

Esercizi di Geometria 2

Foglio n. 1 – 7 ottobre 2026

- 1) Verificare che la famiglia degli intervalli semiaperti $[a, b[\subset \mathbb{R}$ con $a < b$ è base di una topologia $\mathcal{S}$ su $\mathbb{R}$ più fine della usuale topologia euclidea $\mathcal{E}$. Provare che $\mathbb{R}_{\mathcal{S}}$ è unione topologica delle due semirette $]-\infty, 0[$ e $[0, +\infty[$ dotate della topologia indotta.

- 2) Dati due spazi topologici X e Y e due sottoinsiemi $A \subset X$ e $B \subset Y$, dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\text{Int}_{X \times Y} A \times B = \text{Int}_X A \times \text{Int}_Y B ,$$

$$\text{Cl}_{X \times Y} A \times B = \text{Cl}_X A \times \text{Cl}_Y B .$$

Esprimere inoltre $\text{Fr}_{X \times Y} A \times B$ in termini di $\text{Fr}_X A$ e $\text{Fr}_Y B$.

- 3) Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) spazi metrici. Verificare che le equazioni:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

$$d'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

$$d''((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

definiscono metriche equivalenti su $X_1 \times X_2$, infatti si ha:

$$(X_1 \times X_2, \langle d \rangle) = (X_1 \times X_2, \langle d' \rangle) = (X_1 \times X_2, \langle d'' \rangle) = (X_1, \langle d_1 \rangle) \times (X_2, \langle d_2 \rangle) .$$

- 4) Dato uno spazio topologico X , si consideri l'insieme $F = \{f : X \rightarrow [0, 1]\}$ e il suo sottoinsieme $C = \{f \in F \mid f \text{ è continua}\}$. Provare che l'uguaglianza

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

definisce una metrica su F rispetto alla quale C risulta chiuso in F .

- 5) Sia X uno spazio topologico la cui topologia è indotta dalla distanza d . Dimostrare che, per ogni punto $p \in X$ e per ogni sottoinsieme $S \subset X$, le seguenti funzioni sono continue:

$$\varphi_p : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita } \varphi_p(x) = d(x, p) ,$$

$$\varphi_S : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita } \varphi_S(x) = d(x, S) = \inf_{s \in S} d(x, s) .$$

- 6) Verificare che $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}_+ \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}$ per ogni $m \geq 1$ e che $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n \cong S^{m-n-1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ per ogni $m > n \geq 1$. Concludere, ragionando per induzione su m , che esiste un'immersione di T^m in $\mathbb{R}^{m+1} - \mathbb{R}^{m-1}$ e quindi in $\mathbb{R}^{m+1}$ per ogni $m \geq 1$.