Università di Camerino – Scuola di Scienze e Tecnologie

Corso di Laurea magistrale in Matematica e applicazioni

Anno Accademico 2025/2026

TEORIA DEI NODI

prof. Riccardo Piergallini

Registro delle lezioni

Lezione 1. (29 settembre, 2 ore)

Definizioni di base: nodi e link, orientazioni, equivalenza topologica e isotopica. Nodi simmetrici e nodi invertibili. Teorema di approssimazione differenziabile di immersioni, omeomorfismi e isotopie tra aperti di R^m con $m \leq 3$. Caratterizzazione degli omeomorfismi dello spazio realizzabili mediante isotopie in termini di orientazioni.

Lezione 2. (1° ottobre, 2 ore)

Deformazioni di nodi, equivalenza per deformazioni, deformazioni docili. Esempi di nodi selvaggi e deformazioni selvagge. Nodi docili, intorni tubolari topologici, rappresentazione dei nodi docili come nodi lisci e poligonali a meno di ε-isotopie.

Lezione 3. (6 ottobre, 2 ore)

Deformazioni docili, realizzazioni delle deformazioni docili come deformazioni lisce e poligonali, estensione delle deformazioni docili a isotopie dello spazio. Classificazione di nodi lisci a meno di diffeomorfismi e isotopie lisce, caratterizzazione dei diffeomorfismi dello spazio realizzabili mediante isotopie lisce in termini di orientazioni.

Lezione 4. (8 ottobre, 2 ore)

Nodi banali, K nodo connesso banale se e solo se bordo di un disco docile, K nodo banale se e solo se ogni componente è banale e separata (anelli di Borromeo). Diagrammi di nodi lisci e poligonali, esistenza a meno di ε-isotopie, determinazione del nodo a meno di isotopie verticali.

Lezione 5. (13 ottobre, 2 ore)

Equivalenza di diagrammi, movimenti di Reidemeister. Gruppo $G(K)$ di un nodo K, presentazione di Wirtinger, abelianizzato $H(K) = \mathrm{Ab}(G(K))$ e numero $n(K)$ delle componenti di K.

Lezione 6. (15 ottobre, 2 ore)

K nodo connesso banale se e solo se $G(K)$ abeliano se e solo se $G(K) \cong \mathbb{Z}$ (lemma del cappio). Esempi di classi di nodi: tori torici, nodi Pretzel, nodi razionali. Unione separata di nodi e somma connessa $K_1 \# K_2$ di nodi connessi K_1 e K_2.

Lezione 7. (20 ottobre, 2 ore)

Numero $c(K)$ di incroci necessari per rappresentare K, K banale se e solo se $c(K) = 0$ (teorema di Schönflies), tabelle dei nodi primi basate su $c(K)$. Banalizzazione di nodi mediante inversione di incroci, indice di banalizzazione $u(K)$. Banalità dei nodi in R^n con $n > 3$. Superfici di Seifert, costruzione basata sui diagrammi. Genere $g(K)$ di un nodo K, K banale se e solo se $g(K) = 0$. Additività del genere, decomposizione in nodi primi.

Lezione 8. (22 ottobre, 2 ore)

Indice di allacciamento $\ell(K_1, K_2)$ tra nodi orientati K_1 e K_2, invarianza isotopica (link di Hopf H non banale), simmetria, dipendenza dall'orientazione, K_1 e K_2 separati implica $\ell(K_1, K_2) = 0$ ma non viceversa (link di Whitehead W). Calcolo dell'indice di allacciamento sui diagrammi.

Lezione 9. (27 ottobre, 2 ore)

Invariante di Arf-Casson $a(K)$ di un nodo connesso (orientato) K, definizione ricorsiva sui diagrammi. Invarianza isotopica, simmetria, indipendenza dall'orientazione, additività rispetto alla somma connessa. Esempi $a(T) = 1$ e $a(E) = -1$ (quindi $T \ncong E$ non banali).

Lezione 10. (29 ottobre, 2 ore)

Quandle e colorazioni di diagrammi, invarianza per movimenti di Reidemeister. Numero $q_n(K)$ delle n-colorazioni ridotte, invarianza isotopica, moltiplicatività rispetto alla somma connessa, esempi di nodi non equivalenti (link di Whitehead W non banale).

Lezione 11. (3 novembre, 2 ore)

Risoluzione di incroci e stati di un diagramma. Parentesi di Kauffman, formula ricorsiva sulle risoluzioni, invarianza per isotopia regolare. Indice di arricciamento. Polinomio di Kauffman $P_K(t)$, dipendenza dall'orientazione, polinomi di Kauffman di nodi simmetrici e della somma connessa. Equazione caratteristica del polinomio di Kauffman, parità delle potenze che vi compaiono.

Lezione 12. (5 novembre, 2 ore)

Polinomio di Jones $V_K(x)$, equazione caratteristica, esempi (non simmetria dei nodi trifoglio). Diagrammi alternanti, colorazioni a scacchiera, nodi alternanti e non-alternanti. Proprietà del polinomio di Jones di nodi alternanti, dimostrazione della congettura di Tait.

Lezione 13. (10 novembre, 2 ore)

Trecce e isotopia di trecce, gruppo $\mathcal{B}_n$ delle n-trecce. Spazio delle $\Gamma_n R^2$ delle n-configurazioni del piano, rivestimento delle n-uple ordinate (coefficienti e radici di polinomi complessi). $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(\Gamma_n R^2)$, omomorfismo $\phi_n : \mathcal{B}_n \to \Sigma_n$, $\mathcal{B}_1 \cong 0$ e $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{B}_n$ non commutativo per $n > 2$. Diagrammi di trecce lisce e poligonali.

Lezione 14. (12 novembre, 2 ore)

Presentazione standard dei gruppi di trecce. Trecce chiuse, teorema di Alexander, relazioni tra trecce e movimenti di Reidemeister. Algoritmo di Vogel, numero minimo di stringhe per rappresentare un nodo K e numero minimo di dischi di Seifert di un diagramma di K. Teorema di Markov, stabilizzazione e coniugio di trecce.

Lezione 15. (17 novembre, 2 ore)

Rappresentazioni del gruppo delle trecce, rappresentazione simmetrica e sua deformazione di Burau, somma degli esponenti. Algebre di Hecke, teorema di struttura (forma normale), tracce sulle algebra di Hecke.

Lezione 16. (19 novembre, 2 ore)

Generalizzazione del polinomio di Jones al polinomio in due variabili $W_K(x, y)$. Equazione caratteristica di $W_K(x, y)$, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie e alla somma connessa.

Lezione 17. (24 novembre, 2 ore)

Primo gruppo di omologia di una superficie di Seifert. Forme e matrici di Seifert di un nodo orientato. Trasformazioni iperboliche tra superfici di Seifert dello stesso nodo. Polinomio di Alexander $\Delta_K(t)$, invarianza isotopica.

Lezione 18. (26 novembre, 2 ore)

Polinomio di Conway $\nabla_K(y)$, equazione caratteristica, proprietà rispetto alle orientazioni, alle simmetrie a alla somma connessa, relazione tra polinomio di Conway e genere.

Lezione 19. (1° dicembre, 2 ore)

Nodi "slice" e nodi "ribbon", congettura slice $\Rightarrow$ ribbon. Polinomio di Alexander di nodi a fetta, segnature e determinanti di nodi a fetta.

Lezione 20. (3 dicembre, 2 ore)

Nodi singolari, movimenti di isotopia liscia, inversione di incroci e singolarità doppie trasversali.

Invarianti di Vassiliev, equazione caratteristica e conseguenze. Esempi derivati dai coefficienti del polinomio di Conway.