Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2025/2026

GEOMETRIA 2

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (29 settembre, 2 ore)

Introduzione al corso. Spazi topologici, aperti e basi di aperti, confronto tra topologie.

Lezione 2. (1° ottobre, 2 ore)

Spazi metrici, topologia indotta da una metrica. Esempi di topologie metrizzabili e non metrizzabili. Sistemi di intorni e basi di intorni.

Lezione 3. (6 ottobre, 2 ore)

Operatori topologici di interno, chiusura e frontiera di un sottoinsieme. Punti di accumulazione e punti isolati di un sottoinsieme. Applicazioni continue, definizione globale e locale, continuità della composizione di funzioni continue. Omeomorfismi e equivalenza topologica di spazi.

Lezione 4. (8 ottobre, 2 ore)

Sottospazi topologici, immersioni topologiche. Continuità delle restrizioni, teorema di incollamento delle funzioni continue. Unioni topologiche, caratterizzazione in termini di sottospazi aperti, continuità delle applicazioni definite su un'unione topologica.

Lezione 5. (13 ottobre, 2 ore)

Prodotti topologici, continuità delle applicazioni a valori in un prodotto topologico. Quozienti topologici, continuità di applicazioni definite su un quoziente. Azioni topologiche e quozienti, esempi di quozienti indotti da azioni topologiche (tori, sfere e proiettivi).

Lezione 6. (15 ottobre, 2 ore)

Proprietà topologiche globali e locali. Assiomi di separazione e metrizzabilità, assioma di Hausdorff e unicità dei limiti, regolarità e basi di intorni chiusi. Lemma di Urysohn per gli spazi metrizzabili, metrizzabile implica normale, metrizzabilità delle unioni e dei prodotti topologici.

Lezione 7. (22 ottobre, 2 ore)

Assiomi di numerabilità: basi numerabili, basi di intorni numerabili, separabilità. Chiusura e continuità per successioni, spazi metrizzabili separabili hanno basi numerabili, teorema di Lindelöf, partizioni dell'unità.

Lezione 8. (27 ottobre, 2 ore)

Spazi topologici compatti, compattezza dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della compattezza, compattezza di unioni e prodotti, sottospazi compatti di R^m. Spazi di Hausdorff compatti, normalità, decomposizione canonica delle applicazioni continue.

Lezione 9. (29 ottobre, 2 ore)

Compattificazioni, esempi ($\widetilde{R}^m \cong B^m$, $\overline{R}^m \cong P^m$, $\widehat{R}^m \cong S^m$), compattificazione di Alexandroff. Compattezza di spazi metrici, compattezza per successioni e proprietà di Bolzano-Weierstrass, continuità uniforme.

Lezione 10. (3 novembre, 2 ore)

Completezza, proprietà metrica e non topologica, relazioni con la compattezza (locale). Teorema di Baire, teorema del punto fisso per le contrazioni.

Lezione 11. (5 novembre, 2 ore)

Connessione e connessione per archi, connessione dell'intervallo $[0,1]$, conservazione della connessione, connessione di unioni e prodotti, sottospazi connessi di R. Componenti connesse e connesse per archi.

Lezione 12. (10 novembre, 2 ore)

Omotopia tra applicazioni, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili. Omotopia relativa, deformazioni su sottospazi. Spazi semplicemente connessi.

Lezione 13. (12 novembre, 2 ore)

Spazi puntati, spazi di cappi. Gruppo fondamentale, omomorfismi indotti dalle applicazioni continue, invarianza topologica. Indipendenza dal punto base e invarianza omotopica del gruppo fondamentale.

Lezione 14. (17 novembre, 2 ore)

Rivestimenti, rivestimenti regolari e azioni propriamente discontinue, proprietà di sollevamento unico dei cammini, delle omotopie e delle applicazioni, rivestimenti universali ($R \to S^1$, $R^m \to T^m$, $S^m \to P^m$ per $m > 1$).

Lezione 15. (19 novembre, 2 ore)

Gruppo delle trasformazioni di un rivestimento, regolarità e unicità del rivestimento universale, calcolo del gruppo fondamentale mediante il rivestimento universale ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(T^m) \cong \mathbb{Z}^m$, $\pi_1(P^m) \cong \mathbb{Z}_2$ per $m > 1$). Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto.

Lezione 16. (24 novembre, 2 ore)

Gruppi liberi e loro proprietà universale, presentazioni (finite) di gruppi, prodotto libero e prodotto diretto. Teorema di Seifert-Van Kampen. Unione puntata di spazi topologici, gruppo fondamentale di un'unione puntata, $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$. Altre applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen: $\pi_1(R^2 - \{p_1, \ldots, p_k\})$, $\pi_1(S^m)$ con $m > 1$, $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(P^2)$.

Lezione 17. (26 novembre, 2 ore)

Classificazione omotopica delle sfere, invarianza topologica della dimensione. Teorema di non retrazione e teorema del punto fisso di Brouwer. Teorema di Jordan e teorema di Schönflies, casi speciali convesso e poligonale.

Lezione 18. (1° dicembre, 2 ore)

Grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, indice di allacciamento di una curva piana orientata rispetto ad un punto, cenno alla dimostrazione del teorema di Jordan.

Lezione 19. (3 dicembre, 2 ore)

Nodi nello spazio, gruppo di un nodo, presentazione di Wirtinger, abelianizzazione. Gruppo del nodo banale e del nodo trifoglio. Varietà topologiche, carte locali e atlanti, carte speciali, proprietà locali delle varietà, invarianza della dimensione per le varietà.