Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2025/2026

GEOMETRIA SUPERIORE

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (30 settembre, 2 ore)
Introduzione al corso. Richiami sulle varietà topologiche, carte e atlanti, metrizzabilità, teorema di immersione in R^n, teoremi di invarianza dei domini e dimensione e dei domini. Varietà con bordo, invarianza del bordo.

Lezione 2. (1° ottobre, 2 ore)
Richiami sul calcolo differenziale in R^m, diffeomorfismi e teorema della funzione inversa, teorema di Sard. Carte differenziabilmente compatibili, atlanti e strutture differenziabili, esistenza e unicità della struttura differenziabile generata da un atlante differenziabile. Varietà differenziabili, esempi (R^m, S^m, T^m, P^m).

Lezione 3. (6 ottobre, 2 ore)
Unioni topologiche e prodotti di varietà differenziabili, rivestimenti di varietà differenziabili. Applicazioni differenziabili e diffeomorfismi tra varietà. Confronto di diverse strutture differenziabili su R. Quozienti di varietà differenziabili mediante azioni differenziabili propriamente discontinue.

Lezione 4. (8 ottobre, 2 ore)
Atlanti orientati e orientazioni su varietà differenziabili, varietà orientabili e varietà orientate. Orientazioni su una varietà orientabile connessa. Applicazioni differenziabili tra varietà che conservano/invertono l'orientazione. Esempi di varietà orientabili e non orientabili (orientazioni standard su R^m, S^m e T^m; P^m orientabile se e solo se m è dispari).

Lezione 5. (13 ottobre, 2 ore)
Sottovarietà differenziabili, carte locali adattate; equazioni locali regolari e parametrizzazioni locali regolari; curve e superfici in R^2 e R^3, esempi di curve differenziabili e non differenziabili in R^2.

Lezione 6. (15 ottobre, 2 ore)
Caratterizzazione delle sottovarietà differenziabili di R^n come grafici di funzioni differenziabili. Partizioni dell'unità differenziabili, teorema di approssimazione differenziabile.

Lezione 7. (20 ottobre, 2 ore)
Immersioni differenziabili regolari di varietà differenziabili in R^n, intorni tubolari.

Lezione 8. (22 ottobre, 2 ore)
Richiami di calcolo differenziale in R^m, vettori tangenti e derivazioni, spazi tangenti e cotangenti, applicazioni tangenti e cotangenti, differenziali di funzioni. Vettori tangenti a una varietà differenziabile come classi di curve e come derivazioni. Spazi tangenti e applicazioni tangenti su varietà.

Lezione 9. (27 ottobre, 2 ore)
Sottospazi tangenti a sottovarietà, equazioni e parametrizzazioni. Teorema di Sard sulle varietà. Trasversalità, teorema di approssimazione trasversale, intersezione di sottovarietà trasversali.

Lezione 10. (29 ottobre, 2 ore)

Fibrato tangente come varietà differenziabile orientata. Teorema di immersione di Whitney. Campi di vettori, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili. Parentesi di Lie, identità di Jacobi, algebra di Lie dei campi di vettori.

Lezione 11. (3 novembre, 2 ore)

Curve integrali per un campo di vettori, esistenza e unicità. Campi di riferimenti e campi di riferimenti coordinati, caratterizzazione dei campi di riferimenti coordinati in termini di parentesi di Lie.

Lezione 12. (5 novembre, 2 ore)

Spazi e applicazioni cotangenti su varietà; differenziali di funzioni su varietà. Fibrato cotangente come varietà differenziabile orientata. Forme differenziali lineari, prodotto esterno e algebra di Grassmann.

Lezione 13. (10 novembre, 2 ore)

Forme differenziali in coordinate, cambiamenti di coordinate, applicazioni indotte da applicazioni differenziabili. Differenziale esterno, definizione in coordinate, esistenza e unicità.

Lezione 14. (12 novembre, 2 ore)

Forme chiuse e forme esatte, lemma di Poincaré (forma chiusa $\Leftrightarrow$ localmente esatta). Chiusi ammissibili in varietà differenziabili, varietà differenziabili con bordo. Integrale di una funzione a supporto compatto su un chiuso ammissibile di R^m.

Lezione 15. (17 novembre, 2 ore)

Integrale di una m-forma a supporto compatto su un chiuso ammissibile in una m-varietà differenziabile orientata. Forme di volume e orientazioni. Integrazione di funzioni in una varietà differenziabile con una forma di volume (caso speciale: R^m con la forma di volume euclidea). Integrazione di forme su sottovarietà differenziabili. Bordo di un chiuso ammissibile, orientazione indotta.

Lezione 16. (19 novembre, 2 ore)

Teorema di Stokes. Forme differenziali e calcolo vettoriale in R^2 e R^3. Conseguenze del teorema di Stokes: formule di Green, teorema di Gauss, teorema di Stokes classico.

Lezione 17. (24 novembre, 2 ore)

Coomologia di De Rham, struttura moltiplicativa, coomologia in dimensione 0 e m. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni differenziabili. Omomorfismi indotti in coomologia dalle applicazioni continue, invarianza omotopica.

Lezione 18. (26 novembre, 2 ore)

Successione esatta di Mayer-Vietoris. Finitezza della coomologia delle varietà compatte. Numeri di Betti, caratteristica di Eulero, espressione in termini di decomposizioni poliedrali.

Lezione 19. (1° dicembre, 2 ore)

Coomologia delle sfere, teorema di non retrazione, teorema di punto fisso di Brouwer, teorema di invarianza della dimensione.

Lezione 20. (3 dicembre, 2 ore)

Teorema di separazione di Jordan in R^m. Teorema di invarianza del dominio, invarianza della dimensione, del bordo e dell'interno delle varietà con bordo.