Eversione della sfera

=

rovesciamento della sfera nello spazio euclideo mediante una famiglia differenziabile regolare di immersioni locali differenziabili regolari

Immersioni differenziabili regolari

punti doppi

punti tripli

Deformazioni differenziabili regolari

Breve storia dell'eversione

Steve Smale (1957)

dimostra un teorema generale sulle immersioni locali regolari, da cui segue che è possibile rovesciare la sfera, ma non riesce a dare nessuna descrizione esplicita del rovesciamento lasciando increduli molti matematici

Arnold Shapiro (1961)

riesce a descrivere eplicitamente un rovesciamento, ma non pubblica questo risultato, che verrà pubblicato da George Francis e Bernard Morin molti anni dopo (1979)

Tony Phillips (1966)

studia l'eversione di Shapiro e la comunica al grande pubblico (matematico e non) in un articolo su "Scientific American" (si scoprirà poi che è un'altra eversione)

<u>Nelson Max (1977)</u>

realizza la prima animazione al computer di un'eversione semplificata proposta da Bernard Morin nel 1967

<u>Bernard Morin (1978)</u>

rielabora il suo metodo per il rovescimento della sfera, fornendo per la prima volta una descrizione completa dell'eversione in termini di equazioni algebriche

Françoise Apéry (1992)

costruisce una nuova eversione algebrica che utilizza il minimo numero possibile di mofidicazioni topologiche

tutte le eversioni della sfera considerate fin qui hanno come stadio centrale un'immersione locale regolare tale che punti antipodali hanno la stessa immagine

$$f : S^2 \looparrowright R^3 \text{ t.c. } f(-x) = f(x) \leftrightsquigarrow f : S^2 \to P^2 \looparrowright R^3$$

Bill Thurston (metà anni '70 – 1995)

dà una dimostrazione costruttiva del teorema di Smale, basata sull'idea di "corrugazione", che consente costruire esplicitamente nuove eversioni della sfera

G. Francis, R. Kusner, J. Sullivan
K. Brakke, C. Hartman e G. Chappell (1995 – 98)

scoprono che si possono costruire eversioni in modo "automatico" a partire da uno stadio centrale simmetrico, seguendo il gradiente dell'energia di Willmore $\int H^2 dA$

Il teorema di Smale

$$\boxed{\mathrm{Imm}(S^n, R^m) \leftrightsquigarrow [S^n, V_n^m]}$$

$$\mathrm{Imm}(S^n, R^m) = \frac{\{i : S^n \looparrowright R^m \ \text{imm. loc. diff. reg.}\}}{\text{deformazioni differenziali regolari}}$$

$$V_n^m = \{v_1, \ldots, v_n \in R^m \,|\, v_i \cdot v_j = \delta_{ij}\}$$

$$[X, Y] = \frac{\{f : X \to Y \ \text{appl. cont.}\}}{\text{deformazioni continue}}$$

$f \simeq g : X \to Y$ (applicazioni continue <u>omotope</u>)

$\Longleftrightarrow \ \exists\, (h_t)_{t \in [0,1]} : X \to Y$ famiglia "continua"

di appl. cont. t.c. $h_0 = f$ e $h_1 = g$ (<u>omotopia</u>)

<u>in particolare</u>:

$$\boxed{\mathrm{Imm}(S^n, R^{n+1}) \leftrightsquigarrow [S^n, \mathrm{SO}(n+1)]}$$

$$V_n^n \cong \mathrm{SO}(n) = \{M \text{ mat. ort. pos. di ordine } n\}$$
$$\mathrm{SO}(n) \cong \mathrm{Isom}_+ R^n = \{l : R^n \to R^n \text{ isomet. lineare}\}$$

$$\underline{n = 1}$$

$$\mathrm{SO}(2) \cong S^1 \text{ (gruppo delle rotazioni del piano)}$$
$$[S^1, S^1] \leftrightsquigarrow \mathbb{Z} \quad (f \leftrightarrow d(f) = \text{grado di } f)$$

$$\boxed{\mathrm{Imm}(S^1, R^2) \leftrightsquigarrow \mathbb{Z}}$$

Indice di rotazione

$$\rho : \mathrm{Imm}(S^1, R^2) \to [S^1, \mathrm{SO}(2)] \cong \mathbb{Z}$$

$$\rho(S^1 \subset R^2) = 1 \qquad \qquad \rho(i) = -1$$

la costruzione non si può generalizzare al caso $n > 1$

(S^n è parallelizzabile solo per $n = 1, 3, 7$)

Cambiamo riferimento

$$\tau : \mathrm{Imm}(S^1, R^2) \to [S^1, \mathrm{SO}(2)] \cong \mathbb{Z}$$

$$\tau(S^1 \subset R^2) = 0 \qquad\qquad \tau(i) = -2$$

la costruzione si può generalizzare al caso $n > 1$

S^n è rovesciabile in $R^{n+1} \Leftrightarrow \tau(i) \simeq$ costante

$\underline{n = 2}$

$$\mathrm{SO}(3) = \text{gruppo delle rotazioni dello spazio}$$

$$\pi : S^3 \to \mathrm{SO}(3) \cong S^3/\mathbb{Z}_2 \cong P^3 \ \text{rivestimento universale}$$

$$f : S^2 \to \mathrm{SO}(3) \ \text{continua} \Rightarrow f \simeq \text{costante}$$

$$S^2 \ \text{sempl. connesso} \rightsquigarrow g : S^2 \to S^3 \ \text{sollev. continuo di} \ f$$

$$g \simeq h \ \text{differenziabile} \Rightarrow h(S^2) \neq S^3 \Rightarrow h(S^2) \subset S^3 - \{p\}$$

$$S^3 - \{p\} \cong R^3 \searrow 0 \Rightarrow h \simeq \text{cost.} \Rightarrow f = \pi\, g \simeq \pi\, h \simeq \text{cost.}$$

$$\begin{tikzcd}
 & S^3 \arrow[d, "\pi"] \\
S^2 \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & \mathrm{SO}(3)
\end{tikzcd}$$