

# NODI E GRAFI

Riccardo Piergallini

## Premessa

Questo corso ha lo scopo di fornire spunti utili all'introduzione di argomenti topologici nell'insegnamento della matematica nelle scuole medie superiori.

Per loro natura tali argomenti si prestano ad avvicinare lo studente al rigore logico e all'astrazione matematica in modo "amichevole", con il supporto dell'intuizione spazio/temporale e della manipolazione fisica.

Inoltre, pur partendo da una trattazione molto elementare essi consentono di arrivare rapidamente all'enucleazione e all'esposizione di problemi e risultati profondi, spesso alla base di applicazioni in cui la matematica gioca un ruolo essenziale come potente strumento di modellazione concettuale e non solo di calcolo. Questo percorso può essere molto importante per stimolare la curiosità e l'interesse degli studenti, a condizione di evitare il pericoloso miraggio che si possano conseguire facilmente risultati "difficili".

In tale contesto, nodi e grafi sono considerati solo come gli oggetti più semplici ai quali è possibile applicare in modo non banale i concetti intuitivi di "trasformazione continua" e "deformazione continua" su cui si fonda la topologia. Altrettanto bene andrebbero le superfici, che peraltro ricorreranno di tanto in tanto nel nostro discorso.

I nostri ambienti di lavoro saranno quasi sempre il piano e lo spazio euclideo, con qualche escursione nella sfera e nel toro bidimensionali e nello spazio a quattro dimensioni. Spesso sarà utile il ricorso a modelli fisici degli oggetti in esame, che potranno essere realizzati facilmente con materiali "poveri" come corde o fogli di cartoncino.

Per trattazioni più rigorose e complete della "teoria dei nodi" e della "teoria dei grafi", che si presentano oggi come teorie matematiche organiche molto sviluppate, rimandiamo ai testi in bibliografia. Qui cercheremo di evidenziarne gli aspetti interessanti dal punto di vista didattico, limitando al minimo i risvolti tecnici e cercando piuttosto di suggerire i possibili legami con argomenti più curriculari.

## 1. Spazi, oggetti e trasformazioni

### 1.1. Gli spazi euclidei

Denotiamo con  $R^n$  lo spazio euclideo  $n$ -dimensionale con la usuale *metrica euclidea* definita  $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  per ogni  $x, y \in R^n$ .

Considereremo  $R^n$  come spazio topologico, dotato della *topologia euclidea* indotta da questa metrica, cioè la topologia che ha come base di intorni di un punto  $x \in R^n$  la famiglia delle bocce aperte  $B(x, \varepsilon) = \{y \in R^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$  con  $\varepsilon > 0$ .

La nozione di *funzione continua*  $f : R^n \rightarrow R^m$  relativa a questa topologia coincide con quella usualmente data in analisi:  $\forall x \in R^n, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x, \varepsilon) > 0$  tale che  $\forall y \in R^n$  con  $\|x - y\| < \delta$  si ha  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ .

Nello spirito di Klein, fare della topologia in  $R^n$  significa studiare questo spazio e i suoi sottospazi a meno del gruppo delle *trasformazioni topologiche* (o *omeomorfismi*), cioè delle applicazioni biunivoche  $g : R^n \rightarrow R^n$  tali che  $g$  e  $g^{-1}$  sono continue.

In particolare, le usuali trasformazioni geometriche euclidee (traslazioni, congruenze, isometrie, similitudini) sono tutte trasformazioni topologiche. Ma queste ultime sono molto più generali, come illustrato dal seguente esempio.

**ESERCIZIO 1.1.1.** Per ogni  $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset R$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_k\} \subset R$  sottoinsiemi finiti della retta reale  $R$  con la stessa cardinalità  $k \geq 1$ , esiste una trasformazione topologica  $g : R \rightarrow R$  tale che  $g(X) = Y$ . Lo stesso vale per i sottoinsiemi finiti di  $R^n$ , qualunque sia  $n \geq 1$ .

Nel seguito lavoreremo nel *piano euclideo*  $R^2$  e nello *spazio euclideo* (3-dimensionale)  $R^3$  e studieremo loro sottoinsiemi (dotati della topologia di sottospazio) a meno di trasformazioni topologiche. In questo caso, il concetto di trasformazione topologica è legato (come spiegheremo più avanti) all'idea intuitiva di deformazione continua (nel tempo e nello spazio) che ricaviamo dalla nostra esperienza fisica.

## 1.2. La circonferenza, la sfera e il toro

In particolare, consideriamo i seguenti sottospazi del piano/spazio euclideo: la circonferenza  $S^1 = \{x \in R^2 \mid \|x\| = 1\} \subset R^2$ , la sfera  $S^2 = \{x \in R^3 \mid \|x\| = 1\} \subset R^3$  e il toro  $T = S^1 \times S^1 \subset R^2 \times R^2 \cong R^4$ .

La sfera e il toro sono superfici (connesse e compatte) e possono essere entrambi pensati come ampliamenti (compattificazioni) del piano euclideo con l'aggiunta di "punti all'infinito". Per questo sarà a volte interessante adottare la sfera e il toro come ambienti di lavoro alternativi al piano.

La sfera si può ottenere dal piano euclideo con l'aggiunta di un solo punto all'infinito, cioè  $S^2 \cong \widehat{R^2} = R^2 \cup \{\infty\}$  (compattificazione di Alexandroff), come risulta dal seguente esercizio.

**ESERCIZIO 1.2.1.** Ponendo  $\infty = (0, 0, 1) \in S^2$  (polo nord della sfera), la *proiezione stereografica*  $\varphi : S^2 - \{\infty\} \rightarrow R^2$  da  $\infty$  su  $R^2 \subset R^3$  dà un'equivalenza topologica  $S^2 - \{\infty\} \cong R^2$  (cf. figura 1). Poiché tutti i punti della sfera sono equivalenti a meno di rotazioni, un'analoga equivalenza topologica  $S^2 - \{p\} \cong R^2$  si ha per ogni punto  $p \in S^2$ .

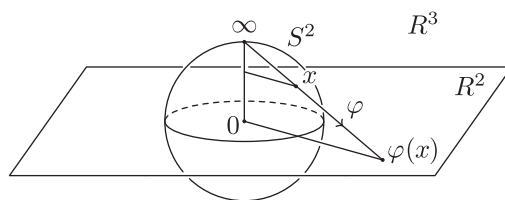


FIGURA 1. Proiezione stereografica.

Il toro è costruito nello spazio euclideo 4-dimensionale, ma può in effetti essere anche realizzato come superficie di rotazione nello spazio 3-dimensionale, e quindi pensato come sottospazio di  $R^3$  (cf. esercizio 1.2.2). Questa rappresentazione consente anche di visualizzare  $T$  come ampliamento di  $R^2$ : possiamo pensare come insieme dei punti all'infinito l'unione del meridiano e del parallelo tracciati in figura 2.

**ESERCIZIO 1.2.2.** La superficie ottenuta ruotando il meridiano  $M \subset R^3$  in figura 2 (di equazioni  $x^2 + z^2 + 4x + 3 = 0$  e  $y = 0$ ) intorno all'asse  $z$  è topologicamente

equivalente al toro  $T$ . Inoltre, se  $P$  è il parallelo in figura 2 (di equazioni  $x^2 + y^2 = 4$  e  $z = 1$ ), allora  $T - (M \cup P)$  è topologicamente equivalente a un quadrato (aperto) nel piano euclideo, quindi si ha  $T - (M \cup P) \cong \mathbb{R}^2$ .

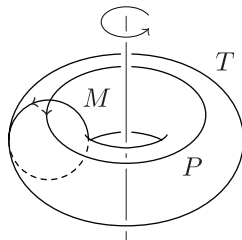


FIGURA 2. Toro di rotazione in  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.3. Trasformazioni topologiche

Abbiamo detto sopra che le trasformazioni topologiche del piano e dello spazio sono legate all'idea intuitiva di “deformazione continua”. Tale legame può essere formalizzato mediante la nozione di isotopia.

**DEFINIZIONE 1.3.1.** Due applicazioni continue  $f, g : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici sono *omotope* se esiste una famiglia applicazioni continue  $h_t : X \rightarrow Y$  che dipendono in modo continuo dal parametro  $t \in [0, 1]$ , tale che  $h_0 = f$  e  $h_1 = g$ . Più precisamente si richiede che sia continua l'applicazione  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  definita  $H(x, t) = h_t(x)$  per ogni  $(x, t) \in X \times [0, 1]$ .  $H$  è detta *omotopia* tra  $f$  e  $g$ .

**DEFINIZIONE 1.3.2.** Due trasformazioni topologiche (cioè omeomorfismi)  $f, g : S \rightarrow S$  di uno spazio topologico  $S$  sono *isotope* se esiste un'omotopia  $H$  tra  $f$  e  $g$  come nella definizione precedente, tale che  $h : S \rightarrow S$  è una trasformazione topologica per ogni  $t \in [0, 1]$ . In tal caso  $H$  è detta *isotopia* tra  $f$  e  $g$ . Inoltre, se  $f$  è l'identità di  $S$ , allora diciamo che  $g : S \rightarrow S$  è *realizzabile mediante isotopia*.

Se in quest'ultima definizione si interpreta  $t$  come parametro temporale, si può dire che le trasformazioni topologiche realizzabili mediante isotopia sono quelle che si possono ottenere con deformazioni continue dello spazio  $S$ .

Nel piano/spazio euclideo le deformazioni continue possono intendersi nel senso intuitivo del termine e la relazione tra trasformazioni topologiche e deformazioni è data dal seguente teorema.

**TEOREMA 1.3.3.** Sia  $S$  il piano/spazio euclideo e sia  $g : S \rightarrow S$  una trasformazione topologica. Allora  $g$  è isotopa all'identità di  $S$  o a una riflessione  $\sigma : S \rightarrow S$ . Nel primo caso  $g$  è realizzabile mediante isotopia, mentre nel secondo caso  $g$  non è realizzabile mediante isotopia, ma lo è la composizione  $g' = \sigma \circ g$ .

La dimostrazione del teorema si basa sulla costruzione di successive isotopie tra  $g$  e una trasformazione differenziabile  $h$ , poi tra  $h$  e una trasformazione lineare  $l$  e infine tra  $l$  e una isometria  $i$ . A questo punto  $i$  è realizzabile mediante isotopia se e solo se *conserva l'orientazione* (è una isometria positiva). In tal modo il teorema deriva dal seguente esercizio.

ESERCIZIO 1.3.4. Ogni isometria positiva del piano/spazio euclideo è composizione di una traslazione e una rotazione, ed è quindi realizzabile mediante isotopia in quanto lo sono le traslazioni e le rotazioni. Ogni isometria negativa del piano/spazio euclideo è composizione di una traslazione e una riflessione, e non è quindi realizzabile mediante isotopia in quanto non lo sono le riflessioni.

Come conseguenza del teorema 1.3.3 si ha che “metà” delle trasformazioni topologiche del piano/spazio euclideo è realizzabile mediante isotopia (più precisamente tali trasformazioni formano un sottogruppo di indice due nel gruppo di tutte le trasformazioni topologiche). Le altre trasformazioni topologiche (quelle non realizzabili mediante isotopia) si ottengono componendo queste con una qualunque riflessione.

Tenendo conto che  $S^2 = \widehat{R}^2$ , queste considerazioni (così come il teorema 1.3.3) valgono anche se come spazio  $S$  si considera la sfera. Ma le cose non vanno sempre così, come illustrato dal seguente esercizio riferito al caso in cui  $S$  è il toro.

ESERCIZIO 1.3.5. Sia  $\tau_M : T \rightarrow T$  la trasformazione topologica, chiamata *avvitamento lungo  $M$* , che si ottiene tagliando il toro lungo la curva  $M$  e poi reincollando dopo aver effettuato una torsione completa, così che  $\tau_M(M) = M$  e  $\tau_M(P) = P'$  (cf. figura 3 a sinistra). In modo analogo si può definire  $\tau_P : T \rightarrow T$ , avvitamento lungo  $P$ , tale che  $\tau_P(M) = M'$  e  $\tau_P(P) = P$  (cf. figura 3 a destra). Allora,  $\tau_M$  e  $\tau_P$  conservano l'orientazione, ma non sono realizzabili mediante isotopia né sono isotopi tra loro.

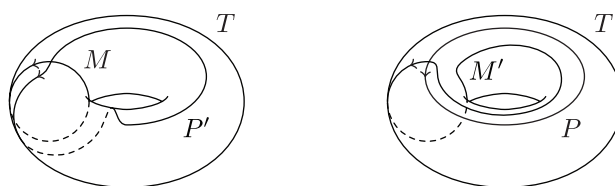


FIGURA 3. Gli avvitamenti del toro  $\tau_M$  (a sinistra) e  $\tau_P$  (a destra).

#### 1.4. Equivalenze topologiche

Due spazi topologici  $X$  e  $Y$  sono *topologicamente equivalenti* (omeomorfi) se esiste un omeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ , cioè un'applicazione biunivoca tale che  $h$  e  $h^{-1}$  sono entrambe continue. In tal caso scriviamo  $X \cong Y$  e gli spazi  $X$  e  $Y$  hanno le stesse proprietà topologiche. Per esempio  $X$  e  $Y$  hanno lo stesso numero di *componenti connesse* (cioè, in termini intuitivi, sono costituiti dallo stesso numero di “pezzi”).

DEFINIZIONE 1.4.1. Sia  $S$  uno spazio topologico e siano  $X, Y \subset S$  sono due sottoinsiemi (“oggetti” in  $S$ ). Allora diciamo che  $X$  e  $Y$  sono *topologicamente equivalenti in  $S$*  e scriviamo  $X \cong_S Y$ , se esiste una trasformazione topologica  $g : S \rightarrow S$  tale che  $g(X) = Y$ . Inoltre, diciamo che  $X$  e  $Y$  sono *isotopicamente equivalenti in  $S$*  (o isotopi in  $S$ ) e scriviamo  $X \equiv_S Y$ , se  $g$  è realizzabile mediante isotopia.

ESEMPIO 1.4.2. Il quadrato unitario  $Q = [-1, 1]^2 \subset R^2$  e il disco unitario  $D = \{x \in R^2 \mid \|x\| \leq 1\} \subset R^2$  sono isotopicamente equivalenti in  $R^2$  (cf. figura 4).

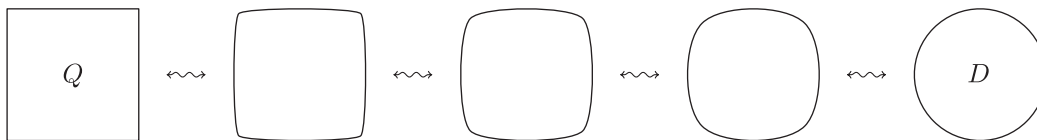


FIGURA 4. Equivalenza isotopica  $Q \equiv_{R^2} D$ .

È facile verificare che  $\cong_S$  e  $\equiv_S$  sono relazioni di equivalenza tra sottoinsiemi di  $S$  (ciò equivale a dire che le trasformazioni che le definiscono formano dei gruppi). Inoltre, vale ovviamente l'implicazione  $X \equiv_S Y \Rightarrow X \cong_S Y$  per ogni  $X, Y \subset S$ , mentre non vale l'implicazione inversa (cf. figure 5 e 6).

Alla luce del teorema 1.3.3, se  $S$  è il piano/spazio euclideo la doppia implicazione  $X \equiv_S Y \Leftrightarrow X \cong_S Y$  vale per gli oggetti topologicamente simmetrici nel senso della seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.4.3.** Sia  $S$  il piano/spazio euclideo. Un sottoinsieme  $X \subset S$  si dice *topologicamente simmetrico* o *achirale* se  $X \equiv_S X' = \sigma(X)$  per una (quindi per ogni) riflessione  $\sigma : S \rightarrow S$ . Altrimenti,  $X$  si dice *chirale*.

Riflettendo sulla figura 5 si può notare che la nozione di simmetria topologica non coincide con quella di simmetria geometrica ( $X$  è geometricamente simmetrico se  $X = X' = \sigma(X)$ ). È vero che se  $X$  è topologicamente simmetrico, allora  $X \equiv_S Y$  con  $Y$  geometricamente simmetrico?

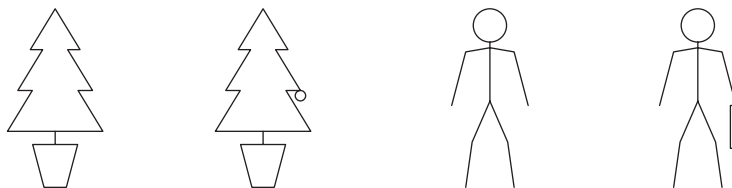


FIGURA 5. Tre di queste figure piane sono topologicamente simmetriche, quali?

D'altra parte, se  $X$  e  $Y$  si pensano come spazi topologici con la topologia indotta da  $S$ , allora vale anche l'implicazione  $X \cong_S Y \Rightarrow X \cong Y$ , mentre non vale l'implicazione inversa (cf. figura 6). In particolare, se  $X$  e  $Y$  sono topologicamente equivalenti in  $S$ , allora devono avere lo stesso numero di componenti connesse, così come i loro complementari  $S - X$  e  $S - Y$  (infatti si ha anche  $S - X \cong_S S - Y$ ).

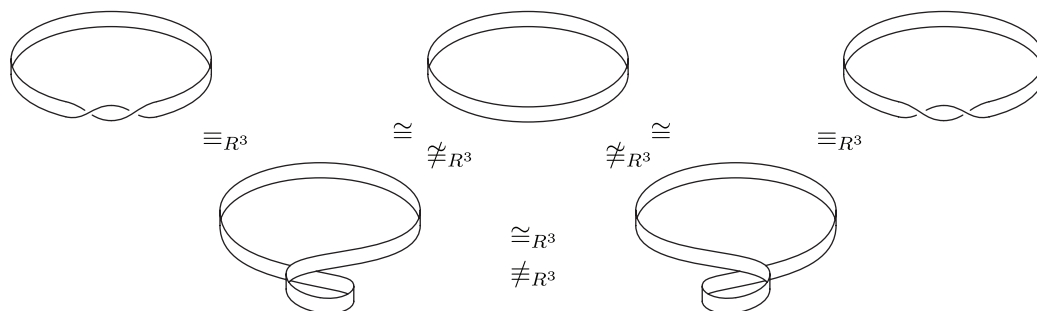


FIGURA 6. Diversi nastri nello spazio.

Quando lo spazio ambiente  $S$  sia chiaro dal contesto e non ci sia pericolo di confondere l'equivalenza topologica in  $S$  con l'equivalenza topologica tra spazi topologici, scriveremo  $\cong$  e  $\equiv$  invece di  $\cong_S$  e  $\equiv_S$ , omettendo il riferimento ad  $S$ .

### 1.5. Curve e grafi topologici

Una *curva topologica* è uno spazio topologico  $X$  localmente equivalente alla retta euclidea, cioè intorno ad ogni suo punto  $X$  ammette un sistema di coordinate costituito da un solo parametro reale.

Le curve topologiche connesse sono tutte topologicamente equivalenti alla retta o alla circonferenza (le quali non sono topologicamente equivalenti tra loro essendo non compatta la prima e compatta la seconda).

Un tratto connesso di curva delimitato da due punti è un *arco*, cioè uno spazio topologicamente equivalente a un segmento. I punti dell'arco corrispondenti agli estremi del segmento si dicono *estremi* dell'arco (questi sono gli unici due punti dell'arco non topologicamente equivalenti a tutti gli altri, perché?), mentre tutti gli altri punti dell'arco si dicono *punti interni*.

**DEFINIZIONE 1.5.1.** Un *grafo* (finito) è una tripla  $G = (V, S, e)$  dove:  $V$  e  $S$  sono insiemi finiti costituiti rispettivamente dai *vertici* e dagli *spigoli* di  $G$ , mentre  $e : S \rightarrow V \times V = (V \times V)/(v_1, v_2) \sim (v_2, v_1)$  è un'applicazione che associa a ogni spigolo  $s \in S$  una coppia non ordinata  $e(s)$  di vertici chiamati *estremi* di  $s$ . Chiamiamo *valenza* del vertice  $v \in V$  il numero di volte che  $v$  compare in tutte le coppie  $e(s)$  al variare dello spigolo  $s \in S$ .

Un *grafo topologico* associato a  $G$  (o *realizzazione topologica di  $G$* ) è uno spazio topologico  $X$  unione di un sottospazio discreto  $X_0 = \{p_v \mid v \in V\} \subset X$  e sottospazi  $A_s \subset X$  con  $s \in S$ , tali che: 1)  $A_s$  è un arco con estremi  $p_v$  e  $p_w$ , se  $e(s) = [v, w]$  con  $v \neq w$ ; 2)  $A_s$  è un arco con estremi identificati in  $p_v$  (cioè un *cappio*), se  $e(s) = [v, v]$ ; 3) gli  $A_s$  non hanno altri punti in comune con  $X_0$  né tra di loro. (cf. figura 7)

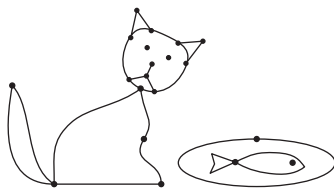


FIGURA 7. Grafo topologico con 20 vertici e 23 spigoli (e 6 componenti connesse).

**ESEMPIO 1.5.2.** Per ogni intero  $n \geq 1$ , denotiamo con  $K_n$  il *grafo completo* con vertici  $v_1, \dots, v_n$  e uno spigolo di estremi  $v_i$  e  $v_j$  per ogni  $i \neq j$ . Per ogni  $n, m \geq 1$ , denotiamo con  $K_{n,m}$  il *grafo bipartito completo* con vertici  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$  e uno spigolo di estremi  $v_i$  e  $w_j$  per ogni  $i \leq n$  e  $j \leq m$ .

Le rappresentazioni dei grafi  $K_3$  e  $K_{1,3}$  nella figura 8 descrivono realizzazioni topologiche *lineari* (cioè, gli archi corrispondenti agli spigoli sono tutti segmenti) di questi grafi nel piano, mentre le rappresentazioni degli altri grafi descrivono realizzazioni topologiche lineari nello spazio, ma non nel piano (a causa degli incroci tra gli spigoli). In effetti anche  $K_4$  e  $K_{2,3}$  hanno realizzazioni topologiche lineari nel piano (verificare), mentre vedremo che  $K_5$  e  $K_{3,3}$  non ne ammettono.

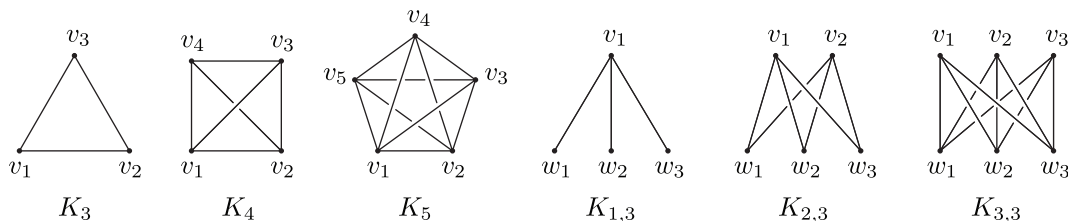


FIGURA 8. Grafi completi e grafi bipartiti completi.

ESERCIZIO 1.5.3. Ogni grafo  $G$  ammette una realizzazione topologica in  $R^3$ . Quali ipotesi su  $G$  equivalgono all'esistenza di una tale realizzazione lineare?

Osservando il grafo in figura 7, notiamo che il vertice in cima alla coda del gatto può essere eliminato fondendo i due spigoli che lo hanno come estremo in un unico spigolo e ottenendo così un nuovo grafo con la stessa realizzazione topologica. Questo vale anche per tutti gli altri vertici di valenza 2 tranne uno (quale?).

TEOREMA 1.5.4. Due grafi  $G = (V, S, e)$  e  $G' = (V', S', e')$  hanno realizzazioni topologiche omeomorfe, cioè sono topologicamente equivalenti, se e solo se dopo aver eliminato come detto sopra tutti i vertici di valenza 2 eliminabili  $G$  e  $G'$  sono *grafi isomorfi*, cioè esistono corrispondenze biunivoche  $\varphi : V \rightarrow V'$  e  $\psi : S \rightarrow S'$  tali che  $\psi(e(s)) = e'(\varphi(s))$ .

In altre parole, il teorema dice che un grafo topologico  $X$  individua univocamente (a meno di isomorfismi) un grafo  $G$  senza vertici di valenza 2 di cui  $X$  è realizzazione topologica.

Infatti i vertici di  $X$  di valenza  $n \neq 2$  sono essenziali dal punto di vista topologico, in quanto non sono topologicamente equivalenti (e non lo sono neppure localmente) agli altri punti di  $X$ . Quindi per ogni  $n \neq 2$  il numero dei vertici di  $X$  di valenza  $n$  è un invariante topologico di  $X$ , al pari del numero delle componenti connesse di  $X$ .

ESERCIZIO 1.5.5. Altri invarianti topologici di un grafo topologico  $X$ , definibili in termini di un qualunque grafo  $G$  di cui  $X$  sia realizzazione topologica, sono:

- 1) la *caratteristica di Eulero*  $\chi(X) = v(G) - s(G)$ , dove  $v(G)$  è il numero dei vertici di  $G$  e  $s(G)$  è il numero degli spigoli di  $G$ , che non dipende dalla scelta di  $G$ ;
- 2) il numero di tutti i cicli contenuti in  $X$  (cioè, sottospazi di  $X$  topologicamente equivalenti a  $S^1$ ), che risulta finito in quanto ogni ciclo è unione di spigoli di  $G$ .

ESERCIZIO 1.5.6. Sia  $X$  un grafo topologico connesso. Verificare che  $\chi(X) \leq 1$  e inoltre  $\chi(X) = 1$  se e solo se  $X$  è *aciclico* (non contiene cicli). Un grafo topologico connesso e aciclico viene detto *albero topologico*. Costruire due alberi topologici non omeomorfi con lo stesso numero di vertici di valenza  $n$  per ogni  $n \neq 2$ .

## 1.6. Superfici topologiche

Una *superficie topologica* è uno spazio topologico  $X$  localmente equivalente al piano euclideo, cioè intorno ad ogni suo punto  $X$  ammette un sistema di coordinate costituito da due parametri reali.  $X$  è *orientabile* se è possibile scegliere questi sistemi di coordinate locali orientati coerentemente; ciò equivale a dire che  $X$  non contiene nessun ciclo che inverte l'orientazione, in altre parole non contiene nessun *nastro di Möbius* (cf. figura 9).

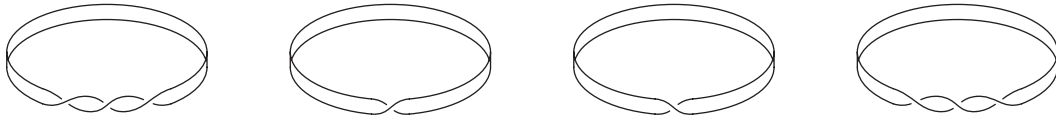


FIGURA 9. Nastri Möbius nello spazio: quali sono (isotopicamente) equivalenti?

Il genere  $g(X)$  di una superficie orientabile connessa  $X$  è definito come il massimo numero  $m$  per cui esistono  $C_1, \dots, C_m \subset X$  curve chiuse semplici (cioè, omeomorfe a  $S^1$ ) tali che  $X - (C_1 \cup \dots \cup C_m)$  è ancora connesso. Si dimostra che tale massimo esiste (finito) se  $X$  è compatta.

Ragionando per induzione su  $g \geq 0$ , si dimostra che la superficie  $T_g$  rappresentata in figura 10 è una *superficie orientabile di genere  $g$* . Per  $g = 0$  ciò segue dal teorema di Jordan (cf. esercizio 2.1.2) in quanto  $T_0 = S^2$ ; per  $g = 1$  si ha  $T_1 = T$  e il passo induttivo può essere realizzato utilizzando l'esercizio 2.1.7.

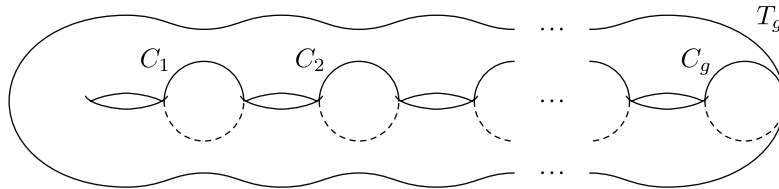


FIGURA 10. Superficie orientabile di genere  $g$ .

D'altra parte, il genere è un invariante topologico (superfici omeomorfe hanno lo stesso genere) che consente di classificare completamente le superfici orientabili connesse e compatte. Infatti vale il seguente teorema.

**TEOREMA 1.6.1.** Due superfici topologiche orientabili connesse e compatte sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere. In particolare, per ogni superficie topologica orientabile connessa e compatta  $X$  si ha  $X \cong T_g$  con  $g = g(X)$ .

Nel seguito ci servirà considerare *superfici topologiche con bordo*, cioè porzioni chiuse di superfici delimitate da curve topologiche, che ne costituiscono il bordo.

Per una superficie topologica orientabile connessa  $X$  con bordo definiamo il genere  $g(X)$  come sopra, vincolando le curve  $C_i$  a non incontrare il bordo, e denotiamo con  $b(X)$  il numero delle componenti connesse del bordo ( $b(X) = 0$  nel caso in cui  $X$  sia senza bordo, cioè il caso trattato sopra). Se  $X$  è compatta  $g(X)$  e  $b(X)$  sono entrambi finiti e tutte le componenti connesse del bordo sono omeomorfe a  $S^1$ .

Per ogni  $g, b \geq 0$ , la superficie  $T_{g,b}$  che si ottiene togliendo  $b$  dischi aperti da  $T_g$  è una superficie orientabile connessa compatta di genere  $g$  con  $b$  componenti di bordo. Il teorema 1.6.1 si può estendere alle superfici con bordo come segue.

**TEOREMA 1.6.2.** Due superfici topologiche orientabili connesse e compatte con bordo sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere e lo stesso numero di componenti di bordo. In particolare, per ogni superficie topologica orientabile connessa e compatta  $X$  con bordo si ha  $X \cong T_{g,b}$  con  $g = g(X)$  e  $b = b(X)$ .

**ESERCIZIO 1.6.3.** Una superficie topologica orientabile connessa e compatta  $X$  con bordo è *planare*, cioè topologicamente equivalente a un sottospazio del piano, se e solo se  $g(X) = 0$  e  $b(X) \geq 1$ .



ESERCIZIO 1.6.4. Ogni superficie topologica orientabile connessa e compatta  $X$  con bordo non vuoto, si può ottenere incollando  $2g(X) + b(X) - 1$  bande al bordo di un disco (cf. figura 11).

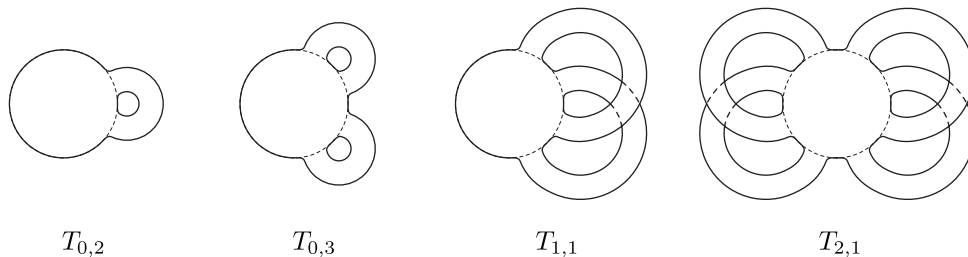


FIGURA 11. Superfici orientabili con bordo ottenute incollando bande a un disco.

Ogni superficie topologica compatta  $X$  con bordo (eventualmente vuoto) ammette una *poligonazione*, cioè una decomposizione  $X = P_1 \cup \dots \cup P_n$  come unione di *poligoni topologici* (copie omeomorfe di poligoni euclidei), con la proprietà che due poligoni possono incontrarsi solo in vertici e/o lati comuni. Per esempio, le superfici che delimitano i solidi platonici inscritti in  $S^2 \subset R^3$  sono topologicamente equivalenti a  $S^2$  (mediante la proiezione dal centro) e inducono poligonazioni di  $S^2$ .

Analogamente a quanto visto nei grafi topologici, dove l'arco corrispondente a uno spigolo può avere gli estremi identificati (a formare un cappio), nell'accezione più generale di poligonazione di una superficie  $X$ , si ammette che alcuni vertici e/o lati di un "poligono"  $P_i$  possano essere identificati tra loro (e quindi  $P_i$  non è più necessariamente omeomorfo a un poligono euclideo). Ciò consente di ottenere poligonazioni particolarmente economiche.

In ogni caso, possiamo sempre considerare il grafo topologico  $X_1 \subset X$  formato dai vertici e dai lati di tutti gli  $P_i$  e identificare ciascun  $P_i$  con la chiusura di una componente connessa di  $X - X_1$ . Per esempio, il toro  $T$  in figura 2 ammette una poligonazione con  $X_1 = M \cup P$  e un solo poligono: un quadrato con le coppie di lati opposti identificate rispettivamente con le curve  $M$  e  $P$ .

**TEOREMA 1.6.5.** Sia  $X$  una superficie topologica compatta con bordo (eventualmente vuoto). Se  $P$  è una poligonazione di  $X$ , denotiamo con  $v(P)$ ,  $s(P)$  e  $p(P)$  rispettivamente il numero dei vertici, degli spigoli e dei poligoni di  $P$ . Il numero intero  $\chi(X) = v(P) - s(P) + p(P)$  è un invariante topologico di  $X$ , la *caratteristica di Eulero* di  $X$ , che non dipende dalla particolare poligonazione  $P$ .

La dimostrazione di questo teorema si basa sul fatto che, a meno di omeomorfismi, due poligonazioni di  $X$  possiedono una suddivisione comune in poligoni più piccoli. Allora, l'indipendenza di  $\chi(X)$  da  $P$  si riduce sostanzialmente al caso delle triangolazioni lineari di poligoni euclidei (cf. esercizio 1.6.6).

ESERCIZIO 1.6.6. Se  $X$  è un poligono euclideo e  $P$  è una sua triangolazione lineare (cioè, poligonazione in triangoli euclidei), allora si ha  $v(P) - s(P) + p(P) = 1$ .

Alla luce del teorema 1.6.5 è facile verificare la relazione tra  $\chi(X)$ ,  $g(X)$  e  $b(X)$  data dal seguente esercizio. Questa mostra che due qualunque di tali invarianti topologici bastano a classificare le superfici orientabili connesse e compatte con bordo.

ESERCIZIO 1.6.7. Per ogni  $X$  superficie topologica orientabile, connessa e compatta, con bordo (eventualmente vuoto), si ha:  $\chi(X) = 2 - 2g(X) - b(X)$ .

## 2. Curve e grafi nel piano

### 2.1. Il teorema di Jordan-Schönflies

**TEOREMA 2.1.1 (JORDAN, 1887).** Il complementare  $R^2 - C$  di una qualunque curva chiusa semplice  $C \subset R^2$  ha due componenti connesse:  $I(C)$  (interno di  $C$ ) e  $E(C)$  (esterno di  $C$ ). Queste non sono topologicamente equivalenti e si distinguono per il fatto che  $I(C)$  è limitata mentre  $E(C)$  è illimitata.

**ESERCIZIO 2.1.2.** Poiché  $S^2 \cong \widehat{R^2}$ , il teorema di Jordan vale anche nella sfera:  $S^2 - C$  ha due componenti connesse per ogni curva chiusa semplice  $C \subset S^2$  (in questo caso però le due componenti sono equivalenti, cf. esercizio 2.1.5). Naturalmente, un analogo risultato non vale nel toro (né nelle altre superfici con genere non nullo).

Il teorema di Jordan si può dimostrare grazie alla nozione di indice di allacciamento. Scelto un verso di percorrenza lungo  $C$ , l'indice di allacciamento  $i_p(C)$  della curva orientata  $C$  rispetto al punto  $p \in R^2 - C$  è definito come il numero intero di giri che il vettore  $\vec{pc}$  compie intorno a  $p$  quando  $c$  percorre interamente  $C$  nel verso scelto (cf. figura 12, sinistra). Naturalmente, se si sceglie il verso di percorrenza opposto lungo  $C$ , si ottiene il valore opposto per  $i_p(C)$ .

Infatti, si può dimostrare che l'indice di allacciamento individua le componenti connesse di  $R^2 - C$ , nel senso che due punti  $p$  e  $p'$  appartengono alla stessa componente connessa di  $R^2 - C$  se e solo se  $i_p(C) = i_{p'}(C)$ . D'altra parte, considerando approssimazioni poligonali di  $C$ , si può anche dimostrare che  $i_p(C)$  assume esattamente due valori al variare di  $p \in R^2 - C$ . Più precisamente si ha:  $i_p(C) = 0$  se  $p \in E(C)$  e  $i_p(C) = \pm 1$  se  $p \in I(C)$  (il segno dipende solo dall'orientazione di  $C$ ).

Un metodo semplice per determinare l'indice di allacciamento  $i_p(C)$  rispetto a un generico punto  $p \in R^2 - C$  è illustrato nella stessa figura 12 (centro): basta tracciare una qualunque semiretta uscente da  $p$  e contare con segni opportuni le intersezioni che questa forma con  $C$ . Questo metodo è anche utilizzato in computer grafica per "riempire" la regione delimitata da una curva chiusa (cf. figura 12, destra).

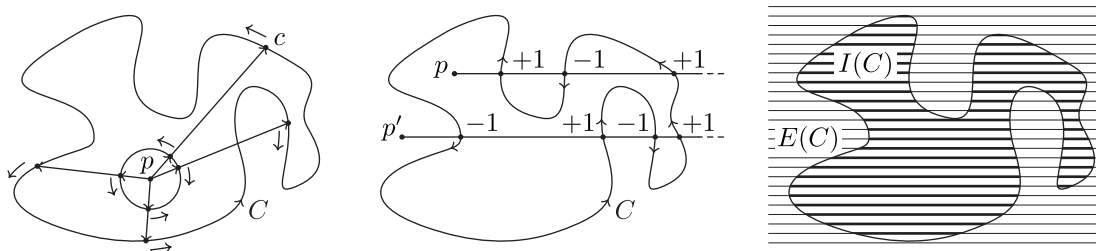


FIGURA 12. Indice di allacciamento.

Il seguente teorema è molto più forte del teorema di Jordan e la sua dimostrazione, che peraltro fa uso del teorema di Jordan, è molto più complessa.

**TEOREMA 2.1.3 (SCHÖNFLIESS, 1906).** Per ogni curva chiusa semplice  $C \subset R^2$  esiste una trasformazione topologica  $g : R^2 \rightarrow R^2$  realizzabile mediante isotopia tale che  $g(S^1) = C$ , cioè  $C \cong_{R^2} S^1$  (e quindi la chiusura di  $I(C)$  è topologicamente equivalente al disco  $D$ ).

Anche se le curve chiuse semplici in  $R^2$  sono tutte banali dal punto di vista topologico, non lo sono affatto dal punto di vista geometrico. Il confronto tra aspetti topologici e geometrici è molto delicato e dà spesso origine a problemi facili da enunciare, ma difficili da risolvere, come il seguente.

**PROBLEMA 2.1.4.** In ogni curva chiusa semplice  $C \subset R^2$  si può “inscrivere” un triangolo equilatero, nel senso che esistono tre punti  $t_1, t_2, t_3 \in C$  vertici di un triangolo equilatero  $T$ . È vero che in  $C$  si può anche “inscrivere” un quadrato, cioè esistono quattro punti  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in C$  vertici di un quadrato  $Q$ ?

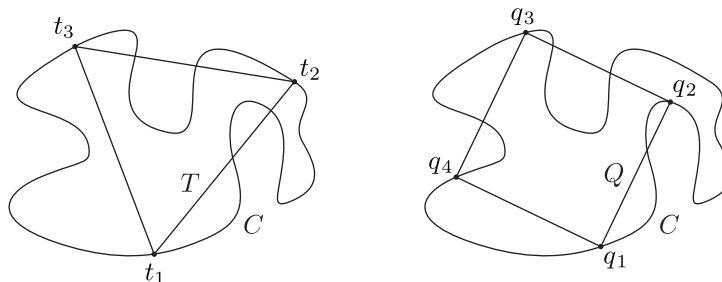


FIGURA 13. Triangolo e quadrato “inscritti” in una curva chiusa semplice.

**ESERCIZIO 2.1.5.** Ricordando ancora una volta che  $S^2 \cong \widehat{R}^2$ , provare che ogni curva chiusa semplice  $C$  in  $S^2$  è isotopicamente banale, cioè  $C \equiv_{S^2} S^1$  (e quindi le chiusure di entrambe le componenti di  $S^2 - C$  sono topologicamente equivalenti al disco  $D$ ).

A differenza di quanto accade nel piano e nella sfera, la classificazione delle curve chiuse semplici nel toro non è banale. Infatti alcune di queste curve  $C \subset T$  sconnettono il toro ( $T - C$  ha due componenti) mentre altre no ( $T - C$  è connesso), e le une non possono essere equivalenti alle altre.

A meno di equivalenza isotopica in  $T$ , ogni curva chiusa semplice  $C \subset T$  è completamente determinata dai numeri  $p$  e  $m$  di giri che si fanno intorno al toro rispettivamente nella direzione del parallelo  $P$  e in quella del meridiano  $M$  quando si percorre  $C$  in un dato verso. Per contare questi giri è però prima necessario fissare un’orientazione su  $P$  e  $M$ : con riferimento alla figura 2 fissiamo per entrambi quella antioraria. Dopo di che contiamo positivamente i giri concordi con le orientazioni fissate e negativamente quelli opposti. Un modo pratico per determinare  $p$  e  $m$  per una generica curva orientata  $C$  è quello di contare con segni opportuni le intersezioni di  $C$  rispettivamente con  $M$  e con  $P$ . Ovviamente, invertendo il verso di percorrenza di  $C$  entrambi i numeri  $p$  e  $m$  cambiano segno.

Non tutti i valori interi di  $p$  e  $m$  sono possibili per una curva chiusa semplice orientata  $C \subset T$ . Infatti si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza di una tale curva  $C$  con dati  $p$  e  $m$  è che questi siano entrambi nulli (se  $C$  sconnette  $T$ ) o primi tra loro (se  $C$  non sconnette  $T$ ). In particolare,  $p = 1$  e  $m = 0$  se  $C = P$ , mentre  $p = 0$  e  $m = 1$  se  $C = M$  (con le orientazioni fissate).

Per ogni  $p, m \in \mathbb{Z}$  entrambi nulli o primi tra loro, denotiamo con  $C_{p,m} \subset T$  la curva chiusa semplice orientata, definita a meno di isotopia in  $T$ , che corrisponde a  $p$  giri rispetto al parallelo  $P$  e  $m$  giri rispetto al meridiano  $M$  (cf. figura 14). Vale allora il seguente teorema.

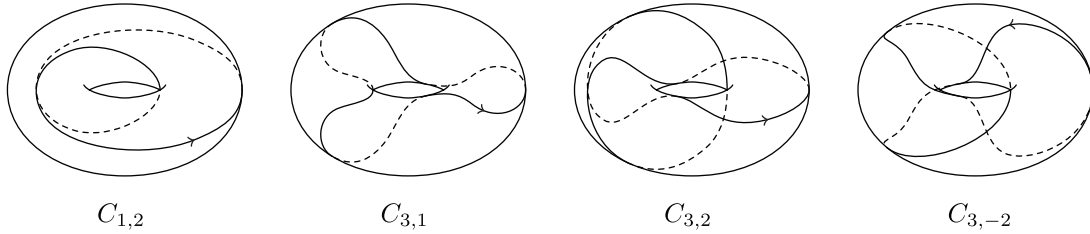


FIGURA 14. Alcune curve chiuse semplici nel toro.

**TEOREMA 2.1.6.** Per ogni curva chiusa semplice orientata  $C \subset T$ , esistono e sono unici  $p, m \in \mathbb{Z}$  entrambi nulli o primi tra loro tali che  $C \equiv_T C_{p,m}$ . Se  $C' \subset T$  è la stessa curva  $C$  orientata in modo opposto, allora  $C' \equiv_T C_{-p,-m}$ .

Contrariamente a quanto ci si potrebbe aspettare, la classificazione delle curve chiuse semplici orientate in  $T$  a meno di equivalenza topologica è molto più semplice di quella fornita dal teorema per l'equivalenza isotopica. Infatti ci sono solo due classi di equivalenza topologica, come affermato dal seguente esercizio.

**ESERCIZIO 2.1.7.** Sia  $C \subset T$  una curva chiusa semplice orientata. Se  $C$  sconnette  $T$  allora  $C \cong_T C_{0,0}$ , mentre se  $C$  non sconnette  $T$  allora  $C \cong_T C_{1,0} \cong_T C_{0,1}$ . In particolare, per ogni  $p, m \in \mathbb{Z}$  primi tra loro positivi si ha  $C_{p,m} \equiv_T g(C_{1,0})$  con  $g = \tau_P^{-q_1} \circ \tau_M^{q_2} \circ \dots \circ \tau_P^{-q_{2k-1}} \circ \tau_M^{q_{2k}}$ , dove  $q_1, q_2, \dots, q_{2k-1}, q_{2k}$  sono i quozienti successivi che si ottengono applicando l'algoritmo di Euclide per il calcolo di  $\text{MCD}(p, m)$ .

La soluzione di questo esercizio si basa sulle equivalenze  $\tau_M(C_{p,m}) \equiv_T C_{p,m+p}$  e  $\tau_P(C_{p,m}) \equiv_T C_{p-m,m}$ , valide per ogni  $p, m \in \mathbb{Z}$  (verificare).

Tali equivalenze ci dicono che  $\tau_P$  e  $\tau_M$  agiscono in modo “lineare” sugli indici (interi)  $p$  e  $m$  delle curve. Ciò consente di scrivere queste azioni nell'usuale forma matriciale, una volta che  $C_{p,m}$  sia rappresentato dal vettore colonna  $(p, m)$ :

$$C_{p,m} \leftrightarrow \begin{bmatrix} p \\ m \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tau_M \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tau_P \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che le matrici di  $\tau_M$  e  $\tau_P$  hanno entrambe determinante 1. Ne segue che matrice della trasformazione  $g$  tale che  $C_{p,m} \equiv_T g(C_{1,0})$  fornisce l'identità di Bezout per la coppia di interi  $p$  e  $m$  (verificare).

## 2.2. Grafi planari

Sia  $X \subset R^2$  un grafo topologico connesso. Tenendo conto della classificazione delle superfici di genere 0 e del teorema di Schönflies nella sfera (esercizio 2.1.5), si può provare che  $X$  determina una poligonazione di  $S^2 = \widehat{R^2}$ , che ha come vertici e spigoli con quelli di  $X$  e un “poligono” per ogni componente connessa di  $S^2 - X$  (infatti queste sono topologicamente equivalenti a dischi aperti).

Allora, denotando con  $p(X)$  il numero delle componenti connesse di  $S^2 - X$ , o equivalentemente di  $R^2 - X$ , si ha:  $\chi(X) + p(X) = v(X) - s(X) + p(X) = \chi(S^2) = 2$  (cf. esercizio 1.6.7).

Questa osservazione pone un vincolo alla possibilità di realizzare grafici topologici in  $R^2$ . In particolare consente di affrontare il seguente esercizio.

ESERCIZIO 2.2.1. I grafi  $K_5$  e  $K_{3,3}$  non ammettono realizzazioni topologiche nel piano. Quindi lo stesso vale per ogni grafo  $G$  che contenga copie isomorfe (o anche solo omeomorfe) di  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

Ragionando per induzione sul numero degli spigoli di  $G$ , si può dimostrare che quella indicata nell'esercizio è l'unica ostruzione alla possibilità di costruire realizzazioni topologiche di un qualunque grafo  $G$  nel piano. Questo afferma il teorema di Kuratowski, uno dei più celebri risultati della teoria topologica dei grafi.

TEOREMA 2.2.2 (KURATOWSKI, 1930). Un grafo  $G$  è *planare*, cioè ammette una realizzazione topologica nel piano, se e solo se dopo aver eliminato tutti i vertici di valenza 2 eliminabili  $G$  non contiene copie isomorfe di  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

In effetti, se  $G$  è un grafo planare *semplice*, cioè senza cappi (spigoli con i due estremi coincidenti) e senza spigoli multipli (più spigoli con gli stessi estremi), allora  $G$  ammette anche una realizzazione topologica lineare nel piano, e ovviamente vale il viceversa.

ESERCIZIO 2.2.3. Il teorema di Kuratowski vale anche per le realizzazioni topologiche di  $G$  nella sfera, ma non vale per quelle nel toro. Infatti  $K_5$  e  $K_{3,3}$  ammettono una realizzazione topologica nel toro. Fino a quali valori di  $n$  e  $m$  i grafi  $K_n$  e  $K_{m,m}$  ammettono realizzazioni topologiche nel toro?

Se  $G$  è un grafo planare, la flessibilità nella scelta delle sue realizzazioni topologiche in  $R^2$  o  $S^2$  diminuisce al crescere del numero degli spigoli, o meglio del grado di connessione, nel senso della definizione che segue.

DEFINIZIONE 2.2.4. Un grafo topologico  $X$  si dice  *$n$ -connesso* se per ogni  $v$  e  $w$  vertici di  $X$  esistono almeno  $n$  archi topologici con interni disgiunti tra  $v$  e  $w$  (in particolare, ogni vertice di  $X$  ha valenza  $\geq n$ ).

Il concetto di  $n$ -connessione è importante soprattutto nella topologia delle reti di comunicazioni, dove la connessione deve mantenersi anche a fronte di eventuali interruzioni di linea. Tra i grafi connessi semplici con  $n$  vertici, quello con grado di connessione massima è ovviamente  $K_n$  che è  $(n - 1)$ -connesso (verificare), mentre quelli con grado di connessione minima, più precisamente i grafi connessi minimali con  $n$  vertici, sono gli alberi (verificare).

Il seguente teorema è l'analogo al teorema di Schönfließ per i grafi planari 3-connessi. Ma differenza del teorema di Schönfließ che vale sia in  $R^2$  che in  $S^2$ , questo vale in  $S^2$  ma non in  $R^2$  (verificare).

TEOREMA 2.2.5 (WHITNEY, 1933). Se  $X, Y \subset S^2$  sono grafi topologici 3-connessi omeomorfi allora  $X \cong_{S^2} Y$  (ma non necessariamente  $X \equiv_{S^2} Y$ ).

La dimostrazione del teorema si basa sul fatto che la struttura topologica della poligonazione di  $S^2$  associata a un grafo topologico 3-connesso  $X \subset S^2$  è univocamente determinata dalla struttura topologica di  $X$ , infatti i bordi dei poligoni coincidono con i cicli  $C \subset X$  tali che  $X - C$  è connesso.

La classificazione dei grafi topologici non 3-connessi nel piano o nella sfera è invece tutt'altro che banale. Nel seguito tratteremo il caso dei grafi planari formati da curve con auto-intersezioni trasversali.

### 2.3. Curve con punti doppi

Tutte le curve chiuse  $C \subset R^2$  in questa sezione sono *curve lisce*, cioè ammettono una parametrizzazione differenziabile  $\varphi : S^1 \rightarrow C \subset R^2$  *regolare*, nel senso che ha velocità ovunque non nulla. Questo equivale a dire che in ogni punto di  $C$  esiste (unica) la retta tangente.

Non richiediamo invece che  $C$  sia semplice. Ammettiamo al contrario che  $C$  possa avere *punti doppi trasversali*, nei quali si intersecano due tratti della curva con tangenti distinte (cf. figura 15).

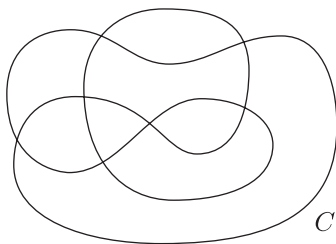


FIGURA 15. Curva chiusa liscia con punti doppi trasversali.

Il termine “curva” per una tale  $C \subset R^2$ , va inteso in una accezione più generale di quella adottata finora: non si tratta di una curva topologica, ma di un grafo topologico con tutti i vertici di valenza 4 collocati nei punti doppi.

Nonostante ciò, così come avviene per le curve chiuse semplici, ci sono essenzialmente due modi “naturali” di percorrere una curva chiusa liscia  $C \subset R^2$  con punti doppi trasversali, che corrispondono a due versi di percorrenza opposti lungo gli archi. Questi sono caratterizzati dalla seguente condizione: quando si arriva a un punto doppio da uno dei quattro archi che vi convergono, si prosegue lungo l’arco “opposto”, quello con la stessa tangente.

Allora, scelto un verso di percorrenza lungo  $C$ , possiamo definire l’indice di allacciamento  $i_p(C)$  della curva chiusa liscia orientata  $C$  con punti doppi trasversali esattamente come già visto per le curve chiuse semplici. Anche in questo caso  $i_p(C) = i_{p'}(C)$  se  $p$  e  $p'$  stanno nella stessa componente connessa di  $R^2 - C$ . Ma contrariamente al caso delle curve chiuse semplici, non vale il viceversa e inoltre  $i_p(C)$  può assumere qualunque valore intero, come illustrato in figura 16 (sinistra), dove sono indicati gli indici di allacciamento corrispondenti alle diverse componenti connesse di  $R^2 - C$ . Nella parte destra della stessa figura 16 le diverse regioni di  $R^2 - C$  sono colorate “a scacchiera” in base alla parità dell’indice di allacciamento corrispondente.

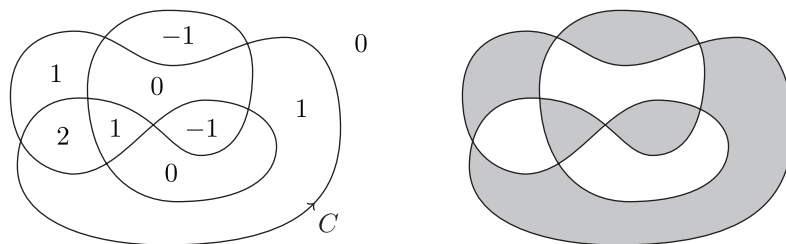


FIGURA 16. Indici di allacciamento e colorazione a scacchiera.

Se  $C \subset R^2$  è una curva chiusa liscia con punti doppi trasversali pensata come grafo planare, allora il *numero dei punti doppi*  $d(C)$  è certamente un invariante topologico. Lo stesso vale per il numero delle componenti connesse di  $R^2 - C$ , che coincide con  $d(C) + 2$  (verificare).

D'altra parte, gli indici di allacciamento delle diverse regioni di  $R^2 - C$  sono invarianti isotopici a meno del segno (che dipende dalla scelta del verso di percorrenza). Più precisamente, se  $g : R^2 \rightarrow R^2$  è una trasformazione topologica, posto  $C' = g(C)$  e  $p' = g(p)$  con  $p \in R^2 - C$ , si ha  $i_{p'}C' = \pm i_p(C)$  (il segno, oltre che dai versi di percorrenza scelti per  $C$  e  $C'$ , dipende anche dal fatto che  $g$  conservi o no l'orientazione, perché?).

Un altro invariante isotopico definito per ogni curva chiusa liscia orientata  $C \subset R^2$  è l'*indice di rotazione*  $r(C)$ . Questo conta il numero di giri che il versore tangente fa quando si percorre  $C$  nel verso dell'orientazione scelta (cf. figura 17).

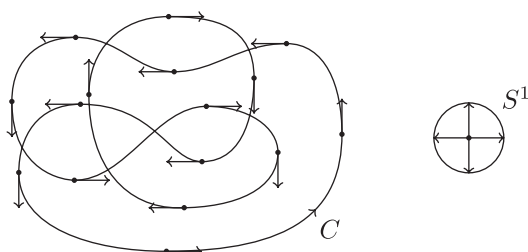


FIGURA 17. Indice di rotazione.

Se  $C$  è semplice, l'indice di rotazione  $r(C)$  coincide con l'indice di allacciamento  $i_p(C)$  rispetto ai punti  $p \in I(C)$ , quindi può assumere solo i valori  $\pm 1$  (a seconda dell'orientazione di  $C$ ).

Se  $C$  ha punti doppi,  $r(C)$  può assumere anche altri valori interi (per esempio, la curva  $C$  in figura 17 ha  $r(C) = 0$ ) e non esiste alcuna relazione diretta con gli indici di allacciamento delle diverse regioni di  $R^2 - C$ .

Se  $C \subset R^2$  è una curva chiusa liscia orientata con  $k$  "componenti" (nel senso di cicli orientati), allora operando intorno a un suo punto doppio la modifica descritta in figura 18, si ottiene una nuova curva chiusa liscia orientata  $C'$  con un punto doppio in meno e  $k' = k \pm 1$  "componenti" (sempre nel senso di cicli orientati). È facile verificare che  $r(C) = r(C')$  e che  $i_p(C) = i_p(C')$  per ogni punto  $p \in R^2 - C$  al di fuori dell'intorno in cui avviene la modifica.

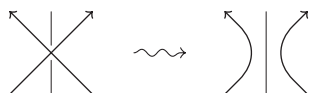


FIGURA 18. Risoluzione dei punti doppi.

Operando la stessa modifica intorno a tutti i punti doppi, si ottiene una curva chiusa liscia semplice. Questo consente di ridurre il calcolo dell'indice di rotazione e degli indici di allacciamento di  $C$  al caso dell'unione disgiunta di curve chiuse orientate semplici per cui l'indice di rotazione =  $\pm 1$  a seconda dell'orientazione (cf. figura 19).

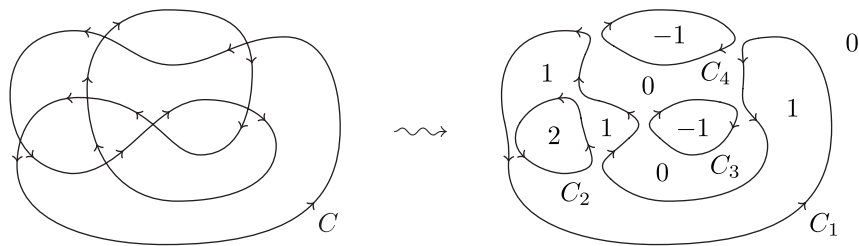


FIGURA 19. Calcolo dell'indice di rotazione e degli indici di allacciamento.

ESERCIZIO 2.3.1. Dimostrare che per una curva chiusa liscia orientata  $C \subset \mathbb{R}^2$  con punti doppi trasversali valgono le seguenti disuguaglianze: 1)  $|i_p(C)| \leq d(C) + 1$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^2 - C$ ; 2)  $|r(C)| \leq d(C) + 1$ .

Finora abbiamo considerato le curve chiuse lisce con punti doppi come grafi con vertici di valenza 4. In particolare, abbiamo visto che l'indice di rotazione e gli indici di allacciamento sono invarianti isotopici per tali grafi piani.

In effetti, l'indice di rotazione è invariante anche per trasformazioni molto più generali, come le deformazioni attraverso famiglie "continue" di curve chiuse lisce. Chiamiamo una tale deformazione *omotopia regolare*. Più precisamente diciamo che due curve chiuse lisce orientate  $C$  e  $C'$  con parametrizzazioni  $\varphi : S^1 \rightarrow C \subset \mathbb{R}^2$  e  $\varphi' : S^1 \rightarrow C' \subset \mathbb{R}^2$ , sono correlate da un'omotopia regolare se esiste un'omotopia  $h_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tra  $\varphi$  e  $\varphi'$  tale che:  $h_t$  è differenziabile e regolare (e quindi  $C_t = h_t(S^1)$  è una curva chiusa liscia) per ogni  $t \in [0, 1]$  e inoltre oltre alle  $h_t$  anche le loro derivate variano con continuità. In tal caso scriviamo  $C \cong C'$ .

Per analizzare le curve chiuse lisce da questo punto di vista, consideriamo i *movimenti di Whitney* rappresentati in figura 20, dove si assume che le curve, eventualmente anche orientate (in modo arbitrario), siano modificate solo nei tratti disegnati e restino invariate altrove.

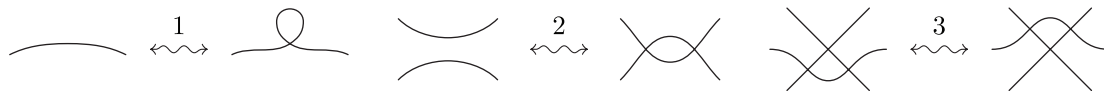


FIGURA 20. Movimenti di Whitney.

Questi movimenti, insieme alle isotopie del piano, consentono di rappresentare qualunque omotopia di una curva chiusa liscia  $C$  con punti doppi trasversali.

In particolare i movimenti di Whitney consentono di eliminare dalla curva  $C$  tutti i punti doppi, trasformandola in una curva chiusa semplice (quindi banale). Ciò può anche provato direttamente (verificare), tenendo conto che ogni curva chiusa liscia con punti doppi trasversali delimita almeno una regione con uno o due lati (come nei movimenti 1 e 2).

È facile convincersi del fatto che il movimento 1 non può essere realizzato mediante omotopia regolare, mentre i movimenti 2 e 3 sì. Questi ultimi, insieme alle isotopie del piano, consentono di generare una qualunque omotopia regolare di curve chiuse lisce con punti doppi trasversali. Per esempio, grazie ai movimenti 2 e 3 si può vedere che la curva  $C$  in figura 15 è equivalente mediante omotopia regolare a una curva a otto con un solo punto doppio (verificare).



ESERCIZIO 2.3.2. Utilizzare le osservazione appena fatte per ottenere le omotopie regolari descritte in figura 21, note con il nome di trucco di Whitney.



FIGURA 21. Il trucco di Whitney.

A questo punto abbiamo strumenti sufficienti per provare il seguente teorema.

TEOREMA 2.3.3 (WHITNEY, 1937). Siano  $C, C' \subset R^2$  curve chiuse lisce orientate con punti doppi trasversali. Allora  $C \cong C'$  se e solo se  $r(C) = r(C')$ .

Il teorema 2.3.3 implica che  $S^1$  non è invertibile (o rovesciabile) in  $R^2$  mediante omotopia regolare, come illustrato in figura 22, contrariamente a quanto vale per  $S^2$  in  $R^3$  (Smale, 1957).



FIGURA 22. Nessuna deformazione regolare può rovesciare  $S^1 \subset R^2$ .

### 3. Nodi e grafi nello spazio

#### 3.1. Nodi, diagrammi e movimenti

DEFINIZIONE 3.1.1. Chiamiamo *nodo* una qualunque curva chiusa semplice  $N \subset R^3$  topologicamente equivalente alla circonferenza. A volte è utile considerare anche curve chiuse semplici  $N = N_1 \cup \dots \cup N_n \subset R^3$  costituite da un certo numero  $n \geq 1$  di nodi disgiunti  $N_1, \dots, N_n \subset R^3$ . Chiamiamo una tale curva  $N$  *nodo con n componenti* (in breve *n-nodo*).

Ci limiteremo a considerare solo nodi (o più in generale *n*-nodi) *docili*, cioè isotopicamente equivalenti a curve chiuse lisce (o anche poligonali finite).

A meno di isotopia, un nodo docile  $N$  si può rappresentare con un *diagramma* in  $R^2$ , ottenuto nel modo seguente: 1) si assume  $N$  liscio e lo si deforma in modo che la sua proiezione ortogonale in  $R^2$  sia una curva chiusa liscia con punti doppi trasversali; 2) in ogni punto doppio della proiezione (che chiamiamo *incrocio*) si

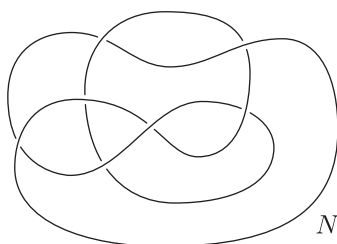


FIGURA 23. Diagramma di un nodo.

distingue il tratto del nodo passa “sopra” da quello che passa “sotto” (questi termini alla terza coordinata, che si perde nella proiezione) interrompendo quest’ultimo. Notiamo che dal diagramma è possibile ricostruire il nodo a meno di *isotopie verticali*, che modificano solo la terza coordinata di ogni punto. Un esempio di diagramma è rappresentato nella figura 23.

A partire dal diagramma è possibile costruire una *superficie di Seifert* per il nodo: una superficie liscia (cioè con piano tangente in ogni punto) orientabile  $S \subset R^3$  con bordo coincidente con  $N$ . Questa si può costruire come segue: 1) dopo aver orientato il diagramma in modo arbitrario, si eliminano gli incroci come illustrato in figura 18; 2) si considerano i dischi in  $R^2$  delimitati dalle curve chiuse semplici risultanti; 3) si sollevano opportunamente tali dischi in modo da renderli disgiunti; 4) si connettono i dischi sollevati con una banda “incrociata” per ogni incrocio (cf. figura 24).

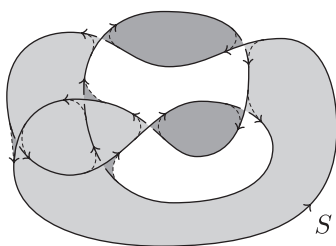


FIGURA 24. Superficie di Seifert.

I più semplici esempi di nodi e  $n$ -nodi sono rappresentati nelle figure 25 e 26.

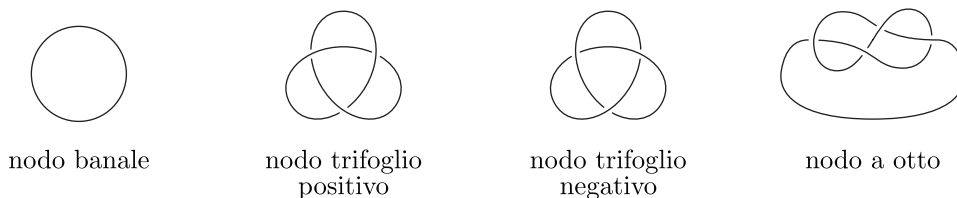


FIGURA 25. Esempi di nodi.

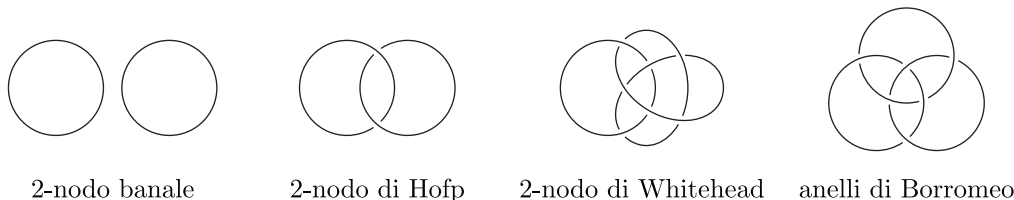


FIGURA 26. Esempi di  $n$ -nodi.

Si può dimostrare che due nodi docili lisci sono isotopicamente equivalenti se e solo se si può passare da uno all’altro mediante una famiglia “continua” di nodi lisci, infatti questa può sempre essere realizzata mediante un’isotopia liscia (cioè differenziabile regolare) dello spazio. Ciò conduce al seguente teorema.

**TEOREMA 3.1.2 (REIDEMEISTER, 1926).** Due diagrammi in  $R^2$  rappresentano nodi isotopicamente equivalenti in  $R^3$  se e solo se sono collegati da isotopie piane e movimenti 1, 2 e 3 descritti in figura 27.

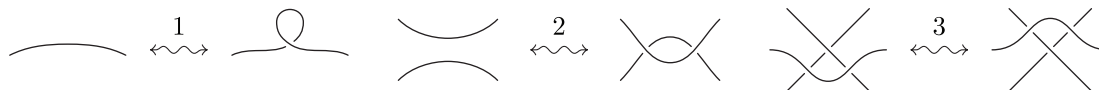


FIGURA 27. Movimenti di Reidemeister.

**ESERCIZIO 3.1.3.** Usando i movimenti di Reidemeister, mostrare che: 1) il nodo in figura 23 è isotopicamente equivalente a un nodo trifoglio; 2) il nodo a otto è topologicamente simmetrico; 3) le due componenti del 2-nodo di Whitehead sono intercambiabili a meno di isotopia.

Ricordando che i movimenti di Whitney (figura 20) consentono di rendere banale ogni curva chiusa liscia in  $R^2$  con punti doppi trasversali, si può provare facilmente quanto segue.

**ESERCIZIO 3.1.4.** Ogni diagramma di un nodo può essere trasformato in quello banale attraverso movimenti di Reidemeister e “inversioni di incroci”, consistenti nello spostare sotto il tratto che passa sopra e viceversa (cf. figura 28). Inoltre, le inversioni di incroci possono essere tutte effettuate all’inizio, in modo da ottenere un diagramma di un nodo isotopicamente banale.

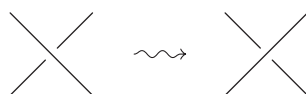


FIGURA 28. Inversione di un incrocio.

In altre parole, ogni nodo può essere reso banale in  $R^3$  se oltre alle deformazioni per isotopia sono anche ammesse quelle che consentono al nodo di “attraversare se stesso” in modo trasversale. In particolare, ne segue che ogni nodo diventa banale nello spazio a quattro dimensioni  $R^4$  (basta verificare che qui l’inversione di un incrocio non richiede “auto-attraversamenti”).

Possiamo allora associare ad ogni nodo  $N$  il minimo numero  $s(N)$  di “auto-attraversamenti” necessari per renderlo banale in  $R^3$ . L’intero  $s(N)$  è un invariante isotopico, cioè  $N \equiv_{R^3} N'$  implica  $s(N) = s(N')$  (ma non viceversa). Inoltre  $s(N)$  misura in un certo senso la “distanza” di  $N$  dal nodo banale, infatti  $N$  è isotopicamente banale (cioè  $N \equiv_{R^3} S^1$ ) se e solo se  $s(N) = 0$ .

Non è difficile definire altri invarianti isotopici numerici che caratterizzano i nodi banali. Per esempio un altro è  $c(N)$  definito come il minimo numero di incroci di un diagramma che rappresenta il nodo  $N$  a meno di isotopia. Questo è un invariante isotopico per definizione e anche in questo caso si ha che  $N$  è isotopicamente banale se e solo se  $c(N) = 0$  (per il teorema di Schönflies).

Se ci si limita al caso di  $N$  connesso (ma non in generale per gli  $n$ -nodi con  $n > 1$ ), anche  $g(N)$  (il *genere del nodo*  $N$ ) definito come il minimo tra i generi delle superfici di Seifert per  $N$  ha le stesse proprietà:  $N \equiv_{R^3} N'$  implica  $g(N) = g(N')$  (ma non viceversa) e inoltre  $N$  è isotopicamente banale se e solo se  $g(N) = 0$  (verificare).

Sfortunatamente però questi invarianti sono di scarsa utilità nel riconoscimento dei nodi banali poiché non sono effettivamente calcolabili, in quanto minimi su insiemi infiniti (di deformazioni, diagrammi o superfici). Per esempio non ci aiutano a stabilire se i nodi trifoglio o il nodo a otto sono banali oppure no!

### 3.2. Colorazioni e allacciamenti

Il modo più semplice per distinguere nodi non isotopicamente equivalenti è quello di considerare le possibili colorazioni dei loro diagrammi, utilizzando come “colori” gli elementi del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_p$  con  $p$  numero primo.

Una *colorazione* in  $\mathbb{Z}_p$  (in breve *p-colorazione*) di un diagramma consiste nell’assegnazione di un colore in  $\mathbb{Z}_p$  a ogni arco del diagramma (compreso tra due sottopassaggi consecutivi), in modo che: 1) in ogni incrocio sia soddisfatta la relazione descritta in figura 29, che per  $p \neq 2$  si può anche scrivere nella forma  $2 \cdot_p a = b +_p c$  o equivalentemente  $a = (b +_p c) /_p 2$  (l’indice  $p$  indica le operazioni in  $\mathbb{Z}_p$ ); 2) i colori non siano tutti uguali (cioè la colorazione non sia banale).

$$\begin{array}{ccc}
 c & \diagdown & a \\
 & \times & \\
 a & \diagup & b
 \end{array}
 \quad a +_p a = b +_p c$$

FIGURA 29. Relazione di compatibilità per le colorazioni in  $\mathbb{Z}_p$ .

Un nodo  $N \subset R^3$  si dice *p-colorabile* se è rappresentato da un diagramma in  $R^2$  che ammette una *p-colorazione* (vedi figura 30 per un esempio di 3-colorazione).

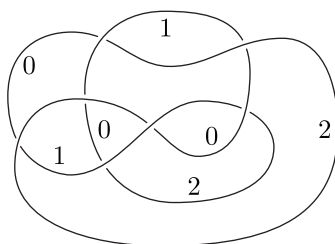


FIGURA 30. Una colorazione in  $\mathbb{Z}_3$ .

Così definita, la *p-colorabilità* sembra essere una proprietà del diagramma più che del nodo. Il punto è che la *p-colorabilità* è preservata dai movimenti di Reidemeister (e ovviamente per isotopie piane), come specificato nel seguente esercizio.

**ESERCIZIO 3.2.1.** Se a un diagramma *p-colorabile* si applica un movimento di Reidemeister (in entrambe le direzioni), allora anche il nuovo diagramma che si ottiene è *p-colorabile* (e viceversa).

Alla luce di questo fatto, la *p-colorabilità* diviene una proprietà del nodo invariante per isotopia. Inoltre essa risulta effettivamente determinabile a partire da un qualunque diagramma del nodo, in quanto c’è solo un numero finito di possibilità da controllare.

**ESERCIZIO 3.2.2.** Provare che la condizione di compatibilità per le 3-colorazioni si può esprimere dicendo che i tre colori  $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$  in ogni incrocio sono tutti uguali o tutti diversi. Cosa si può dire delle 2-colorazioni? E quali sono i nodi 2-colorabili?

D'altra parte è anche facile dimostrare che la  $p$ -colorabilità è invariante per equivalenza topologica e non solo isotopica, cioè vale il seguente fatto.

**ESERCIZIO 3.2.3.** Se  $N \cong_{R^3} N'$  sono nodi topologicamente equivalenti, allora  $N$  è  $p$ -colorabile se e solo se  $N'$  è  $p$ -colorabile (qualunque sia  $p$ ).

Considerando i diagrammi in figura 25, si vede che i nodi trifoglio sono 3-colorabili ma non 5-colorabili, mentre il nodo a otto è 5-colorabile ma non 3-colorabile (verificare). Quindi questi nodi non sono banali, né equivalenti tra loro. Non è però possibile usare le colorazioni per capire se i due trifogli (positivo e negativo) sono isotopicamente distinti (in altre parole se essi sono chirali).

Analogamente, esaminando le possibili colorazioni dei diagrammi in figura 26, si vede che il 2-nodo di Hopf e quello di Whitehead sono  $p$ -colorabili solo per  $p = 2$  (verificare). Quindi questi 2-nodi non sono equivalenti al 2-nodo banale, che è  $p$ -colorabile per ogni  $p$ , ma le colorazioni non consentono di distinguerli tra loro.

Quest'ultimo problema può essere affrontato facendo ricorso a un altro invariante isotopico: l'*indice di allacciamento* tra due nodi (orientati), definito come segue.

Dati due nodi  $N_1, N_2 \subset R^3$  disgiunti e orientati, consideriamo un diagramma del 2-nodo  $N = N_1 \cup N_2$  e assegniamo a ogni incrocio formato dalle due componenti (distinte)  $\pm 1$  a seconda che per portare l'arco che passa sopra a coincidere con quello che passa sotto (con i rispettivi versi) si debba ruotare di  $\pm 90^\circ$  (cf. figura 31). Sommando i numeri assegnati a tutti gli incroci tra  $N_1$  e  $N_2$  si ottiene un numero pari e si definisce l'indice di allacciamento  $i(N_1, N_2)$  come la metà di tale somma. Equivalentemente si può definire  $i(N_1, N_2)$  sommando i soli contributi degli incroci nei quali  $N_1$  passa sopra  $N_2$  (o viceversa) senza dividere per 2 (verificare). Infatti  $i(N_1, N_2)$  conta (con opportuni segni) quante volte  $N_1$  e  $N_2$  devono incontrarsi trasversalmente per potersi separare.

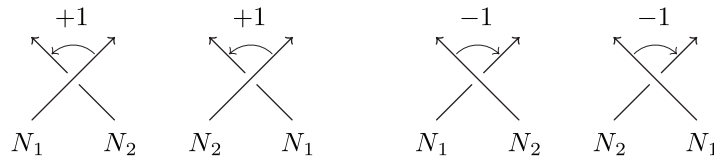


FIGURA 31. Indice di allacciamento tra due nodi.

Dalla definizione segue immediatamente che l'indice di allacciamento è simmetrico, cioè  $i(N_1, N_2) = i(N_2, N_1)$ . Inoltre,  $i(N_1, N_2)$  cambia segno se si inverte l'orientazione di uno dei due nodi, e quindi resta invariato se si cambiano entrambe le orientazioni.

Anche in questo caso, per poter concludere che l'indice di allacciamento è un invariante isotopico bisogna verificare che esso è preservato dai movimenti di Reidemeister applicati al diagramma di  $N = N_1 \cup N_2$  (gli incroci creati/eliminati con il movimento 1 non sono rilevanti). Questa è la sostanza del seguente esercizio.

**ESERCIZIO 3.2.4.** Siano  $N = N_1 \cup N_2$  e  $N' = N'_1 \cup N'_2$  2-nodi orientati in  $R^3$ . Se  $N \equiv_{R^3} N'$  mediante un'isotopia di  $R^3$  che porta  $N_1$  su  $N'_1$  e  $N_2$  su  $N'_2$  (con le rispettive orientazioni), allora  $i(N_1, N_2) = i(N'_1, N'_2)$ . Se  $N \cong_{R^3} N'$  mediante una riflessione di  $R^3$  che porta  $N_1$  su  $N'_1$  e  $N_2$  su  $N'_2$  (con le rispettive orientazioni), allora  $i(N_1, N_2) = -i(N'_1, N'_2)$ .

Poiché gli incroci formati dalla stessa componente di  $N = N_1 \cup N_2$  non contribuiscono a  $i(N_1, N_2)$ , questo resta invariato se uno di tali incroci viene invertito. Più in generale,  $i(N_1, N_2)$  è lasciato invariato da ogni deformazione di  $N$  durante la quale siano permessi “auto-attraversamenti” delle due componenti  $N_1$  e  $N_2$  separatamente (ma nessuna delle due componenti può attraversare l'altra)

Una deformazione di questo tipo consente di “separare” le due componenti del 2-nodo di Whitehead, per le quali si ha quindi  $i(N_1, N_2) = 0$ . Invece per le due componenti del 2-nodo di Hopf si ha  $i(N_1, N_2) = \pm 1$  (a seconda della scelta delle orientazioni). Si può allora concludere che questi 2-nodi non sono topologicamente equivalenti.

**ESERCIZIO 3.2.5.** Provare le non equivalenze dichiarate in figura 6, applicando le considerazioni fatte sull'indice di allacciamento al 2-nodo formato dalle due componenti di bordo dei diversi nastri. Determinare quali dei nastri di Möbius in figura 9 sono (isotopicamente) equivalenti, applicando le stesse considerazioni al 2-nodo formato dalla curva centrale e da quella di bordo.

### 3.3. Polinomi invarianti

In questa sezione vedremo come associare a un nodo un polinomio invariante per isotopia. Questo ci permetterà di provare che i nodi trifoglio sono chirali.

Consideriamo un qualunque incrocio di un diagramma  $D$ . Come illustrato in figura 32, ci sono due modi diversi per eliminare tale incrocio e a ciascuno di questi possiamo assegnare un indice  $\pm 1$ .



FIGURA 32. I due modi opposti per eliminare un incrocio.

Uno *stato*  $S$  del diagramma  $D$  è una scelta di uno di questi due modi per eliminare ogni incrocio di  $D$ , fino ad ottenere una famiglia di  $\rho(S)$  curve chiuse semplici disgiunte (cf. figura 33). Denotiamo con  $\sigma(S)$  l'indice dello stato  $S$  definito come somma degli indici relativi a tutti gli incroci.

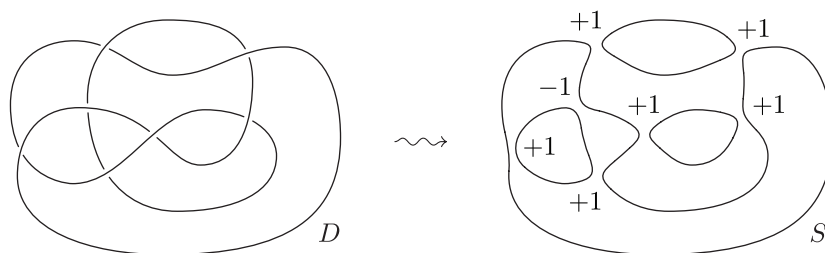


FIGURA 33. Uno stato  $S$  del diagramma di  $N$  con  $\rho(S) = 4$  e  $\sigma(S) = +5$ .

Poniamo ora  $\langle D \rangle = \sum_S t^{\sigma(S)} (-t^2 - t^{-2})^{\rho(S)-1}$ , dove la somma è estesa a tutti i possibili stati del diagramma  $D$  (questi sono ovviamente  $2^{c(D)}$ , dove  $c(D)$  è il numero degli incroci di  $D$ ). Allora  $\langle D \rangle$  è un polinomio di Laurent nella variabile  $t$  a coefficienti interi, cioè una combinazione lineare intera di potenze di  $t$  con esponenti interi (anche negativi). In particolare,  $\langle D \rangle = 1$  se  $D$  è il diagramma banale.

ESERCIZIO 3.3.1. Dato un qualunque diagramma  $D$ , denotiamo con  $\widehat{D}$  il diagramma che si ottiene aggiungendo a  $D$  una componente banale separata da  $D$  e con  $D_0$  e  $D_\infty$  i diagrammi che si ottengono eliminando uno stesso incrocio di  $D$  nei due modi possibili rispettivamente con indice  $+1$  e  $-1$ . Verificare le uguaglianze  $\langle \widehat{D} \rangle = (-t^2 - t^{-2})\langle D \rangle$  e  $\langle D \rangle = t\langle D_0 \rangle + t^{-1}\langle D_\infty \rangle$ .

Utilizzando quest'ultime uguaglianze, si può dimostrare che  $\langle D \rangle$  è preservato dai movimenti di Reidemeister 2 e 3, ma non dal movimento 1. Infatti quest'ultimo (inteso da sinistra verso destra) ha l'effetto di moltiplicare  $\langle D \rangle$  per  $-t^3$  (verificare). Per questo  $\langle D \rangle$  è definito solo a livello di diagrammi.

Per compensare l'effetto del movimento 1 su  $\langle D \rangle$  e ottenere un invariante isotopico, dobbiamo fissare un'orientazione su  $D$  e introdurre l'indice di arricciamento  $w(D)$  del diagramma orientato  $D$ . Questo è definito assegnando  $\pm 1$  a ogni incrocio come in figura 34 (cioè in modo analogo a quanto fatto per l'indice di allacciamento) e sommando poi i numeri assegnati a tutti gli incroci.

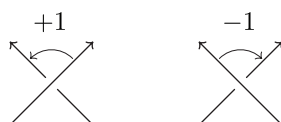


FIGURA 34. Indice di arricciamento di un diagramma.

ESERCIZIO 3.3.2. Dimostrare che vale la relazione  $w(D) = i(D, D')$ , dove  $D'$  è il diagramma “parallelo” a  $D$  come suggerito in figura 35. Dedurre da questa relazione che  $w(D)$  non cambia se si orienta il diagramma  $D$  nel verso opposto. Quindi  $w(D)$  risulta indipendente dall'orientazione se  $D$  rappresenta un nodo connesso (ma non nel caso di più componenti, perché?).

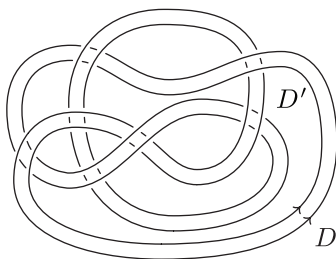


FIGURA 35.  $w(D) = i(D, D')$

Anche l'indice di arricciamento  $w(D)$  è preservato dai movimenti di Reidemeister 2 e 3, ma non dal movimento 1, che (inteso da sinistra verso destra) aumenta  $w(D)$  di 1 (verificare). Per questo  $w(D)$  è definito solo a livello di diagrammi orientati.

A questo punto, possiamo definire il *polinomio di Kauffman*  $K_N(t)$  di un nodo orientato  $N \subset R^3$  ponendo  $K_N(t) = (-t)^{-3w(D)}\langle |D| \rangle$ , dove  $D$  è un qualunque diagramma (orientato) di  $N$  e  $|D|$  è il corrispondente diagramma non orientato.

Da quanto abbiamo visto sopra si deduce subito che  $K_N(t)$  è un invariante isotopico del nodo orientato  $N$ . Inoltre, se  $N$  è un nodo connesso si ha che  $K_N(t)$  risulta indipendente dall'orientazione.

ESERCIZIO 3.3.3. Siano  $N_0, N_{\pm} \subset R^3$  nodi che differiscono solo localmente per le parti tracciate in figura 36. Allora il polinomio di Kauffman soddisfa la *relazione caratteristica*  $t^4 K_{N_+}(t) - t^{-4} K_{N_-}(t) = (t^{-2} - t^2) K_{N_0}(t)$ . Questa, insieme alla *normalizzazione*  $K_{S^1}(t) = 1$ , determina univocamente il polinomio di Kauffman.

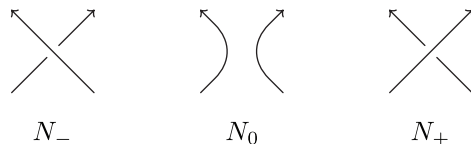


FIGURA 36. Nodi orientati coinvolti nella relazione caratteristica.

La relazione caratteristica segue dalla seconda uguaglianza dell'esercizio 3.3.1 mediante un calcolo diretto. Che tale relazione determini univocamente il polinomio di Kauffman, si può provare con una doppia induzione sul numero degli incroci necessari per rappresentare il nodo e su quanti se ne devono invertire per banalizzarlo (cf. esercizio 3.1.4).

D'altra parte, una conseguenza dell'esercizio 3.3.3 è che in  $K_N(t)$  compaiono solo potenze pari di  $t$ . Un po' meno facile è vedere che tutti gli esponenti di tali potenze sono congrui al doppio del numero delle componenti di  $N$  modulo 4. Ponendo  $x = t^{-4}$ , si ottiene il *polinomio di Jones*  $V_N(x) = K_N(x^{-1/4})$ , univocamente determinato dalla normalizzazione  $V_{S^1}(x) = 1$  e dalla relazione caratteristica

$$x^{-1} V_{N_+}(x) - x V_{N_-}(x) = (x^{1/2} - x^{-1/2}) V_{N_0}(x).$$

Anche questo, come il polinomio di Kauffman, è definito per ogni nodo orientato  $N$  e risulta indipendente dalla scelta dell'orientazione se  $N$  è connesso.

ESERCIZIO 3.3.4. Se  $N$  è un nodo orientato e  $N' = \sigma(N)$  è la sua immagine speculare mediante una riflessione  $\sigma : R^3 \rightarrow R^3$ , allora si ha che  $V_{N'}(x) = V_N(x^{-1})$ . Quindi condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché  $N$  sia topologicamente simmetrico è che  $V_N(x) = V_N(x^{-1})$ . Poiché il polinomio di Jones del nodo trifoglio positivo è  $x^{-1} + x^{-3} - x^{-4}$ , possiamo concludere che questo è un nodo chirale.

Il polinomio di Jones può essere derivato come caso speciale per  $y = x^{1/2} - x^{-1/2}$  da un polinomio in due variabili  $P_N(x, y)$ , anch'esso invariante isotopico associato a ogni nodo orientato  $N \subset R^3$ , univocamente determinato dalla normalizzazione  $P_{S^1}(x, y) = 1$  e dalla relazione caratteristica

$$x^{-1} P_{N_+}(x, y) - x P_{N_-}(x, y) = y P_{N_0}(x, y).$$

Per dimostrare l'esistenza di un tale polinomio  $P_N(x, y)$ , nonché per calcolarlo a partire da un diagramma di  $N$ , si può adottare lo stesso schema induttivo indicato sopra per l'esercizio 3.3.3.

ESERCIZIO 3.3.5. Verificare che  $P_N(x, y)$  non cambia se si inverte l'orientazione di  $N$  e quindi risulta indipendente dall'orientazione se  $N$  è un nodo connesso. Inoltre, se  $N' = \sigma(N)$  è l'immagine speculare di  $N$  mediante una riflessione  $\sigma : R^3 \rightarrow R^3$ , allora si ha che  $P_{N'}(x, y) = P_N(x^{-1}, -y)$ .



Un altro polinomio invariante isotopico per nodi orientati che si ottiene come specializzazione di quello in due variabili appena definito è il *polinomio di Conway*  $\nabla_N(y)$  definito ponendo  $x = 1$  in  $P_N(x, y)$ , cioè  $\nabla_N(y) = P_N(1, y)$ . Quindi la sua relazione caratteristica è

$$\nabla_{N_+}(y) - \nabla_{N_-}(y) = y \nabla_{N_0}(y).$$

Da questa relazione caratteristica si deriva facilmente che il polinomio di Conway è un “vero” polinomio (in cui compaiono solo potenze intere positive della variabile  $y$ ) e non un polinomio di Laurent come i precedenti. Inoltre  $\nabla_N(y)$  soddisfa le seguenti proprietà.

ESERCIZIO 3.3.6. 1)  $\nabla_N(y)$  contiene solo potenze pari/dispari di  $y$  a seconda che  $N$  abbia un numero dispari/pari di componenti; 2) il termine noto di  $\nabla_N(y)$  è nullo se  $N$  è connesso; 3)  $\nabla_N(y) = 0$  se  $N = N_1 \cup N_2$  con  $N_1$  e  $N_2$  nodi separati.

Quest’ultimo fatto è utile nel calcolo del polinomio, come nell’esempio riportato in figura 37 dove si mostra che il polinomio di Conway del nodo a otto è  $1 - y^2$  (polinomio pari, come deve essere per ogni nodo simmetrico).

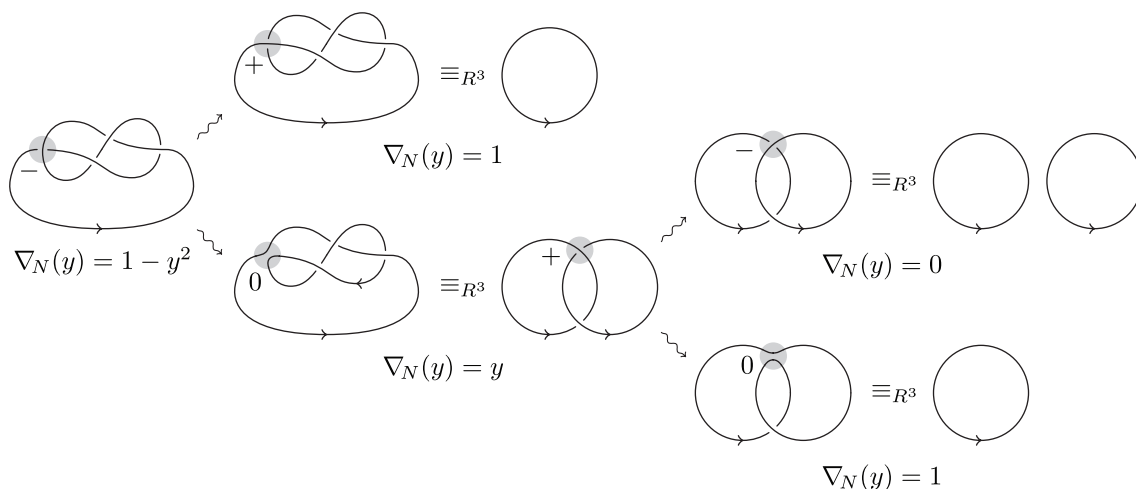


FIGURA 37. Calcolo del polinomio di Conway del nodo a otto.

Concludiamo questa sezione con un cenno al *polinomio di Alexander*  $\Delta_N(z)$ , il primo polinomio utilizzato per distinguere nodi non isotopi. Nella sua versione originale, così come introdotto da Alexander nel 1928, tale polinomio è definito solo per nodi connessi e solo a meno di moltiplicazione per  $\pm z^k$ .

Una versione “simmetrica” del polinomio di Alexander (corrispondente a un’opportuna scelta di  $k$ ), estesa anche a nodi non connessi purché orientati, si può ottenere in termini del polinomio di Conway ponendo

$$\Delta_N(z) = \nabla_N(z^{-1/2} - z^{1/2}).$$

Nonostante in questa formula compaiano potenze frazionarie di  $z$ , se  $N$  è un nodo connesso  $\Delta_N(z)$  contiene solo potenze intere di  $z$  (cf. esercizio 3.3.6). Per esempio, il polinomio di Alexander del nodo a otto è  $z - 3 - z^{-1}$ .

Il polinomio di Alexander  $\Delta_N(z)$  di un nodo connesso  $N$  può essere calcolato anche mediante l’uso delle matrici, procedendo nel modo seguente: 1) si sceglie un

diagramma  $D$  di  $N$ ; 2) si orienta  $D$  in modo arbitrario; 3) si etichettano in modo arbitrario i punti doppi di  $D$  con  $p_1, p_2, \dots, p_n$  e gli archi di  $D$  con  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; 4) si forma una matrice  $n \times n$ , mettendo nei posti di indici  $(i, k)$ ,  $(i, j)$  e  $(i, l)$  rispettivamente  $1 - z$ ,  $z$  e  $-1$ , se  $a_k$  è l'arco che passa sopra nell'incrocio  $p_i$  mentre  $a_j$  e  $a_l$  sono quelli che vi terminano sotto, il primo a sinistra e il secondo a destra rispetto all'orientazione di  $a_k$  (cf. figura 38), e mettendo 0 in tutti gli altri posti; 5) si eliminano da questa matrice una riga e una colonna scelte arbitrariamente; 6) si pone  $\Delta_N(z)$  uguale al determinante della matrice che rimane.

Si può dimostrare che a meno di un fattore  $\pm z^k$  il determinante finale non dipende dalle scelte effettuate. Per esempio, una diversa etichettatura al punto 3 ha come effetto una permutazione delle righe e delle colonne della matrice, quindi solo un possibile cambiamento di segno del determinante.

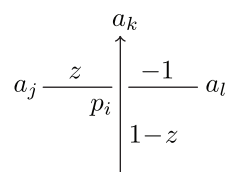


FIGURA 38. Come costruire la matrice per il calcolo di  $\Delta_N(z)$ .

Nella figura 39 è rappresentato il calcolo del polinomio di Alexander del nodo a otto con la tecnica appena descritta. Il determinante finale è  $z^3 - 3z^2 + z$ , che moltiplicato per  $z^{-2}$  porta allo stesso risultato ottenuto in precedenza a partire dal polinomio di Conway.

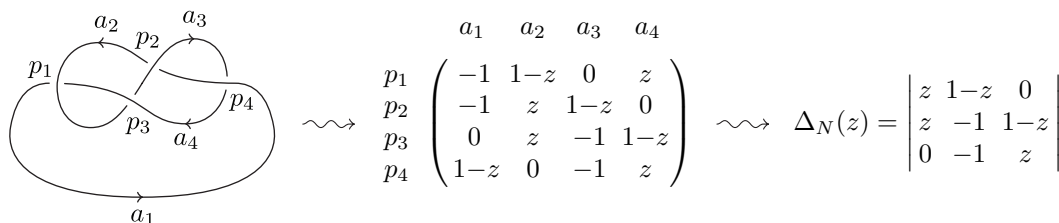


FIGURA 39. Calcolo del polinomio di Alexander del nodo a otto.

### 3.4. Nodi singolari e grafi spaziali

La relazione caratteristica del polinomio di Conway vista nella sezione precedente esprime la variazione del polinomio quando si passa da  $N_-$  a  $N_+$  (o viceversa), cioè si inverte un incrocio, in termini del polinomio di  $N_0$  in cui quell'incrocio è eliminato modificando la struttura ciclica e il numero delle componenti del nodo.

D'altra parte l'inversione di un incrocio di un nodo liscio può essere realizzata mediante un'omotopia regolare nello spazio. Durante tale deformazione liscia i due tratti del nodo coinvolti nell'incrocio si attraversano, formando in uno stadio intermedio  $N_\times$  un punto doppio trasversale con tangenti distinte (cf. figura 40).

Questa osservazione è alla base di un altro approccio alla costruzione di invarianti isotopici, che consiste nell'estendere il discorso anche ai *nodi singolari* con punti doppi trasversali e nell'esprimere la differenza dell'invariante quando si passa da  $N_-$  a  $N_+$  (o viceversa) in termini dell'invariante del nodo singolare intermedio  $N_\times$ .

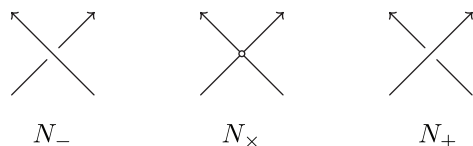


FIGURA 40. Nodi orientati coinvolti nella relazione di Vassiliev

Quest'ultimo, a differenza di  $N_0$ , ha la stessa struttura ciclica e lo stesso numero di componenti di  $N_+$  e  $N_-$ .

Ci limiteremo a considerare nodi  $N$  lisci singolari *connessi*, cioè parametrizzabili con un'applicazione differenziabile regolare  $\varphi : S^1 \rightarrow N \subset R^3$ , a meno isotopie lisce (cioè differenziabili regolari), e invarianti numerici reali per tali isotopie. Notiamo che in questo contesto, contrariamente a quanto avviene per i nodi non singolari, l'isotopia liscia non coincide con quella topologica (cf. figura 48).

Più precisamente, vogliamo associare a ogni nodo liscio singolare connesso orientato  $N$  con punti doppi trasversali un numero reale  $v(N)$  che sia invariante per isotopie lisce, cioè se  $N \equiv_{R^3} N'$  mediante un'isotopia liscia, allora  $v(N) = v(N')$ .

Un tale invariante si chiama *invariante di Vassiliev* se per ogni  $N_{\pm}, N_{\times} \subset R^3$  che differiscano solo localmente per le parti tracciate in figura 40 vale la relazione

$$v(N_+) - v(N_-) = v(N_{\times}).$$

ESERCIZIO 3.4.1. Dedurre da questa relazione che: 1)  $v(N) = 0$  per ogni nodo singolare  $N \subset R^3$  come in figura 41, dove  $C_1$  e  $C_2$  sono curve lisce singolari connesse orientate con punti doppi trasversali; 2) se  $N_a, N_b, N_c, N_d \subset R^3$  sono nodi lisci singolari connessi con punti doppi trasversali che differiscono solo localmente per le parti tracciate in figura 42, allora si ha  $v(N_a) + v(N_b) = v(N_c) + v(N_d)$ .

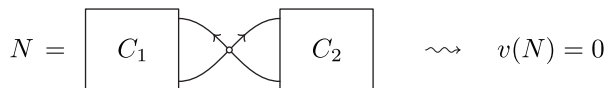


FIGURA 41. Nodo singolare con invarianti di Vassiliev tutti nulli.

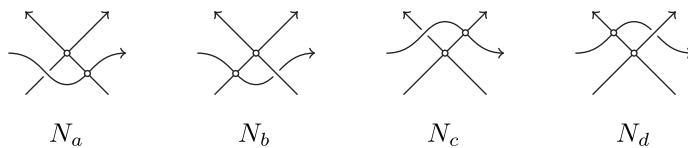


FIGURA 42. Nodi singolari coinvolti nella relazione dell'esercizio 3.4.1.

La linearità della relazione che definisce gli invarianti di Vassiliev implica che ogni loro combinazione lineare è ancora un invariante di Vassiliev. In altre parole gli invarianti di Vassiliev formano uno spazio vettoriale reale  $V$ .

Denotiamo con  $V_n$  il sottospazio vettoriale degli invarianti di Vassiliev  $v \in V$  di *ordine*  $\leq n$ , cioè tali che  $v(N) = 0$  per ogni nodo  $N$  con più di  $n$  punti doppi. Ovviamente si ha:  $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n \subset \dots \subset V$ .

Notiamo che  $V_0 \cong \mathbb{R}$ . Infatti per ogni  $v \in V_0$  si ha  $v(N_+) = v(N_-)$  (in quanto  $v(N_{\times}) = 0$ ). Allora, poiché tutti i nodi orientati (non singolari) sono isotopicamente

equivalenti a meno di inversione di incroci, si ha che  $V_0$  è formato dalle funzioni costanti sui nodi non singolari (e nulle su quelli singolari).

Per trattare gli invarianti di ordine superiore, abbiamo bisogno di introdurre la nozione di *diagramma di Gauss* associato a un nodo liscio singolare connesso orientato  $N$ . Questo descrive l'ordine ciclico con cui sono distribuite sulla circonferenza  $S^1$  le coppie di punti che corrispondono ai punti doppi mediante una qualunque parametrizzazione  $\varphi : S^1 \rightarrow N$ . Ogni coppia è identificata da un arco interno alla circonferenza che congiunge i due punti che la costituiscono (cf. figura 43).

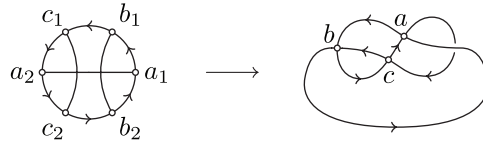


FIGURA 43. Diagramma di Gauss di un nodo singolare.

In effetti il diagramma di Gauss di un nodo liscio singolare connesso orientato  $N$  è solo un modo diverso di rappresentare il grafo topologico orientato  $X$  che si ottiene identificando le coppie di punti di  $S^1$  che corrispondono allo stesso punto di  $N$  mediante  $\varphi$ . Con tale identificazione  $\varphi$  diventa un omeomorfismo, quindi il diagramma rappresenta  $N \cong X$  come grafo topologico orientato (con tutti i vertici di valenza 4).

Un diagramma di Gauss si dice di ordine  $n$  se è formato da  $n$  archi, cioè corrisponde a un nodo con  $n$  punti doppi. Nella seguente figura 44 sono mostrati tutti i diagrammi di ordine  $n \leq 3$ .

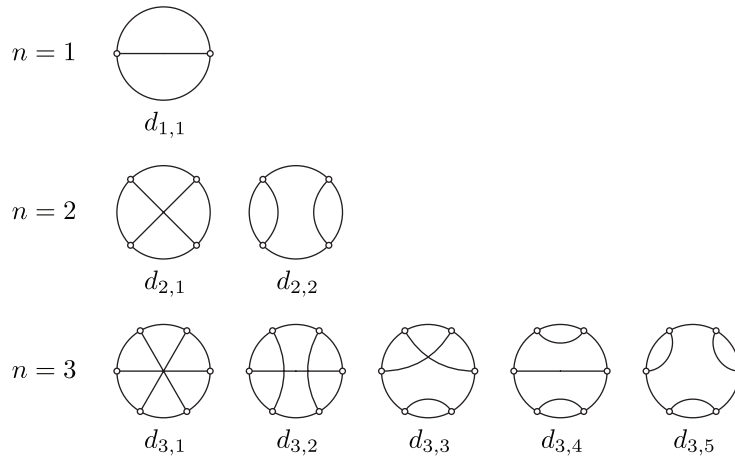


FIGURA 44. Diagrammi di Gauss di ordine  $n \leq 3$ .

Il fatto che i nodi orientati (non singolari) siano isotopicamente equivalenti a meno di inversione di incroci, si estende ai nodi singolari: due nodi lisci singolari connessi orientati con lo stesso diagramma di Gauss sono isotopicamente equivalenti a meno di inversione di incroci (e viceversa).

Ne segue che un invariante di Vassiliev  $v \in V_n$  di ordine  $\leq n$  ha lo stesso valore  $v(N)$  per tutti i nodi  $N$  con  $n$  punti doppi con lo stesso diagramma di Gauss (si applica lo stesso argomento usato sopra per  $V_0$ ). D'altra parte,  $v(N) = 0$  per tutti

i nodo con più di  $n$  punti doppi, mentre non siamo in grado di dire nulla sui valori  $v(N)$  per i nodi con meno di  $n$  punti doppi.

Comunque se  $v, v' \in V_n$  assumono lo stesso valore  $v(N) = v'(N)$  per tutti i nodi  $N$  con  $n$  punti doppi, allora  $v - v' \in V_{n-1}$  (verificare). In tal caso diciamo che  $v$  e  $v'$  sono *equivalenti* modulo  $V_{n-1}$  (rappresentano lo stesso elemento nello spazio quoziente  $V_n/V_{n-1}$ ).

Allora, a meno di equivalenza  $v \in V_n$  è univocamente determinato dalla sua restrizione ai nodi singolari con  $n$  punti doppi, cioè dai valori che associa ai diagrammi di Gauss di ordine  $n$  (per quanto detto sopra).

Tali valori non sono però completamente arbitrari, a causa delle relazioni provate nell'esercizio 3.4.1. Se un diagramma di Gauss ha un arco disgiunto da tutti gli altri (come  $d_{1,1}, d_{2,2}, d_{3,3}, d_{3,4}$  e  $d_{3,5}$  in figura 44) allora il valore associato è nullo (verificare). Quindi i diagrammi di questo tipo non contribuiscono a determinare  $v$ .

Inoltre, la relazione al punto 2 dell'esercizio si traduce in termini di diagrammi di Gauss nelle relazioni in figura 45 (riferite ai rispettivi valori di  $v$ ), dove gli  $n - 2$  archi non tracciati si intendono fissati e possono anche intersecare quelli tracciati, ma possono terminare solo nelle parti tratteggiate, che vengono dal completamento dei diagrammi in figura 42 (verificare). Queste relazioni consentono di esprimere il valore associato a certi diagrammi in funzione di quello associato ad altri.

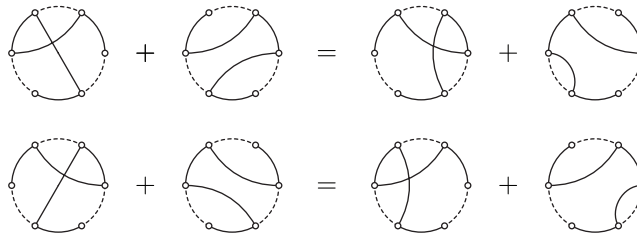


FIGURA 45. Relazioni tra i diagrammi di Gauss.

Chiamiamo *diagrammi base* di ordine  $n$ , i diagrammi di ordine  $n$  che rimangono dopo aver eliminato quelli per cui valore di  $v$  è nullo o dipendente dagli altri. Naturalmente la scelta dei diagrammi base non è unica, ma qualunque scelta va bene per determinare  $v \in V_n$  a meno di equivalenza.

ESERCIZIO 3.4.2. Verificare che gli insiemi  $B_1 = \{\}$ ,  $B_2 = \{d_{2,1}\}$ ,  $B_3 = \{d_{3,1}\}$  e  $B_4 = \{d_{4,1}, d_{4,2}, d_{4,3}\}$  (cf. figure 44 e 46) sono formati da possibili scelte di diagrammi base di ordine  $n \leq 4$  (uniche per  $n \leq 2$ ).

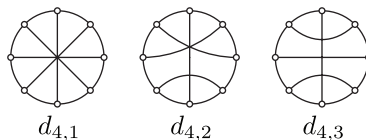


FIGURA 46. Diagrammi base di ordine 4.

Finora abbiamo discusso eventuali proprietà degli invarianti di Vassiliev ammeso che questi esistano. In effetti, gli unici invarianti di Vassiliev di cui conosciamo già l'esistenza sono quelli in  $V_0$ , che peraltro non sono molto interessanti in quanto costanti. D'altra parte da quando detto sopra segue che  $V_1 = V_0$  (verificare).

L'esistenza (e la classificazione a meno di equivalenza) degli invarianti di Vassiliev di ordine superiore è garantita dal seguente teorema.

**TEOREMA 3.4.3 (VASSILIEV-KONTSEVICH, 1990-92).** Comunque dato un insieme  $B_n = \{d_{n,1}, d_{n,2}, \dots, d_{n,m_n}\}$  di diagrammi base di ordine  $n \geq 2$  e comunque assegnati  $m_n$  numeri reali  $r_1, r_2, \dots, r_{m_n}$ , esiste un unico invariante di Vassiliev  $v \in V_n$  a meno di equivalenza tale che  $v(d_{n,j}) = r_j$  per ogni  $1 \leq j = 1, 2, \dots, m_n$ .

In particolare, per ogni  $i = 1, 2, \dots, m_n$  denotiamo con  $v_{n,i}$  l'unico invariante di Vassiliev in  $V_n$  caratterizzato a meno di equivalenza da: 1)  $v_{n,i}(S^1) = 0$  (condizione di normalizzazione); 2)  $v_{n,i}(d_{n,j}) = \delta_{i,j}$  per ogni  $j = 1, 2, \dots, m_n$ .

Poiché  $m_2 = m_3 = 1$ , possiamo sopprimere il secondo indice in  $v_{2,1}$  e  $v_{3,1}$  e indicare questi invarianti semplicemente con  $v_2$  e  $v_3$ . Un esempio di calcolo di  $v_2(N)$  con  $N$  nodo a otto è riportato in figura 47.

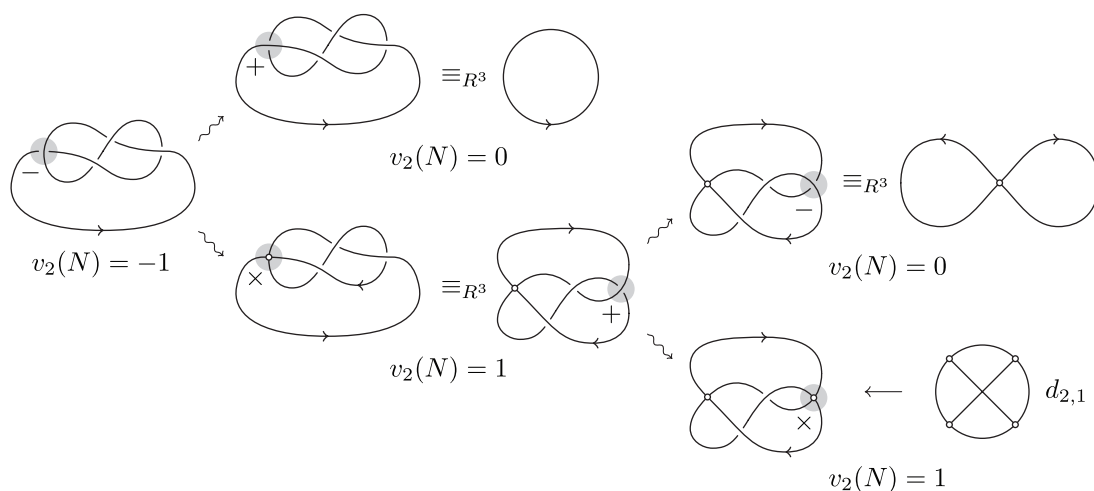


FIGURA 47. Calcolo dell'invariante di Vassiliev  $v_2$  del nodo a otto.

**ESERCIZIO 3.4.4.** Verificare che i nodi trifoglio positivo e negativo non sono banali e che non sono isotopicamente equivalenti tra loro usando rispettivamente gli invarianti  $v_2$  e  $v_3$ .

**ESERCIZIO 3.4.5.** Dimostrare che per ogni  $n \geq 0$  il coefficiente di  $y^n$  nel polinomio di Conway  $\nabla_N(y)$  per  $N$  nodo connesso non singolare è un invariante isotopico che si estende (sui nodi singolari) a un invariante di Vassiliev  $v_n \in V_n$  ( $v_2$  e  $v_3$  coincidono con quelli definiti sopra).

Concludiamo con qualche osservazione sui grafi topologici nello spazio. Come abbiamo già detto, i nodi lisci singolari considerati finora sono particolari grafi topologici con tutti i vertici di valenza 4. Abbiamo anche accennato al fatto che le isotopie lisce tra nodi lisci singolari non coincidono con quelle topologiche. Infatti tali isotopie preservano la struttura liscia dei vertici e quindi l'accoppiamento tra le coppie di spigoli opposti che vi convergono, cosa che non è preservata dalle isotopie topologiche. Ne segue che per i nodi singolari, contrariamente a quanto avviene per quelli non singolari, l'equivalenza isotopica liscia non coincide con l'equivalenza isotopica topologica. Un semplice esempio che evidenzia la differenza tra le due nozioni di equivalenza isotopica è mostrato in figura 48: a sinistra si hanno due nodi singolari

non isotopi (mediante isotopia liscia), a destra i corrispondenti grafi topologici che sono isotopi (mediante l'isotopia topologica suggerita dalle frecce).

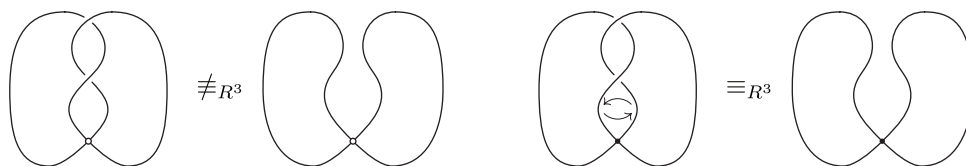


FIGURA 48. Isotopia liscia  $\neq$  isotopia topologica.

ESERCIZIO 3.4.6. Provare quanto illustrato in figura 49 (l'isotopia a destra può essere ricondotta a quella in figura 48, pensando le superfici come bordi di tori solidi con due buchi).

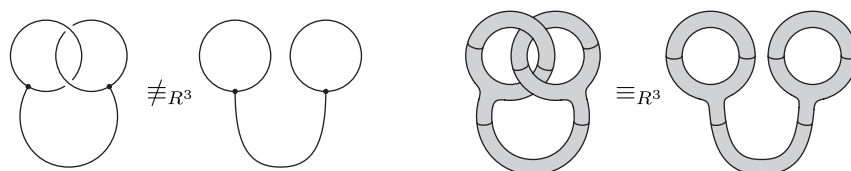


FIGURA 49. I due grafi topologici non sono isotopi, ma le due superfici lo sono!

In effetti, quella mostrata in figura 48 è sostanzialmente l'unica differenza tra isotopia liscia e isotopia topologica tra grafi topologici. Lo scambio suggerito dalle frecce nell'ordine ciclico con cui due spigoli che convergono ad un vertice compaiono nel diagramma, potrebbe essere aggiunto ai movimenti di Reidemeister per formare un insieme completo di movimenti che descriva in termini di diagrammi l'isotopia topologica tra grafi topologici nello spazio.

In ogni caso, così come vale anche per i nodi (singolari e non), si ha che due grafi topologici omeomorfi nello spazio sono isotopicamente equivalenti a meno di inversione di incroci. Questo fatto, insieme ad un oculato utilizzo degli invarianti introdotti sopra, consente di risolvere i seguenti problemi.

PROBLEMA 3.4.7. Ogni realizzazione topologica  $X \subset R^3$  del grafo completo con 6 vertici  $K_6$  contiene due cicli disgiunti  $C_1, C_2 \subset X$  che formano un 2-nodo non banale (infatti  $i(C_1, C_2) \neq 0$ ).

PROBLEMA 3.4.8. Ogni realizzazione topologica  $X \subset R^3$  del grafo completo con 7 vertici  $K_7$  contiene un ciclo hamiltoniano (cioè passante per tutti i vertici)  $C \subset X$  che forma un nodo non banale (infatti  $v_2(C) \neq 0$ ).

*Suggerimento.* Per il primo problema si può considerare la somma  $s(X) = \sum_{C_1, C_2 \subset X} i(C_1, C_2)$  sulle 10 coppie di cicli disgiunti contenute in  $X$ , mentre per il secondo la somma  $s(X) = \sum_{C \subset X} v_2(C)$  sui 360 cicli hamiltoniani contenuti in  $X$ . In entrambi i casi la parità di  $s(X)$  è invariante per inversione di incroci. D'altra parte, analizzando le due realizzazioni topologiche di  $K_6$  e  $K_7$  nello spazio rappresentate in figura 50, si vede che nella prima tutte le coppie di cicli disgiunti formano 2-nodi banali eccetto una che forma un 2-nodo di Hopf, mentre nella seconda tutti i cicli hamiltoniani sono nodi banali eccetto uno che è un nodo trifoglio. Una soluzione completa dei problemi 3.4.7 e 3.4.8 si trova nell'articolo [1].

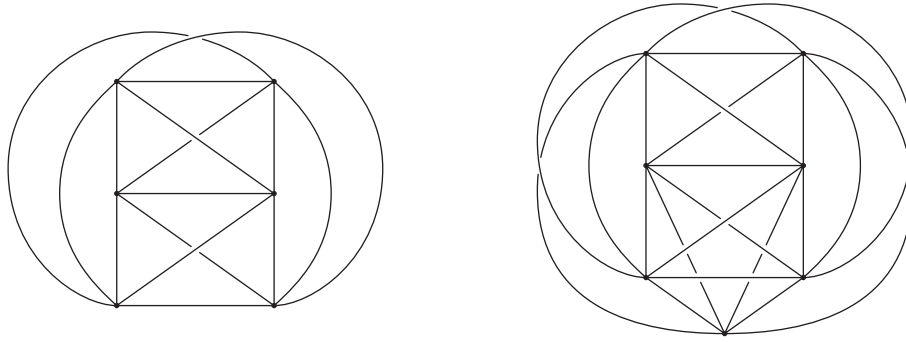


FIGURA 50. Grafi topologici  $K_6$  e  $K_7$  nello spazio.

## Bibliografia

- [1] J.H. Conway, C.McA. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, J. of Graph Theory 7 (1983), 445-453.
- [2] P.R. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press 2004.
- [3] N.D. Gilbert, T. Porter, *Knots and Surfaces*, Oxford University Press 1994.
- [4] C. Livingston, *Knots Theory*, MAA 1993.
- [5] R. Messer, P. Straffin, *Topology Now!*, MAA 2006.
- [6] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Konts, Links, Braids and 3-Manifolds*, Transl. of Math. Monographs 154, AMS 1997.
- [7] L. Beineke, R. Wilson, *Topics in Topological Graph Theory*, Cambridge University Press 2009.
- [8] J.L. Gross, T.W. Tucker, *Topological graph theory*, Dover 2001.