Da Poincaré a Perelman: un secolo di ordinaria matematica

Introduzione

La congettura formulata da Henri Poincaré nel 1904 è divenuta nel secolo scorso uno dei più famosi e importanti problemi aperti della matematica: un problema da un milione di dollari (uno dei sette problemi per i quali nel 2000 il Clay Mathematics Institute ha bandito il Millennium Prize).

Alla fine del 2002, senza alcun clamore, il matematico russo Grisha Perelman ha posto nell'arXiv un articolo (che sarebbe improprio chiamare preprint) dal titolo "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications". Tra le applicazioni c'è appunto dal dimostrazione della congettura di Poincaré (peraltro neppure menzionata nell'articolo).

In effetti Perelman dimostra la congettura di Thurston sulla geometrizzazione delle 3-varietà, seguendo l'idea proposta da Hamilton nella seconda metà degli anni '90 di utilizzare allo scopo il flusso di Ricci sulle varietà riemanniane e utilizzando risultati di Gromov sulle relazioni tra topologia e curvatura di tali varietà.

Mi limiterò qui a delineare in modo molto superficiale questo risultato, la cui esposizione richiederebbe competenze geometrico-analitiche profonde, svolgendo piuttosto alcune riflessioni sulla storia di questa "straordinaria" vicenda, soprattutto per mettere in luce alcuni aspetti "ordinari" del fare matematica.

In questo senso, il titolo della conferenza vuol essere doppiamente provocatorio. In primo luogo, con l'ovvio riferimento all'"ordinaria follia" di Bukowski. L'idea che il matematico sia tendenzialmente folle, squilibrato o quantomeno caratterizzato da comportamenti autistici sembra radicata nell'immaginario collettivo. Si pensi per esempio ai film "Morte di un matematico napoletano" o "A beautiful mind".

Nella primavera del 2003 i media hanno diffuso la notizia della dimostrazione della congettura di Poincaré, evidenziando soprattutto due aspetti: Perelman aveva lavorato per sette anni nel più completo isolamento, senza pubblicare nulla (con i tempi che corrono avrebbe rischiato il licenziamento prima di concludere), e non sembrava interessato a pubblicare i propri risultati così come richiesto dal bando del Millennium Prize (né era chiaro se avesse meno di 40 anni, come richiesto per ottenere la medaglia Fields).

La fantasia della gente si sarà sicuramente scatenata nell'immaginare Perelman chiuso per sette anni nel suo studio, in uno stato semi-vegetativo di totale abbrutimento, ossessionato dal proprio lavoro. Circa il milione di dollari, alcuni intervistati osservarono che dopo tutto Perelman avrebbe potuto essere pago del risultato raggiunto, ma naturalmente erano altri matematici. Tutto ciò non può che aver contribuito a rafforzare l'immagine negativa dei matematici presso l'opinione pubblica, affiancandola a quella dei magistrati, all'epoca bollati come "disturbati mentali".

La seconda provocazione è nei confronti degli stessi matematici, che tendono spesso ad accentuare la celebrazione del genio e del risultato "straordinario", trascurando il lavoro "ordinario" che c'è dietro e il contesto di una comunità (scientifica e non) senza la quale la genialità non potrebbe esprimersi. Su questi temi, circa 15 anni fa si è sviluppato un ampio dibattito sulle colonne del Bullettin dell'AMS (con un'eco anche su Le Scienze). Molto interessante è un articolo di Thurston sulla sociologia del fare matematica e sull'importanza della comunicazione (che non è solo divulgazione).

D'altra parte, il modo con cui la matematica viene proposta nelle scuole, come disciplina puramente logico-deduttiva, spesso ridotta a un ammasso informe di tecniche di calcolo senza alcun riferimento storico-culturale, non è certo invitante per la maggior parte gli studenti. L'idea storicamente radicata che la matematica non sia niente altro che la massima espressione del pensiero razionale risulta quanto mai deleteria, oltre che discutibile (per dirla con Poincaré, "è attraverso la logica che noi dimostriamo, ma è attraverso l'intuizione che inventiamo"). Per fortuna il sogno di Hilbert di meccanizzare la matematica si è rivelato un'illusione, altrimenti oggi si occuperebbero di matematica solo i computer.

Un risultato matematico è molto di più che non la semplice conseguenza di una catena di deduzioni logiche, per quanto mirabile possa essere. Il percorso che porta al suo conseguimento non è mai lineare: ci sono intuizioni, errori, aggiustamenti, risultati intermedi. La vicenda della congettura di Poincaré, a partire dagli stessi lavori iniziali di Poincaré, è significativa da questo punto di vista.

Spazi euclidei e sfere

La congettura di Poincaré riguarda una caratterizzazione topologica (omotopica) della sfera 3-dimensionale $S^3 = \{x \in R^4 \mid d(0,x) = 1\} \cong R^3 \cup \{\infty\}$ (in dimensione più bassa la questione è abbastanza elementare). Una analoga caratterizzazione può essere considerata per tutte le sfere n-dimensionali $S^n = \{x \in R^{n+1} \mid d(0,x) = 1\} \cong R^n \cup \{\infty\}$ con $n \geq 4$ (congettura di Poincaré generalizzata).

Varietà (chiuse orientabili)

Poincaré "topologo" concentra la propria attenzione sulle varietà, cioè gli spazi localmente euclidei: curve, superfici, 3-varietà, n-varietà. Naturalmente, si pone il problema della classificazione topologica delle varietà dal punto di vista globale. In particolare, riesce a classificare "completamente" le superfici chiuse orientabili.

La sua congettura afferma che S^3 è l'unica 3-varietà chiusa orientabile semplicemente connessa (in cui ogni cappio è contraibile, cioè con gruppo fondamentale banale). Lo stesso in dimensione 2 segue immediatamente dalla classificazione delle superfici chiuse. Nella versione generalizzata la congettura afferma sostanzialmente che S^n è l'unica n-varietà chiusa orientabile con il tipo di omotopia di S^n (cioè con tutti i gruppi di omotopia banali fino all'ordine $n-1$).

Triangolazioni e omologia

L'idea fondamentale che introduce è quella di assumere che la varietà sia decomposta in pezzi standard (archi, triangoli, tetraedri, ecc.), e di trattare algebricamente il modo in cui tali pezzi sono assemblati insieme a dare tutta la varietà. Ciò gli consente di descrivere la struttura globale delle varietà mediante strutture algebriche (omologia).

Il problema dell'esistenza di una tale decomposizione (triangolazione) e della sua unicità a meno di equivalenze combinatorie è divenuto famoso come "Auptvermutung" ed è stato risolto da Radò nel 1924 per le superfici, da Moise nel 1952 per le 3-varietà, e solo negli anni '60 per le varietà di dimensione superiore. Anche il problema più semplice dell'invarianza topologica dell'omologia, individuato ma lasciato aperto da Poincaré, fu successivamente risolto solo nel 1915 da Alexander.

La congettura di Poincaré

Alla fine del XIX secolo, Hilbert scriveva i "Grundlagen der Geometrie" (1899), riformulando gli assiomi di Euclide con il rigore richiesto dai tempi e con l'obiettivo di affrancare la geometria dalla sua millenaria dipendenza dalla nostra percezione fisica dello spazio (erano già state scoperte le geometrie non euclidee). Il risultato era una costruzione meravigliosa, alla cui origine c'è solo l'insieme vuoto ($\emptyset \rightsquigarrow \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow$ modello "reale" dello spazio).

Nel frattempo Poincaré scriveva l'Analysis situs (1895) seguito da una serie di cinque complementi (1899-1904). Si tratta di varie centinaia di pagine, che sembrano scritte "di getto", comunque con uno stile e uno spirito completamente diversi da quelli di Hilbert, badando più alla sostanza che al rigore formale. Pagine piene di intuizioni e idee che sarebbero poi state sviluppate nei decenni a venire, dando vita ad una nuova branca della geometria: la topologia (in particolare algebrica e geometria).

L'idea intuitiva di trasformazione/deformazione continua, che sta alla base della topologia, è ben radicata nelle nostre strutture mentali, più del concetto di isometria o similitudine, perché legata alla percezione della nostra identità e integrità corporea in continua evoluzione. Purtroppo però non è possibile trattare le trasformazioni continue dal punto di vista matematico in modo altrettanto elementare (non bastano le trasformazioni lineari).

Le affermazioni di Poincaré sono spesso supportate da discussioni informali, piuttosto che da dimostrazioni rigorose come sarebbero piaciute ad Hilbert. D'altra parte Poincaré diceva a proposito della costruzione formale di $\mathbb{N}$: "se ci vogliono 27 equazioni per provare che 1 è un numero, quante ce ne vorranno per dimostrare un vero teorema?" (per esempio il teorema di Jordan).

La maggior parte delle affermazioni di Poincaré saranno poi dimostrate in seguito da altri, molte diventeranno teoremi fondamentali della topologia, altre si riveleranno errate (come accadde peraltro anche nella vicenda dell'oscar per il saggio sul problema dei tre corpi). Ed è proprio da un clamoroso errore che parte la nostra storia.

Nel II complemento (1900), Poincaré afferma (senza alcun cenno di dimostrazione) che S^3 è l'unica 3-varietà chiusa orientabile in cui ogni cappio sia omologicamente banale (analogamente a quanto vale per S^2 in dimensione due). Nel V complemento (1904) ritratta, mostrando con un controesempio (la sfera omologica dodecaedrale) che l'omologia non è sufficiente a determinare la topologia di una 3-varietà. Pone quindi il problema in termini di omotopia (gruppo fondamentale): è vero che S^3 è l'unica 3-varietà chiusa orientabile in cui ogni cappio è contraibile (semplicemente connessa)? È questo il problema passato alla storia come "congettura di Poincaré".

Per un intero secolo matematici di prim'ordine hanno cercato, senza successo, di dimostrare la congettura. Basti pensare che prima di Perelman quattro medaglie Fields sono state attribuite per lavori relativi alla congettura di Poincaré: Milnor (1962) per le sfere esotiche, Smale (1966) per $n > 4$, Thurston (1982) per il lavori sulla geometrizzazione delle 3-varietà, Freedman (1986) per $n = 4$. Inoltre almeno sette premi Veblen (per la geometria) sono stati assegnati per lavori fondamentali correlati alla dimostrazione della congettura: Papakyriakopoulos (1964), Smale (1966), Thurston (1976), Gromov (1981), Freedman (1986), Hamilton (1996), Cheeger (2001).

La sfera omologica

La sfera omologica dodecaedrale si ottiene identificando le facce opposte di un dodecaedro con una torsione di 36°. Ogni spigolo del quoziente deriva dall'identificazione di tre spigoli del dodecaedro. Gli angoli diedri del dodecaedro sono di circa 116,5°, ma per evitare singolarità coniche nel quoziente, occorrerebbero angoli diedri di 120°. Questi si possono ottenere deformando il dodecaedro euclideo ad un dodecaedro sferico. Così facendo la sfera omologica risulta localmente isometrica ad S^3.

La deformazione necessaria è comunque piccola, e il dodecaedro sferico da considerare è conseguentemente "piccolo": il suo volume è $1/120$ del volume di S^3. Infatti, S^3 ammette una tassellazione con 120 tetraedri, in modo che la sfera omologica di Poincaré si ottiene come quoziente mediante l'azione libera del gruppo binario dodecaedrale che permuta i 120 tasselli. La proiezione è il rivestimento universale della sfera omologica, il cui gruppo fondamentale ha quindi 120 elementi.

Lo spazio di Whitehead

Nel corso del secolo passato ci sono stati molti tentativi falliti di dimostrare la congettura di Poincaré e anche diversi tentativi (ovviamente falliti anche questi) di confutarla costruendo un controesempio.

Nel 1934 J.H.C. Whitehead partì dalla seguente osservazione: se da una 3-varietà chiusa semplicemente connessa si toglie un punto si ottiene una 3-varietà contraibile (come avviene per $S^3 - \{\infty\} \cong R^3 \searrow 0$). Credette poi di aver dimostrato che una tale varietà è topologicamente equivalente a R^3, e quindi rimettendo al suo posto il punto tolto si ottiene una varietà topologicamente equivalente ad S^3.

Un anno dopo si accorse di essersi sbagliato e costruì un controesempio come unione infinita di tori, ciascuno incluso in modo omotopicamente banale nel successivo. La varietà di Whitehead differisce da R^3 per la sua struttura all'infinito, ma se la si moltiplica per R si ottiene uno spazio topologicamente equivalente ad R^4. Quest'ultima proprietà gioca un ruolo essenziale nel lavoro di Freedman: costruzione di R^4 esotici e dimostrazione della congettura di Poincaré (topologica) in dimensione 4.

Altri tentativi falliti

Nel 1958 Bing diede una caratterizzazione di S^3 come l'unica 3-varietà chiusa orientabile in cui ogni nodo si può deformare con continuità senza formare autointersezioni in modo da renderlo arbitrariamente piccolo (per esempio questo non vale nella varietà di Whitehead). Cinque anni dopo, pubblicò un articolo con una dimostrazione alternativa, perché quella originale assumeva una proprietà dei nodi (la proprietà P) che è stata dimostrata solo nel 2004 da Kronheimer e Mrowka. Nel seguito Bing, pensando che potesserio esistere nodi senza la proprietà P, si dedicò a settimane alterne anche alla ricerca di un controesempio alla congettura di Poincaré.

Nel 1957 Papakyriakopoulos ottenne tre risultati fondamentali su cappi, dischi e sfere nelle 3-varietà (uno di questi, noto come lemma di Dehn, era stato pubblicato da Dehn nel 1910 con una dimostrazione sbagliata). Questo generò un certo entusiasmo, nella convinzione che finalmente ci fossero gli strumenti per provare la congettura di Poincaré. Lo stesso Papakyriakopoulos lavorò per quasi venti anni alla congettura, riducendola a un'altra in teoria dei gruppi (mai dimostrata) e lasciando un lavoro incompiuto di 160 pagine sulle 3-varietà (con una pagina bianca intestata "Lemma 14").

In quegli stessi anni anche Moise si dedicò alla congettura di Poincaré in competizione con Papakyriakopoulos (entrambi erano a Princeton), dopo aver risolto nel 1952 il problema della triangolazione delle 3-varietà, dimostrando che ogni 3-varietà ammette una struttura differenziabile sostanzialmente unica (fatto cruciale per il seguito).

Ecco un elenco (non esaustivo) di altri matematici che hanno affrontato il problema posto da Poincaré, con tecniche topologiche "classiche": Haken (1963-1973, inaugurò la topologia computazionale ed è passato poi al teorema dei 4 colori), Stallings (1966, How to not prove Poincaré conjecture), Armentrout (circa venti anni fino al 1981, alla ricerca di un controesempio), Gilman-Rolfsen (1983, congettura di Zeeman sulle 2-spine delle 3-varietà), Poenaru (dal 1985 a oggi, centinaia di pagine di preprint), Rourke-Rêgo (1986, utilizzando il calcolo di Kirby), Rubinstein (1994, algoritmo per il riconoscimento della sfera), Dunwoody (2002, otto versioni su arXiv: "A proof of the Poincaré conjecture?")

Topologia e geometria

Nel 1976 Thurston propose di adottare un punto di vista completamente diverso (che traeva peraltro spunto dagli stessi lavori di Poincaré), e formulò una congettura molto più ambiziosa di quella di Poincaré, puntando alla classificazione di tutte le 3-varietà chiuse orientabili.

L'idea era quella di dotare le 3-varietà di strutture geometriche "rigide", cioè di metriche riemanniane localmente omogenee. Rispetto tali strutture geometriche la struttura topologica globale risulta in un certo senso "uniformemente distribuita" in tutto lo spazio. Ciò ne facilita il riconoscimento e lo studio, grazie all'utilizzo degli strumenti geometrico-analitici della geometria differenziale.

Le geometrie 2-dimensionali

In dimensione 2, ci sono solo tre possibili modelli geometrici (a meno di cambiamenti di scala) tutti localmente isotropi: R^2 (piano euclideo), S^2 (sfera euclidea) e H^2 (piano iperbolico). Questi si distinguono per avere rispettivamente curvatura nulla, positiva e negativa ($K = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/A$, per ogni triangolo geodetico). In S^2 è possibile costruire poligoni regolari con angoli arbitrariamente grandi (fino a 180°), mentre in H^2 gli angoli possono essere resi arbitrariamente piccoli.

Il teorema di uniformizzazione

Poincaré ha dimostrato che ogni superficie chiusa orientabile può essere dotata di una struttura geometrica (metrica riemanniana localmente omogenea) unica (a meno di cambiamento di scala). Le uniche superfici chiuse orientabili ad ammettere una struttura euclidea o sferica sono rispettivamente il toro e la sfera. Tutte le altre superfici ammettono una struttura iperbolica.

Le geometrie 3-dimensionali

In dimensione 3, i modelli geometrici locali sono otto (a meno di cambiamenti di scala): R^3 (spazio euclideo), S^3 (3-sfera euclidea) e H^3 (spazio iperbolico) sono isotropi; $S^2 \times R$ ed $H^2 \times R$ sono prodotti simmetrici; Sol, Nil e $\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathbb{R}}$ sono gruppi di Lie con metriche invarianti (non simmetrici). Anche in questo caso valgono i seguenti fatti: 1) unicità della struttura geometrica (a meno di cambiamenti di scala), cioè se una 3-varietà ammette una struttura geometrica di un tipo non può ammetterne una di un altro tipo; 2) l'unico tipo di varietà geometriche interessante è quello iperbolico, gli altri contengono solo casi sporadici (10 per R^3, 2 per $S^2 \times R$) completamente classificati (sono tutti fibrati di Seifert ad eccezione delle varietà di tipo Sol). Per quanto riguarda l'esistenza invece la situazione è completamente diversa da quelle delle superfici: non tutte le 3-varietà chiuse orientabili ammettono una struttura geometrica.

La congettura di Thurston

La congettura di geometrizzazione di Thurston afferma che ogni 3-varietà chiusa orientabile può essere decomposta tagliandola lungo sfere e tori "non banali", in modo che ciascun pezzo, dopo aver tappato i buchi sferici, ammette una struttura geometrica con volume finito.

In particolare, la congettura di Thurston implica quella di Poincaré. Infatti una 3-varietà chiusa semplicemente connessa non può essere tagliata in modo "non banale", quindi la congettura di geometrizzazione implica che deve essere essa stessa geometrica. Allora, sempre per la semplice connessione deve essere topologicamente equivalente ad uno degli spazi modello elencati sopra. E l'unico di tali spazi che sia chiuso è S^3.

Thurston è riuscito a dimostrare la sua congettura solo per le 3-varietà chiuse orientabili che contengano una superficie "non banale". Cioè in quasi tutti i casi, escluso però quello semplicemente connesso (proprio quello della congettura di Poincaré).

Hamilton: il flusso di Ricci

Negli anni '80 Hamilton propose il seguente schema per costruire varietà geometriche: partendo da una 3-varietà chiusa orientabile con una qualunque metrica, si fa variare la metrica secondo una legge di evoluzione che tenda a diffondere la curvatura, nella speranza di arrivare ad una nuova metrica localmente omogenea (analogamente a quanto avviene per la diffusione del calore all'interno di un corpo, fino al raggiungimento dell'equilibrio termico, quando tutti i punti del corpo hanno la stessa temperatura).

L'equazione che regola questa evoluzione (flusso di Ricci) è: $g'_{i,j}(t) = -2R(g_{i,j}(t))$ (dove R denota il tensore di Ricci). L'analogia con l'equazione del calore risulta evidente se si scrive l'equazione di evoluzione per il tensore di Ricci stesso: $R'_{i,j}(t) = \Delta R_{i,j} + Q_{i,j}$ (dove $Q_{i,j}$ è un termine quadratico).

Hamilton riuscì a dimostrare che se si parte con una metrica con curvatura positiva, allora la varietà collassa in un tempo finito T; inoltre, la curvatura resta sempre positiva e se si riscala la metrica in modo da mantenere costante il volume della varietà, allora il limite per $t \to T$ è una varietà a curvatura costante (quindi sferica).

Successivamente suggerì l'idea che lo stesso schema potesse essere utilizzato per dimostrare la congettura di Thurston. Comunque, se non si fa nessuna ipotesi sulla metrica iniziale, durante l'evoluzione si possono ottenere delle singolarità (collassamenti parziali della varietà), che non sono eliminabili mediante riscalatura.

Perelman: le singolarità

Perelman ha studiato tali singolarità, dimostrando che si tratta essenzialmente solo di sfere che collassano (eliminabili mediante chirurgia) o intere componenti che collassano a una circonferenza (con geometria di tipo $S^2 \times R$). Nell'evoluzione si possono presentare infinite singolarità, ma solo un numero finito di esse è significativo dal punto di vista topologico (e ce n'è comunqne solo un numero finito in ogni intervallo di tempo limitato).

I pezzi che sopravvivono per un tempo infinito, si suddividono mediante tori in regioni in cui la geometria tende a diventare iperbolica e regioni che "collassano". Queste ultime ammettono struttura geometrica (non generata dall'evoluzione del flusso di Ricci) di tipo S^3, Sol, Seifert (R^3, S^3, $S^2 \times R$, $H^2 \times R$, Nil e $\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathbb{R}}$) o R^3, rispettivamente a seconda che la dimensione finale del collassamento sia 0,1,2 o 3.

Per le varietà semplicemente connesse (con gruppo fondamentale finito), l'argomento si può semplificare. Infatti, Perelman ha fatto vedere che in questo caso tutta la varietà collassa dopo un tempo finito, quindi c'è solo un numero finito di singolarità.

Questa dimostrazione della congettura di Poincaré, sebbene sia in linea con le idee di Poincaré, lascia un po' l'amaro in bocca: in tutte le altre dimensioni è possibile provare la sua generalizzazione con tecniche topologiche "classiche". La ricerca di una dimostrazione più diretta ed elementare continuerà certamente. D'altra parte, in occasione del Congresso mondiale dei matematici del 2000, Smale aveva incluso la "soluzione" della congettura di Poincaré nella sua lista di problemi per questo secolo.

Qualche lettura

Articoli introduttivi

[1] J. Milnor, *Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds*, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), 1226–1233.

[2] M. Anderson, *Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow*, Notices Amer. Math. Soc. 51 (2004), 184–193.

Articoli originali

[3] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint 2003 (39 pagine), arXiv:math/0211159.

[4] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint 2003 (22 pagine), arXiv:math/0303109.

[5] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint 2003 (7 pagine), arXiv:math/0307245.

Note dettagliate

[6] B. Kleiner, J. Lott, *Notes on Perelman's papers*, arXiv:math/0605667 (200 pagine).

[7] J. Morgan, G. Tian, *Ricci Flow and the Poincare Conjecture*, arXiv:math/0607607 (492 pagine).

[8] H.-D. Cao, X.-P. Zhu, *Hamilton-Perelman's Proof of the Poincaré Conjecture and the Geometrization Conjecture*, Asian J. Math., **10** (2006), 165-492, versione revisionata: arXiv:math/0612069 (366 pagine).

Testi divulgativi

[9] D. O'Shea, *La congettura di Poincaré*, Rizzoli 2007.

[10] G. Szpiro, *L'enigma di Poincaré*, Apogeo 2008.