## Poligoni regolari euclidei

$P \subset E^2$ poligono $\overset{\text{def}}{\iff}$ 1) $P$ chiuso limitato e connesso
2) $\operatorname{Bd} P$ poligonale semplice chiusa

Teorema di Jordan: {poligoni} $\leftrightsquigarrow$ {poligonali semplici chiuse}
($C$ poligonale semplice chiusa $\rightsquigarrow$ $\sim_C$ relaz. di equiv. su $E^2 - C$
definita: $p \sim_C q \;\Leftrightarrow\; \exists\, A$ arco poligonale tra $p$ e $q$ con $A \cap C = \varnothing$
$\rightsquigarrow$ due classi di equivalenza: $I(C)$ limitata ed $E(C)$ illimitata
$\rightsquigarrow$ $P = C \cup I(C)$ unico poligono con $\operatorname{Bd} P = C$)

Dimostrazione: per induzione su $n$ = numero dei lati di $C$
$n = 3$ : $I(C)$ = intersezione semipiani aperti (convesso limitato)
$E(C)$ = unione semipiani aperti (connesso illimitato)
$n \geq 4$ : $\exists\, L$ diagonale di $C$ ed $\exists\, C', C''$ poligonali semplici chiuse
tali che $C' \cup C'' = C \cup L$ e $C' \cap C'' = L$ quindi $n', n'' < n$,
$C - C' \subset E(C'')$, $C - C'' \subset E(C')$ e $I(C') \cap I(C'') = \varnothing$
$\rightsquigarrow$ $I(C) = I(C') \cup I(C'') \cup \operatorname{Int} L$, $E(C) = E(C') \cap E(C'')$

Conseguenza: $\Sigma_P = (n-2)\pi$ (somma angoli interni $n$-gono)
$n = 3$ : $\alpha + \beta + \gamma = \pi \leftrightsquigarrow$ assioma delle parallele
$n \geq 4$ : $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = L \rightsquigarrow n = n' + n'' - 2 \rightsquigarrow$
$\Sigma_P = \Sigma_{P'} + \Sigma_{P''} = (n'-2)\pi + (n''-2)\pi = (n-2)\pi$

$P \subset E^2$ regolare $\overset{\text{def}}{\iff}$ gruppo delle simmetrie $\Gamma_P$ massimale
$\iff \Gamma_P \cong D_n$ (gruppo diedrale di ordine $2n$)
$\iff$ tutti i lati e tutti gli angoli congruenti

Nota: regolare $\Rightarrow$ inscritto e circoscritto $\Rightarrow$ convesso

Classificazione dei poligoni regolari:
$\operatorname{Isom} E^2 \rightsquigarrow$ $P_n(r)$ = unico $n$-gono regolare con raggio $r > 0$
infatti: $P \cong P' \Leftrightarrow n = n'$ e $l = l'$ ($\alpha = \alpha' = \pi - 2\pi/n$)
$\operatorname{Sim} E^2 \rightsquigarrow$ $P_n$ unico $n$-gono regolare a meno di similitudine
infatti: $P \sim P' \Leftrightarrow n = n'$ (rapp. di simil. $k = l/l'$)

Costruzioni con riga e compasso:

I) punti $p$ e $q \rightsquigarrow$ Retta$(p,q) =$ retta passante per $p$ e $q$

II) punti $p$ e $q \rightsquigarrow$ Circ$(p,\overline{pq}) =$ circonf. di centro $p$ e raggio $\overline{pq}$

III) rette/circonferenze $A$ e $B \rightsquigarrow$ punti di $A \cap B$

Note: 1) Mohr-Mascheroni (1797): è sufficiente il compasso

2) Poncelet-Steiner (1833): riga e circonferenza fissa

3) riga e compasso $\leftrightsquigarrow$ riga con due orli $\leftrightsquigarrow$ riga e squadra

$U = \langle p_0, p_1 \rangle$ segmento unitario in $E^2$

$\rightsquigarrow$ $E^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ isometria tale che $p_0 \leftrightarrow (0,0)$ e $p_1 \leftrightarrow (1,0)$

$\rightsquigarrow$ $E^2 \leftrightarrow \mathbb{C}$ isometria tale che $p_0 \leftrightarrow 0$ e $p_1 \leftrightarrow 1$

$p \in E^2$ è costruibile a partire da $\langle p_0, p_1 \rangle$

$\iff p \leftrightarrow (x,y)$ con $x$ e $y$ esprimibili a partire da 1 mediante le operazioni razionali e le radici quadrate

$\iff p \leftrightarrow x + i\,y \in K \overset{\text{def}}{=\!=}$ minimo sottocampo di $\mathbb{C}$ chiuso rispetto alla radice quadrata

Note: 1) $U \rightsquigarrow r\,U \Leftrightarrow r$ è un numero reale positivo in $K$

2) $\langle p_0, p_1 \rangle \rightsquigarrow p \Rightarrow x$, $y$ e $x + i\,y$ algebrici di grado $2^k$

Conseguenza: con riga e compasso non si possono realizzare la quadratura del cerchio ($\pi$ è trascendente), la duplicazione del cubo ($t^3 - 2$ è irriducibile), la trisezione dell'angolo ($\cos \pi/9 \rightsquigarrow 8t^3 - 6t - 1$).

$P_n$ costruibile $\overset{\text{def}}{\iff}$ $U$ segmento unitario $\rightsquigarrow P_n(1)$

($\Leftrightarrow r\,U \rightsquigarrow P_n(r) \Leftrightarrow$ lato $\rightsquigarrow$ $n$-gono regolare)

$\iff U \rightsquigarrow$ angolo $\omega_n = 2\pi/n$

($\Leftrightarrow \sin\omega_n$ o $\cos\omega_n$ o $\tan\omega_n$ sta in $K$)

$\iff \langle 0, 1 \rangle \rightsquigarrow \tau_n = \cos\omega_n + i \sin\omega_n$

($P_n(1) \cong \langle 1, \tau_n, \tau_n^2, \ldots, \tau_n^{n-1} \rangle$

$1, \tau_n, \tau_n^2, \ldots, \tau_n^{n-1}$ zeri di $t^n - 1$)

Greci: $P_n$ costruibile per $n = 2^{k+2}, 2^k{\cdot}3, 2^k{\cdot}5, 2^k{\cdot}15$ con $k \geq 0$

Gauss (1796): $P_n$ costruibile $\Leftrightarrow n = 2^k p_1 p_2 \dots p_l$ con $k, l \geq 0$
e $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$ primi di Fermat distinti
(in particolare sono costruibili $P_{17}, P_{257}$ e $P_{65537}$)

Dimostrazione: 1) se $n_1$ e $n_2$ sono primi tra loro, allora:
$P_{n_1 n_2}$ costruibile $\Leftrightarrow P_{n_1}$ e $P_{n_2}$ costruibili
2) $P_{2^k}$ è costruibile per ogni $k \geq 1$ (Greci)
3) $P_{p^2}$ non è costruibile se $p$ è primo dispari
($1 + t^p + \ldots + t^{p(p-1)}$ polinomio minimo per $\tau_{p^2}$)
4) $P_p$ costruibile $\Leftrightarrow p$ primo di Fermat
($1 + t + \ldots + t^{p-1}$ polinomio minimo per $\tau_p$)

Esempi: $n = 5 : (x + i\,y)^5 = 1 \rightsquigarrow 5x^4 - 10x^2y^2 + y^4 = 0$
$\rightsquigarrow t^4 - 10t^2 + 5 = 0$ (dove $t = y/x$)
$\rightsquigarrow t = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}}$ ( $\rightsquigarrow l = \sqrt{5 - \sqrt{5}}\big/\sqrt{2}$ )
$n = 7 : (x + i\,y)^7 = 1 \rightsquigarrow 7x^6 - 35x^4y^2 + 21x^2y^4 - y^6 = 0$
$\rightsquigarrow t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0$ (dove $t = y/x$)

Note: 1) gli unici numeri di Fermat $F_k = 2^{2^k}$ primi attualmente
noti sono: $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$
(già noti a Fermat che congetturò $F_k$ primo per ogni $k$)
2) è noto che $F_5, \ldots, F_{21} \sim 10^{630.000}$ non sono primi
si congettura che $F_k$ non sia primo per nessun $k \geq 5$

## Poligoni regolari sferici

Sfera unitaria: $S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Geometria sferica: $d_{\text{sf}}(p, q) = \min\{l(A) \mid A \subset S^2$ arco tra $p$ e $q\}$
$\text{Retta}_{\text{sf}}(p, q) =$ Circ massima per $p$ e $q$
$\text{Circ}_{\text{sf}}(p, r) = \text{Circ}(p', \sin(r))$ (con $p' \in E^3$)

Piano proiettivo: $P^2 \overset{\text{def}}{=\!=} S^2$ con la geometria sferica / $x \sim -x$

Note: 1) $R, R' \subset P^2$ rette distinte $\Rightarrow R \cap R' = \{p\}$ ($\nexists$ parallele)
2) $P^2$ è limitato ($\operatorname{diam} P^2 = l(R) = \pi$) $\rightsquigarrow \operatorname{Sim} P^2 = \operatorname{Isom} P^2$

Teorema di Jordan: *vale solo per poligoni/poligonali* $\subset P^2 - R$
(priezione centrale $\rightsquigarrow P^2 - R \cong S^2_+ \leftrightarrow E^2$ tale che $\langle p, q\rangle \leftrightarrow \langle p', q'\rangle$
$\Rightarrow$ poligoni/poligonali $\subset P^2 - R \cong S^2_+ \leftrightarrow$ poligoni/poligonali $\subset E^2$)

$\Sigma_P = (n-2)\pi + A_P$ (con $A_P =$ area sferica del poligono $P$)
$n = 3 : A_T = \alpha + \beta + \gamma - \pi \rightsquigarrow \Sigma_T = \pi + A_T$
$n \geq 4 : P = P' \cup P'',\ P' \cap P'' = L \rightsquigarrow n = n' + n'' - 2 \rightsquigarrow$
$A_{P'} + (n'-2)\pi + A_{P''} + (n''-2)\pi = A_P + (n-2)\pi$

Conseguenza: formula di Eulero per le poligonazioni sferiche
$f - s + v = 2$ ($f =$ facce, $s =$ spigoli, $v =$ vertici)

$P$ poligono regolare sferico $\Rightarrow$ *inscritto in* $\operatorname{Circ}_{\mathrm{sf}}(p, r)$ con $r < \pi/2$
$\rightsquigarrow P_n^{\mathrm{sf}}(r)$ unico $n$-gono sferico regolare con raggio $r < \pi/2$
a meno di isometrie, *infatti:* $r \leftrightsquigarrow l_n(r) \leftrightsquigarrow \alpha_n(r)$
($l_n(r)$ crescente: $\lim_{r\to 0} l_n(r) = 0$ e $\lim_{r\to\pi/2} l_n(r) = 2\,\pi/n$
$\alpha_n(r)$ crescente: $\lim_{r\to 0} \alpha_n(r) = \pi - 2\pi/n$ e $\lim_{r\to\pi/2} \alpha_n(r) = \pi$)

Costruzioni con riga e compasso sferici:
$U_{\mathrm{sf}}$ unità di misura assoluta con $l(U_{\mathrm{sf}}) = k_{\mathrm{sf}} = \pi/4$
$\rightsquigarrow l_{\mathrm{sf}}(\mathrm{Retta}_{\mathrm{sf}}) = 4$ e $\operatorname{Circ}_{\mathrm{sf}}(p, r)$ definita se e solo se $l_{\mathrm{sf}}(r) < 2$

$U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow r\,U_{\mathrm{sf}} \iff \sin k_{\mathrm{sf}}\, r \in K$ (con $0 < r < 4$)
$U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow \alpha \iff U \rightsquigarrow \alpha$ in $E^2$ ($\sin\alpha \,/\, \sin k_{\mathrm{sf}}\, a = \sin\beta \,/\, \sin k_{\mathrm{sf}}\, b$)

Conseguenza: $U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow U_{\mathrm{sf}}/n \Leftrightarrow P_n$ costruibile in $E^2$

$P_n^{\mathrm{sf}}(1)$ costruibile $\iff P_n$ è costruibile in $E^2$
($U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{sf}}(1) \Leftrightarrow U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow \mathrm{Retta}_{\mathrm{sf}}/n$ oppure $U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow \omega_n \Leftrightarrow U \rightsquigarrow \omega_n$)

Nota: $U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{sf}}(1) \Rightarrow U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{sf}}(r)$ se $\sin k_{\mathrm{sf}}\, r \in K$ (con $0 < r < 4$)
ma $\not\Rightarrow r\,U_{\mathrm{sf}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{sf}}(r)$ (costruzioni non simili come in $E^2$)

**Poligoni regolari iperbolici**

Disco di Poincaré: $D^2 = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2+y^2<1\}$

Geometria iperbolica: $d_{\text{ip}}(p,q) = |\log(d(p,q')\,d(q,p')/d(p,p')\,d(q,q'))|$
$\text{Retta}_{\text{ip}}(p,q) = \text{Circ} \perp S^1$ per $p$ e $q$ $(\cap D^2)$
$\text{Circ}_{\text{ip}}(p,r) = \text{Circ}(p',r')$ $(\subset D^2)$

Piano iperbolico: $H^2 \overset{\text{def}}{=\!=} D^2$ con la geometria iperbolica

Note: 1) $\forall R, \forall p \notin R$ $\exists$ infinite rette $S$ t.c. $p \in S$ e $R \cap S = \varnothing$
2) $H^2$ è illimitato rispetto a $d_{\text{ip}}$ (infatti $l_{\text{ip}}(R)$ infinita)
3) $H^2$ è omogeneo e isotropo rispetto ad $\operatorname{Isom} H^2$

Teorema di Jordan: vale per poligoni/poligonali in $H^2$
(ogni poligonale iperbolica è una curva in $E^2$)

$\Sigma_P = (n-2)\pi - A_P$ (con $A_P =$ area iperbolica del poligono $P$)
$n=3: A_T = \pi-\alpha-\beta-\gamma \rightsquigarrow \Sigma_T = \pi - A_T$ (integrazione)
$n \geq 4: P = P' \cup P'',\ P' \cap P'' = L \rightsquigarrow n = n'+n''-2 \rightsquigarrow$
$(n'-2)\pi - A_{P'} + (n''-2)\pi - A_{P''} = (n-2)\pi - A_P$

Conseguenza: $\operatorname{Sim} H^2 = \operatorname{Isom} H^2$ (angoli $\leftrightsquigarrow$ aree $\leftrightsquigarrow$ lunghezze)

$P$ poligono regolare iperbolico $\Rightarrow$ inscritto in $\text{Circ}_{\text{ip}}(p,r)$
$\rightsquigarrow P_n^{\text{ip}}(r)$ unico $n$-gono sferico regolare con raggio $r$
a meno di isometrie, infatti: $r \leftrightsquigarrow l_n(r) \leftrightsquigarrow \alpha_n(r)$
($l_n(r)$ crescente: $\lim_{r\to 0} l_n(r) = 0$ e $\lim_{r\to\infty} l_n(r) = \infty$
$\alpha_n(r)$ decrescente: $\lim_{r\to 0}\alpha_n(r) = \pi - 2\pi/n$ e $\lim_{r\to\infty}\alpha_n(r) = 0$)

Conseguenza: per $n \geq 3$ esistono infinite tassellazioni regolari di
$H^2$ in $n$-goni regolari (a meno di simil. = isom.)
(in $E^2$ ce n'è solo una per $n=3$ e una per $n=4$
in $S^2$ ce ne sono solo cinque $\leftrightsquigarrow$ solidi platonici:
tre per $n=3$, una per $n=4$, una per $n=5$)

Costruzioni con riga e compasso iperbolici:
$U_{\mathrm{ip}}$ unità di misura assoluta con $l_{\mathrm{ip}}(U_{\mathrm{ip}}) = k_{\mathrm{ip}}$ t.c. $\sinh k_{\mathrm{ip}} = 1$

$U_{\mathrm{ip}} \rightsquigarrow r\,U_{\mathrm{ip}} \iff \sinh k_{\mathrm{ip}}\, r \in K \quad (\text{con } r > 0)$
$U_{\mathrm{ip}} \rightsquigarrow \alpha \iff U \rightsquigarrow \alpha$ in $E^2$ $\quad (\sin\alpha \,/\, \sinh k_{\mathrm{ip}}\, a \;=\; \sin\beta \,/\, \sinh k_{\mathrm{ip}}\, b)$

$P_n^{\mathrm{ip}}(1)$ costruibile $\iff$ $P_n$ è costruibile in $E^2$
$(U_{\mathrm{ip}} \rightsquigarrow \text{angolo } \omega_n \Leftrightarrow U \rightsquigarrow \text{angolo } \omega_n)$

Nota: $U_{\mathrm{ip}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{ip}}(1) \Rightarrow U_{\mathrm{ip}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{ip}}(r)$ se $\sinh k_{\mathrm{ip}}\, r \in K$ (con $r > 0$)
ma $\not\Rightarrow r\,U_{\mathrm{ip}} \rightsquigarrow P_n^{\mathrm{ip}}(r)$ (costruzioni non simili come in $E^2$)

## Bibliografia

F. Enriques, *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari.*
E. Daniele, *Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare.*

M. Berger, *Geometry I* e *Geometry II*, Springer-Verlag 1987.
G.E. Martin, *The foundations of geometry and the non-euclidean plane*, Springer-Verlag 1986.
I. Stewart, *Galois theory*, Chapman & Hall 1989.
G. Zappa, *Gruppi, corpi, equazioni*, Feltrinelli.

W. Bishop, *How to construct a regular polygon*, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 186–188.
D.W. De Temple *Carlyle circles and the Lemoine simplicity of polygon constructions*, Amer. Math. Monthly (1991), 97–108.
W.C. Jagy, *Squaring Circles in the Hyperbolic Plane*, The Mathematical Intelligencer 17 (1995), 31–36.