

TEORIA DEI NODI*prof. Riccardo Piergallini****Programma del corso***

Definizioni di base. Nodi, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica. Nodi docili, intorni tubolari topologici, nodi lisci e poligonali. Deformazioni docili, estensione ad isotopie ambiente, deformazioni poligonali e deformazioni lisce. Classificazione di nodi lisci, nodi banali, caratterizzazione come bordi di dischi lisci. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di perturbazioni, movimenti di Reidemeister. Banalizzazione di nodi mediante inversione di incroci, banalità dei nodi in R^n con $n > 3$. Gruppo $G(K)$ di un nodo K , presentazione di Wirtinger, abelianizzazione e numero delle componenti. Classi speciali di nodi: nodi torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Somma connessa di nodi.

Invarianti numerici. Indice di allacciamento, invarianza isotopica, dipendenza dall'orientazione. Superficie di Seifert, costruzione basata sui diagrammi, simmetria dell'indice di allacciamento. K banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$. Genere $g(K)$ di un nodo K , K banale se e solo se $g(K) = 0$, additività del genere, decomposizione in nodi primi. Numero minimo di incroci $c(K)$, K banale se e solo se $c(K) = 0$, tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi. Indice di contorcimento di un diagramma, invarianza per isotopia regolare. Nodi n -colorabili, invarianza isotopica della n -colorabilità. Nodi geometrici, numero di incroci medio e indice di contorcimento medio, indice di allacciamento e integrale di Gauss, teorema di White.

Polinomi di Kauffman e Jones. Parentesi di Kauffman, risoluzione di incroci e stati di un diagramma, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare. Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e somma connessa. Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman. Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica. Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti, polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

Trecce e polinomio di Jones in due variabili. Trecce e isotopia di trecce, gruppo \mathcal{B}_n delle n -trecce. Spazio $\Gamma_n R^2$ delle n -configurazioni del piano, \mathcal{B}_n come gruppo fondamentale di $\Gamma_n R^2$. Trecce chiuse, teorema di Alexander, algoritmo di Vogel. Relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister, stabilizzazione di trecce, teorema di Markov. Rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura. Tracce sulle algebre di Hecke, polinomio di Jones in due variabili $V_K(x, y)$, equazione caratteristica, dipendenza dall'orientazione, polinomi $V_K(x, y)$ di nodi simmetrici e somma connessa.

Polinomio di Alexander-Conway e forme di Seifert. Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Polinomio di Alexander $\Delta_K(t)$, equazione caratteristica, calcolo basato sui diagrammi. Polinomio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie e alla somma connessa. Relazione tra polinomio di Alexander-Conway e genere, segnature e nodi “slice”.

Invarianti di Vassiliev. Nodi singolari, movimenti di isotopia liscia, inversione di incroci e singolarità doppie trasversali. Invarianti di Vassiliev, equazione caratteristica, invarianti di ordine finito, simboli. Diagrammi di Gauss, relazioni tra diagrammi e diagrammi base, calcolo degli invarianti di ordine finito. Teorema di Vassiliev-Kontsevich, polinomio di Conway e invarianti di Vassiliev. Grafi topologici nello spazio, movimenti di isotopia, grafi intrinsecamente annodati.

Testi di riferimento

- W.B. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, GTM 175, Springer
A. Sossinsky, *Knots. Mathematics with a twist*, Harward University Press

Testi consigliati

- P.R. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge Univ. Press
C. Livingston, *Knot Theory*, The Carus Math. Monogr. 24, MAA
V.V. Prasolov e A.B. Sossinsky, *Knots, link, braids and 3-manifolds*, Math. Monogr. 154, AMS
D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing
J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer