare orientata $S \subset R^3$ si denoti con $N : S \to S^2$ l'*applicazione di Gauss*, che associa ad ogni punto p di S il versore normale $N(p)$ ad S in p traslato nell'origine. Assumendo S^2 orientata in modo che il campo dei versori normali sia diretto verso l'esterno, provare che l'applicazione $N_* : T_pS \to T_{N(p)}S^2$ indotta sui piani tangenti coincide con l'opposto dell'operatore forma L_p^S di S in p a meno dell'isomorfismo $T_pS \cong T_{N(p)}S^2$ dato dalla traslazione $\tau_{p,N(p)}$.