

GEOMETRIA E TASSELLAZIONI

Riccardo Piergallini

1. Cos'è una tassellazione?

Prima di rispondere alla domanda con una definizione rigorosa, cerchiamo di capire quale sia il significato più ampio del termine “tassellazione” nel senso comune, e quindi di quali oggetti o fenomeni la corrispondente nozione matematica voglia proporsi come modello astratto.

Il sinonimo più diffuso di tassellazione è mosaico. La tecnica del mosaico consiste nel realizzare un'immagine (figure 1a e 1b) o una forma (figura 1c), mediante la giustapposizione di tessere colorate di vari materiali. Essa era già presente nelle civiltà dell'antica Mesopotamia ed è stata successivamente sviluppata dai Greci e soprattutto dai Romani, fino a raggiungere la massima affermazione in epoca bizantina. È stata comunque indipendentemente usata anche da altre civiltà, come per esempio quelle precolombiane in America.

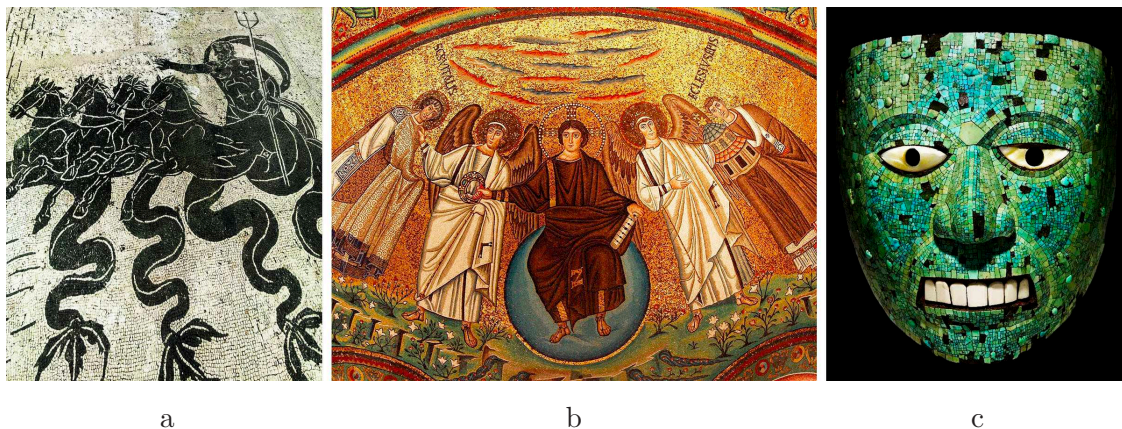


FIGURA 1. a) Pavimentazione delle terme romane di Supino (II sec.). b) Mosaico della basilica di San Vitale a Ravenna (VI sec.). c) Maschera atzeca del Dio del fuoco Xiuhtecuhtli (XV sec.).

All'inizio motivati principalmente da ragioni di carattere pratico, cioè intesi a conferire resistenza, durezza e impermeabilità alle superfici, i mosaici hanno poi acquisito anche altre valenze: estetiche, religiose e di rappresentazione del potere, soprattutto con l'uso di materiali preziosi.

I mosaici di maggiore interesse dal punto di vista matematico sono però quelli che realizzano motivi decorativi geometrici, piuttosto che esprimere contenuti figurativi. In questo caso infatti le forme e i colori delle tessere, così come la disposizione di queste nel mosaico, sono funzionali all'effetto complessivo che si vuole ottenere, e la loro scelta è quindi soggetta a vincoli derivanti dalle inevitabili relazioni matematiche tra le proprietà geometriche della struttura locale e quelle della struttura globale.

In effetti i motivi geometrici ripetuti, con vari gradi di regolarità e simmetria, sono universalmente presenti in tutte le civiltà a prescindere dalla tecnica realizzativa e hanno origini ancora più antiche degli stessi mosaici (figure 2a e 2b). Lo sviluppo di

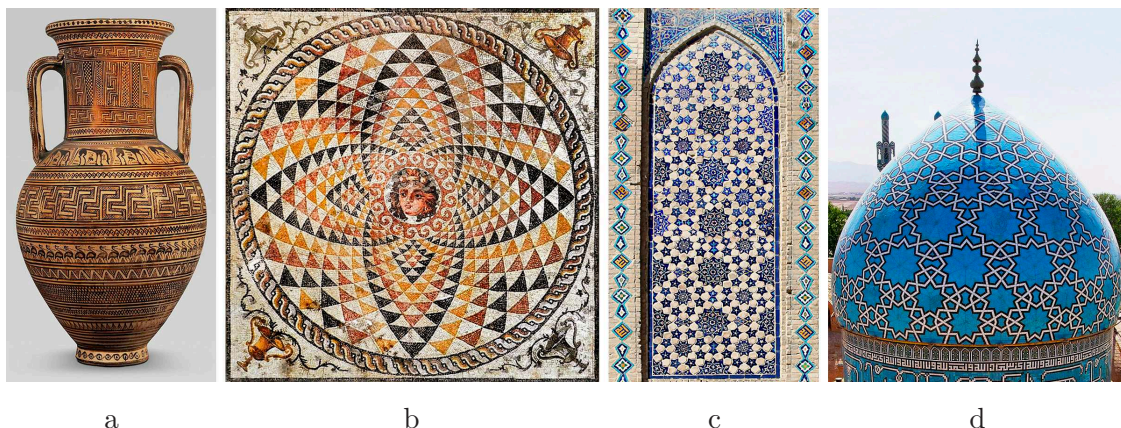


FIGURA 2. a) Anfora greca del periodo geometrico (VII sec. a.C.). b) Mosai-
co di Dioniso a Corinto (II sec.). c) Moschea di Bibi-Khanym a Samarcanda –
Uzbekistan (XIV sec.). d) Mausoleo dello Scià Nematollah Vali – Iran (XV sec.).

decorazioni geometriche più sofisticate si è avuto soprattutto nelle culture aniconiche, le cui religioni non ammettono la rappresentazione delle divinità o addirittura della stessa realtà, come in particolare l’islamismo, ma anche l’ebraismo, l’induismo e in passato il buddismo (figure 2c e 2d).

D’altra parte, come indica la stessa etimologia del termine, la “costruzione” di ogni genere di edificio, così come la realizzazione di molti manufatti o prodotti industriali, è stata in ogni epoca ed è tuttora basata sull’assemblaggio di moduli più o meno simili ripetuti secondo schemi più o meno regolari e simmetrici. L’evoluzione dei materiali e delle tecniche costruttive, ha consentito di edificare in forme sempre più varie. Gli schemi di assemblaggio dei moduli, dapprima più essenziali e fortemente vincolati da ragioni di statica (figure 3a e 3b), si sono quindi dovuti affinare per adattarsi a geometrie diverse (figure 3c e 3d).



FIGURA 3. a) Piramidi egizie di Giza (XXV sec. a.C.). b) Cattedrale di Santa
Maria del Fiore a Firenze (XIV sec.). c) Phoenix Media Center a Pechino (2014).
d) Padiglione del Kazakistan all’Expo di Astana (2017).

Strutture derivanti dalla combinazione di moduli elementari ripetuti secondo schemi regolari sono molto diffuse anche in ambito biologico, per esempio nei tessuti cellulari (figure 4a e 4b) e nelle colonie di organismi viventi, anche in relazione a

dinamiche di accrescimento per accumulo. Quelle che hanno suscitato più interesse nei matematici per la loro regolarità sono però di natura diversa: la struttura esagonale dei favi delle api (figura 4c), che già Pappo di Alessandria nel IV secolo aveva congetturato essere ottimale, come poi dimostrato solo nel 1999 da Thomas Hales, e le spirali incrociate formate dai fiori di girasole (figura 4d), il cui modello matematico coinvolge la successione di Fibonacci e la sezione aurea.

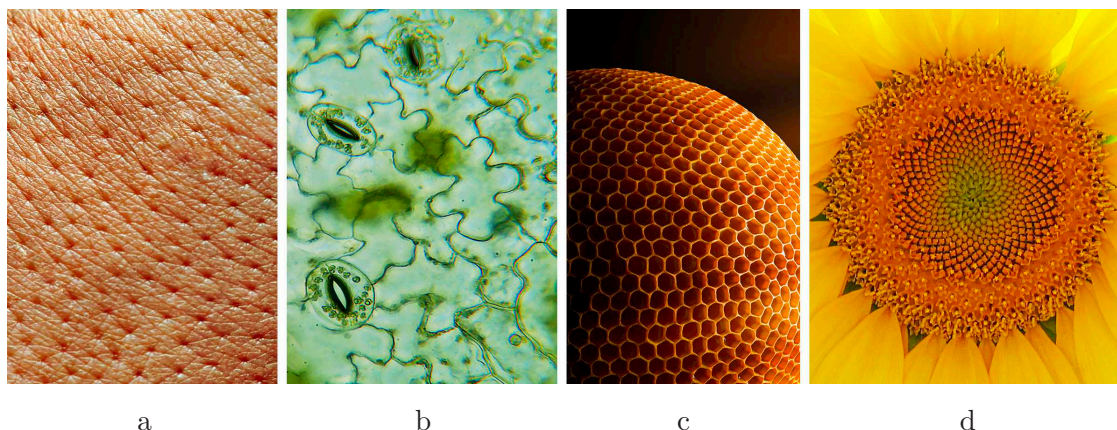


FIGURA 4. a) Tessuto epiteliale. b) Foglia di geranio. c) Favo. d) Fiori di girasole.

Nel primo caso si tratta di una vera e propria costruzione del favo mediante celle esagonali nel senso detto sopra, mentre nel secondo caso si tratta di una disposizione regolare e ottimale dei fiori nello spazio disponibile, che possiamo astrattamente pensare come una configurazione di punti. Le due situazioni seppur diverse sono strettamente correlate.

L'esistenza di tale correlazione si può intuire più facilmente nei cristalli, le cui forme geometriche riflettono le proprietà di regolarità e simmetria delle configurazioni di punti rappresentanti i singoli atomi. Solo in casi molto particolari ciò dà luogo a vere e proprie tassellazioni visibili ad occhio nudo (figure 5a e 5b). In genere solo la forma globale dei singoli cristalli è visibile (figure 5c e 5d), mentre la struttura a mosaico si manifesta a livello microscopico al loro interno (il modo in cui i diversi

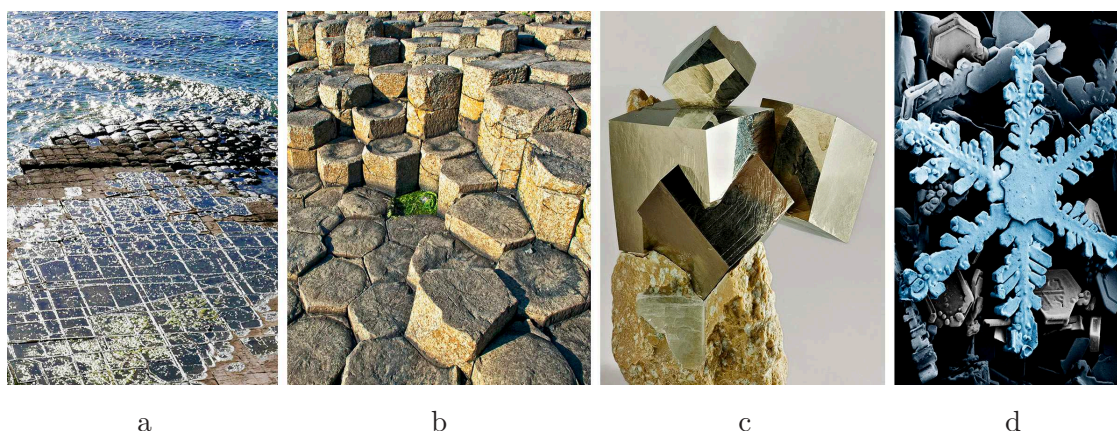


FIGURA 5. a) Pavimentazione naturale – Tasmania. b) Selciato del gigante – Irlanda. c) Cristalli di Pirite. d) Fiocco di neve.

cristalli si compenetrano in figura 5c, fa pensare come anche il caso più banale della tassellazione cubica dello spazio possa nascondere proprietà inaspettate).

Infatti, a parte il lavoro antesignano di Keplero sulle tassellazioni del piano in poligoni regolari, che risale al 1619, lo studio sistematico delle tassellazioni dal punto di vista matematico ha avuto inizio nella seconda metà del XIX secolo proprio con i lavori dei cristallografi Auguste Bravais e Evgraf Fedorov, che hanno descritto tutti i possibili reticoli cristallini bi- e tri-dimensionali, classificandoli in base alle loro proprietà di simmetria.

Da allora le tassellazioni sono state studiate anche come enti matematici astratti, con tutta la libertà di immaginazione che ciò consente. In particolare, sono state considerate tassellazioni non periodiche, la più celebre quella con simmetria pentagonale introdotta negli anni 70 da Roger Penrose (figura 6a), facendo cadere l'assunto principale della periodicità su cui si basavano gli studi cristallografici.

Come spesso avviene, successivamente si è potuto invertire il percorso, tornando dall'astrazione alla realtà. Nel 1984 il fisico Dan Shechtman ha osservato per la prima volta dei quasi-cristalli (figura 6b) con una struttura alla Penrose, scoperta che dopo essere stata inizialmente accolta con molto scetticismo gli ha poi valso il premio Nobel per la chimica nel 2011. D'altra parte la tecnologia ci consente oggi di realizzare cristalli progettati "a tavolino", come quelli di grafene che rendono effettiva l'idea di reticolo cristallino bi-dimensionale (figura 6c) o quelli di ghiaccio con reticolo quadrato invece che esagonale (figura 6d).

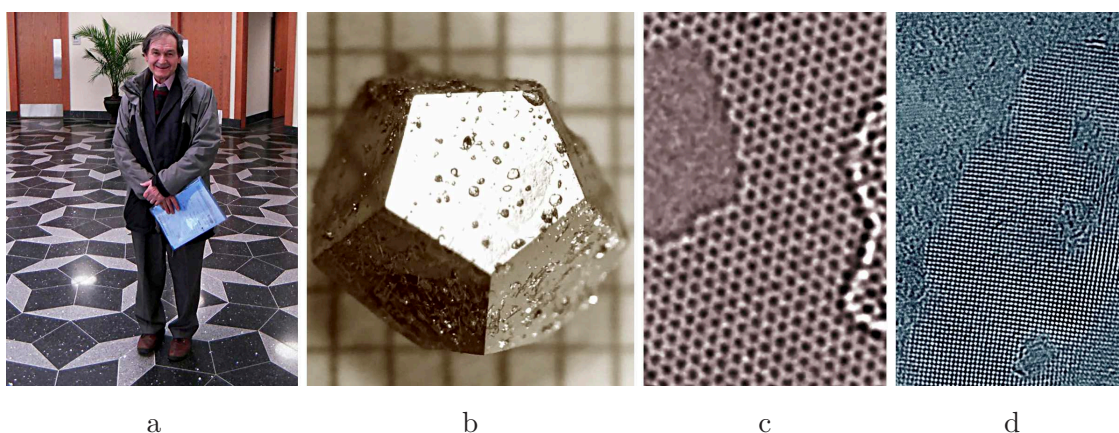


FIGURA 6. a) Penrose e la sua tassellazione. b) Quasi-cristallo trovato in un frammento di meteorite in Siberia. c) Singolo strato di grafene. d) Ghiaccio con reticolo quadrato.

A questo punto diamo una definizione rigorosa di tassellazione, che sia abbastanza generale da rappresentare un modello matematico utilizzabile in tutte le situazioni considerate sopra, riferibili al termine "tassellazione" nella sua accezione comune.

Dobbiamo innanzitutto scegliere una "geometria" nella quale lavorare. Adottando il punto di vista di Klein, questa può essere specificata come un insieme \mathcal{S} , il nostro spazio, con un gruppo di trasformazioni \mathcal{G} di \mathcal{S} (in se stesso).

Per esempio possiamo considerare la geometria euclidea, costituita dal piano \mathcal{S} con il gruppo \mathcal{G} delle isometrie euclidee (o congruenze). Ma possiamo anche considerare

sullo stesso piano \mathcal{S} un diverso gruppo \mathcal{G} , come quelli più grandi delle similitudini o delle affinità, o quelli più piccoli delle isometrie positive (quelle realizzabili con famiglie continue di movimenti rigidi, che rispettano le orientazioni) o delle traslazioni. Oppure possiamo considerare la *geometria sferica*, cioè la sfera con il suo gruppo di isometrie, o la *geometria iperbolica*, cioè il disco di Poincaré con le sue isometrie.

Dobbiamo inoltre scegliere un insieme \mathcal{P} di sottoinsiemi di \mathcal{S} , i *prototipi* per i nostri tasselli. Assumendo per fissare le idee di lavorare nella geometria euclidea, \mathcal{P} può consistere di un solo elemento, per esempio il triangolo equilatero di lato unitario o il quadrato di lato unitario, se vogliamo che tutti i tasselli siano dello stesso tipo. Oppure \mathcal{P} può includere diversi prototipi: un numero finito, per esempio il triangolo equilatero e il quadrato di lati unitari; un'infinità numerabile, per esempio tutti i poligoni regolari di lati unitari; o addirittura un'infinità non numerabile, per esempio tutti i triangoli o tutti i poligoni regolari.

Nel seguito ci limitiamo a considerare *geometrie bidimensionali*, cioè geometrie nelle quali \mathcal{S} è il piano o un'altra superficie, e tassellazioni di *insiemi poligonali* $X \subset \mathcal{S}$ chiusi, connessi e senza buchi, eventualmente illimitati (incluso \mathcal{S} stesso), con prototipi e *tasselli poligonali* limitati, chiusi connessi e senza buchi. Con insieme poligonale intendiamo un insieme il cui bordo sia formato da poligonali semplici disgiunte eventualmente illimitate, una sola chiusa (e limitata) nel caso dei tasselli.

DEFINIZIONE DI TASSELLAZIONE. Dato un insieme $X \subset \mathcal{S}$, una *tassellazione* di X (nella geometria della superficie \mathcal{S} con il gruppo \mathcal{G}) di *tipo* \mathcal{P} è un insieme localmente finito (quindi finito o numerabile) \mathcal{T} di *tasselli* (poligonali) con le seguenti proprietà:

- 1) l'unione di tutti i tasselli è X ;
- 2) tasselli distinti hanno interni disgiunti;
- 3) per ogni tassello $T \in \mathcal{T}$ esistono $P \in \mathcal{P}$ e $g \in \mathcal{G}$ tali che $T = g(P)$.

Inoltre, diciamo che \mathcal{T} è una *tassellazione propria* se soddisfa anche la seguente proprietà (che include la proprietà 2):

- 4) tasselli distinti possono incontrarsi solo nell'unione di vertici o lati comuni.

Notiamo che per una tassellazione propria \mathcal{T} di X ha senso parlare del *grafo associato* $G_{\mathcal{T}} \subset X$, costituito dai *vertici e lati della tassellazione* \mathcal{T} , cioè di tutti i tasselli di \mathcal{T} . In tal caso, il bordo di ogni tassello è costituito da un circuito di spigoli di $G_{\mathcal{T}}$, mentre il suo interno è una delle componenti del complementare di $G_{\mathcal{T}}$ in X . Inoltre, ciascuno spigolo di $G_{\mathcal{T}}$ è lato di un solo tassello se è contenuto nel bordo di X , mentre è lato comune di esattamente due tasselli altrimenti.

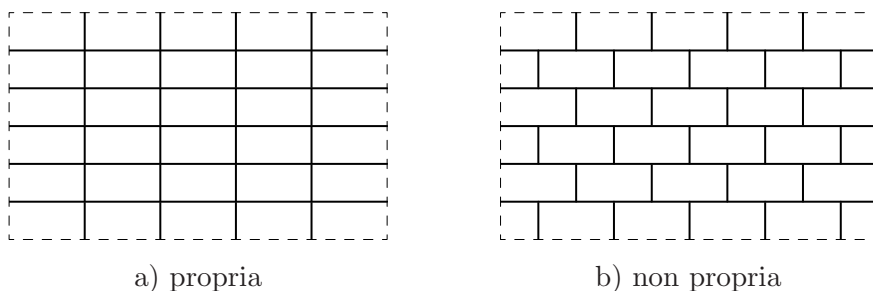


FIGURA 7. Tassellazioni del piano euclideo in rettangoli.

In effetti, il grafo associato $G_{\mathcal{T}}$ può essere definito anche nel caso in cui \mathcal{T} non sia propria, a condizione però di suddividere i lati dei tasselli in modo da ottenere una tassellazione propria (per esempio nella tassellazione in figura 7b i tasselli devono essere considerati come esagoni degeneri).

PROBLEMA FONDAMENTALE. Determinare l'esistenza e in caso affermativo la classificazione delle tassellazioni di un dato insieme $X \subset \mathcal{S}$ con tasselli di un dato tipo \mathcal{P} , soddisfacenti certe proprietà a livello locale, dei tasselli e di come sono giustapposti, e/o a livello globale, soprattutto proprietà di simmetria.

Le proprietà di simmetria globale di una tassellazione \mathcal{T} sono codificate nel gruppo di trasformazioni geometriche $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{G}$ che lasciano la tassellazione invariata nel senso della seguente definizione.

DEFINIZIONE DI GRUPPO DI SIMMETRIA. Dato un insieme $X \subset \mathcal{S}$ (nella geometria della superficie \mathcal{S} con il gruppo \mathcal{G}), denotiamo con $\mathcal{G}_X \subset \mathcal{G}$ il *gruppo di simmetria* di X , formato dalle trasformazioni geometriche $g \in \mathcal{G}$ tali che $g(X) = X$.

In particolare, a ogni tassello $T \in \mathcal{T}$ è associato il gruppo di simmetria $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}$, isomorfo al gruppo di simmetria $\mathcal{G}_P \subset \mathcal{G}$ del corrispondente prototipo $P \in \mathcal{P}$ (se $T = g(P)$ allora $\mathcal{G}_T = g \circ \mathcal{G}_P \circ g^{-1}$, quindi \mathcal{G}_T e \mathcal{G}_P sono sottogruppi coniugati di \mathcal{G}). Analogamente, data una tassellazione \mathcal{T} di X , denotiamo con $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{G}_X$ il *gruppo di simmetria* di \mathcal{T} , formato dalle trasformazioni geometriche $g \in \mathcal{G}_X$ per le quali si ha $g(\mathcal{T}) = \{g(T) \mid T \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$ (dove la prima uguaglianza è una definizione).

Nel caso speciale di una tassellazione \mathcal{T} del piano euclideo, diciamo che \mathcal{T} è *2-periodica*, o anche solamente *periodica*, se $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ contiene traslazioni in due direzioni diverse, *1-periodica* se $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ contiene traslazioni in una sola direzione, *non periodica* se $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ non contiene traslazioni (vedi figura 8).

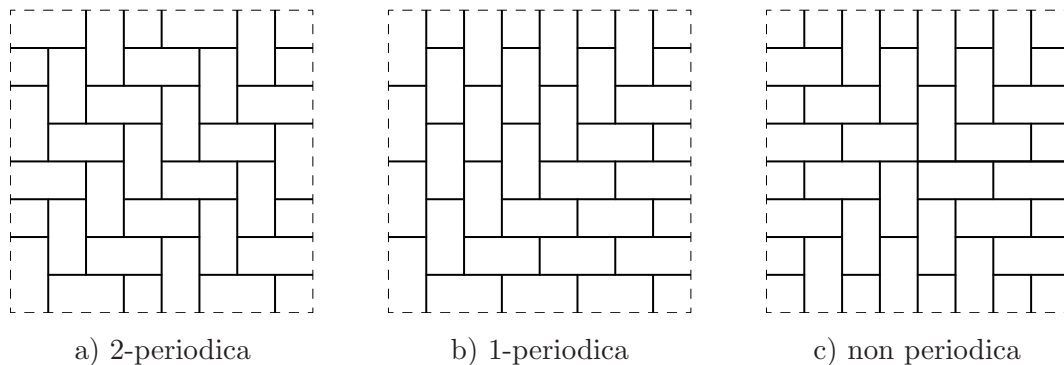


FIGURA 8. Tassellazioni del piano euclideo in rettangoli.

ESERCIZIO 1. Verificare che le tassellazioni in figura 8 hanno effettivamente il tipo di periodicità dichiarata.

I gruppi di simmetria \mathcal{G}_T dei tasselli $T \in \mathcal{T}$ e il modo in cui questi sono giustapposti impongono vincoli sul gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ dell'intera tassellazione \mathcal{T} . Essenziale per affrontare il problema enunciato sopra è proprio lo studio di questi vincoli.

Spesso è utile considerare i prototipi, e quindi i tasselli, colorati con diversi colori e/o decorati con figure, ammettendo anche la possibilità che ci siano più prototipi con la stessa forma ma diversi per colore e/o decorazione. Ciò consente non solo di

conferire alla tassellazione un piacevole effetto estetico, ma anche di modificarne la struttura matematica e in particolare i gruppi di simmetria coinvolti.

Apparentemente, l'uso dei colori (e a maggior ragione delle decorazioni) rappresenta un arricchimento sostanziale della struttura di una tassellazione. Basti pensare alle immagini digitali su uno schermo, moderni mosaici la cui caratteristica principale non è la durevolezza, come per quelli antichi, ma al contrario l'evanescenza che ne consente la continua variazione nel tempo. Queste sono tutte costituite dalla stessa tassellazione in pixel quadrati opportunamente colorati, cioè l'informazione è interamente codificata nei colori!

In effetti i colori, pur non influenzando i gruppi di simmetria dei prototipi e quindi dei singoli tasselli (che restano gli stessi indipendentemente dal colore di questi), restringono il gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ di una tassellazione colorata \mathcal{T} alle trasformazioni che preservano sia la tassellazione che i colori, cioè trasformano ciascun tassello in un tassello dello stesso colore. Per esempio, il gruppo di simmetria della tassellazione in figura 9a contiene le riflessioni rispetto alle rette orizzontale e verticale passanti per il centro, e le rotazioni di $\pm\pi/2$ e π radianti intorno al centro. Di queste solo l'ultima rotazione appartiene al gruppo di simmetria della tassellazione 2-colorata in figura 9b, mentre nessuna appartiene al gruppo di simmetria della tassellazione 3-colorata in figura 9c.

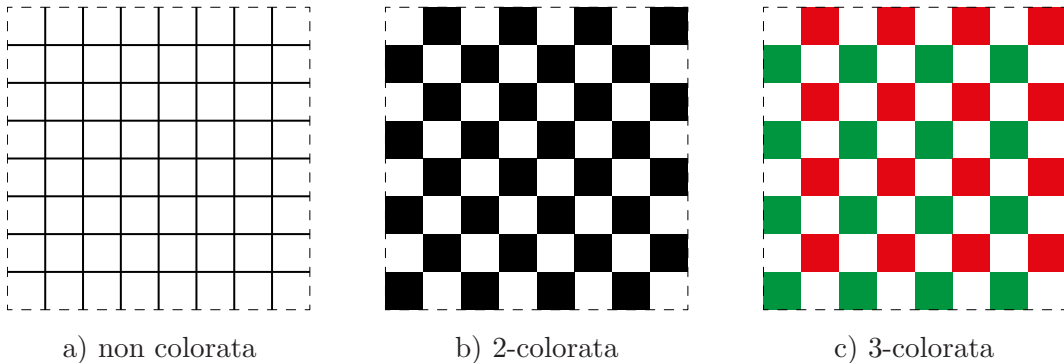


FIGURA 9. Tassellazione del piano euclideo in quadrati.

Un discorso analogo vale per le decorazioni, salvo che in questo caso anche i gruppi di simmetria dei prototipi e dei singoli tasselli risultano modificati. Infatti, se un prototipo $P \in \mathcal{P}$ è decorato con una figura F , allora anche il suo gruppo di simmetria \mathcal{G}_P è ridotto alle trasformazioni $g \in \mathcal{G}$ che preservano sia il prototipo che la figura, cioè tali che $g(P) = P$ e $g(F) = F$. Lo stesso vale per i gruppi di simmetria \mathcal{G}_T dei tasselli $T \in \mathcal{T}$ e anche per il gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ dell'intera tassellazione, il quale si riduce alle trasformazioni che conservano sia la tassellazione che la figura complessiva su di essa risultante.

Inoltre, sia i colori che le decorazioni possono essere usati per imporre condizioni di adiacenza sui tasselli, di solito richiedendo che tasselli adiacenti nella tassellazione abbiano colori diversi nel primo caso, o figure che si raccordino con coerenza (siano estensioni coerenti le une delle altre) nel secondo caso.

Nonostante ciò, dal punto di vista concettuale, non certo dal punto di vista della comprensibilità visiva, l'uso dei colori e delle decorazioni può essere sostituito con

opportune decomposizioni dei prototipi e dei tasselli, così come le condizioni di adiacenza che ne derivano possono essere sostituite con opportune variazioni lungo i lati dei prototipi e dei tasselli (in questo caso anche l'insieme X , se diverso dall'intera superficie \mathcal{S} , va opportunamente modificando lungo il bordo in funzione della tassellazione). Questo può essere fatto in modo che le tassellazioni possibili con i prototipi colorati/decorati corrispondano biunivocamente a quelle possibili con i nuovi prototipi non colorati/decorati, e tassellazioni corrispondenti abbiano gli stessi gruppi di simmetria.

In figura 10a è indicato come sostituire tasselli quadrati con due possibili colori senza alcuna condizione di adiacenza (qui si usano tre prototipi non colorati al posto dei due colorati), mentre in figura 10b è indicata una sostituzione tale che tasselli adiacenti siano forzati ad avere colori diversi. L'estensione a tasselli di altre forme e due soli colori è immediata, mentre non lo è l'estensione al caso di più colori.

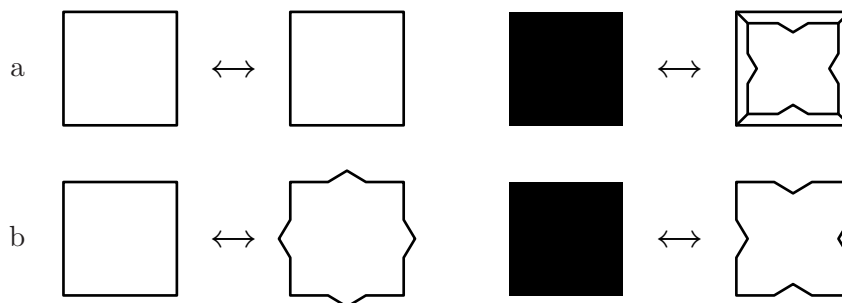


FIGURA 10. Sostituzioni dei tasselli quadrati con due colori: a) senza condizione di adiacenza, b) con condizione di adiacenza di tasselli con colori diversi.

ESERCIZIO 2. Determinare codifiche analoghe a quelle illustrate in figura 10 per rappresentare tasselli quadrati con tre possibili colori, senza alcuna condizione di adiacenza (una soluzione consiste di 5 prototipi), e con la condizione che tasselli adiacenti abbiano colori diversi, come nell'esempio di figura 9c (una soluzione consiste di 6 prototipi).

D'altra parte, variazioni “lungo i lati” dei blocchi vengono spesso utilizzate in pratica nelle pavimentazioni a secco, per forzarne la posa secondo uno schema prestabilito, per garantire che tutti blocchi siano posati con la stessa faccia verso l'alto, impedendo il capovolgimento di singoli blocchi, e per conferire stabilità all'intera pavimentazione, impedendo lo scorrimento dei blocchi (vedi figura 11).

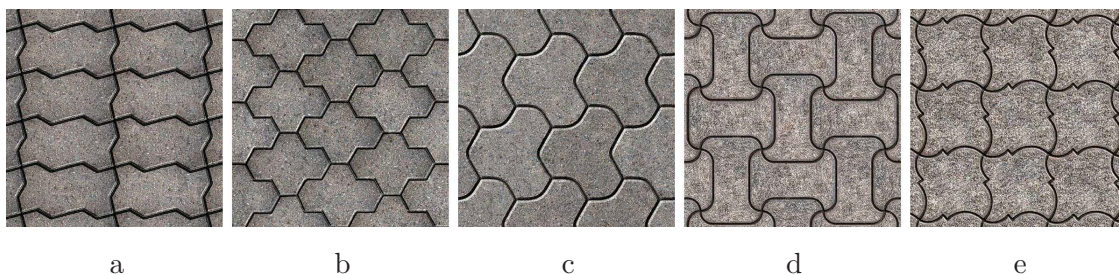


FIGURA 11. Esempi di pavimentazioni a secco.

ESERCIZIO 3. Per ciascuna delle pavimentazioni in figura 11, determinare il gruppo di simmetria dei blocchi e stabilire in quali casi lo schema di posa è univocamente determinato (a meno di movimenti rigidi) e in quali casi è effettivamente impedito il capovolgimento di singoli blocchi.

Una tecnica simile consente di sostituire prototipi e tasselli decorati, e le condizioni di adiacenza derivanti dalle decorazioni, con opportune decomposizioni dei prototipi e/o variazioni lungo i lati degli stessi. Ma, a differenza di quanto avviene per i colori, qui si deve tenere conto anche della riduzione dei gruppi di simmetria dei prototipi. Anche in questo caso il numero dei prototipi necessari può essere diverso da quello dei prototipi iniziali.

Una procedura più diretta, è illustrata in figura 12 nel caso semplice di un unico prototipo quadrato decorato in modo da ridurre il gruppo di simmetria alla sola identità. Si parte con un prototipo quadrato decorato, si ricostruisce per estensione coerente un modulo (minimale) completo della figura, e quindi si considera come nuovo prototipo un poligono che approssima la forma risultante e ha lo stesso gruppo di simmetria. A questo punto la decorazione può essere eliminata, o al più ridotta a una semplice marcatura, esprimibile anche mediante decomposizione come detto sopra, per codificare eventuali asimmetrie presenti all'interno della figura che non abbiano riscontro nella forma del prototipo. Naturalmente, il caso generale di più prototipi e/o più decorazioni su ciascun prototipo è più complesso, ma può essere trattato in modo sostanzialmente analogo.

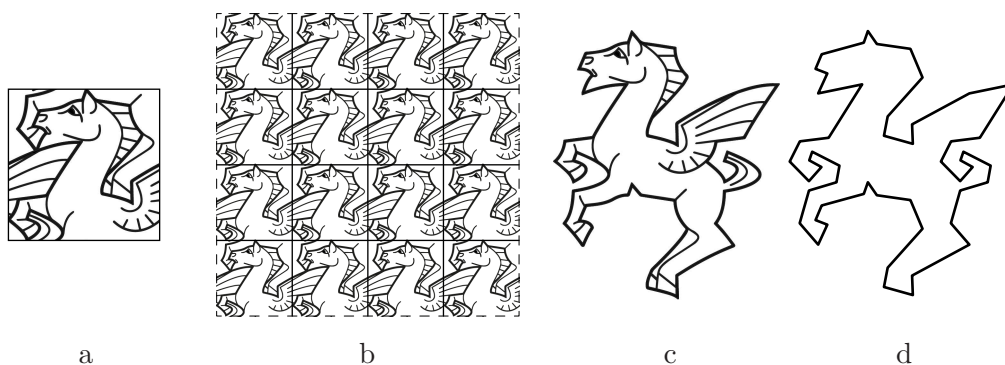


FIGURA 12. a) Prototipo quadrato decorato. b) Tassellazione del piano euclideo che rispetta la decorazione. c) Figura ricostruita per estensione coerente (Pegasus di Escher). d) Prototipo poligonale associato alla decorazione.

L'esercizio che segue e la figura 13 si riferiscono all'ultimo passo della procedura appena descritta in un esempio più elaborato, tratto anche questo da un lavoro di Escher. Qui si parte con dodici moduli elementari che formano la decorazione, per ottenere una tassellazione del piano euclideo prima in poligoni complessi, e poi in rettangoli opportunamente marcati per non introdurre nuove simmetrie nella semplificazione. Come vedremo più avanti, la possibilità di semplificare così drasticamente la tassellazione senza modificarne il gruppo di simmetria non è un caso fortunato, ma è invece conseguenza diretta di un teorema generale di classificazione.

ESERCIZIO 4. Verificare che i prototipi in figura 13a consentono di tassellare il piano euclideo in modo unico a meno di isometrie (indipendentemente dalla decorazione),

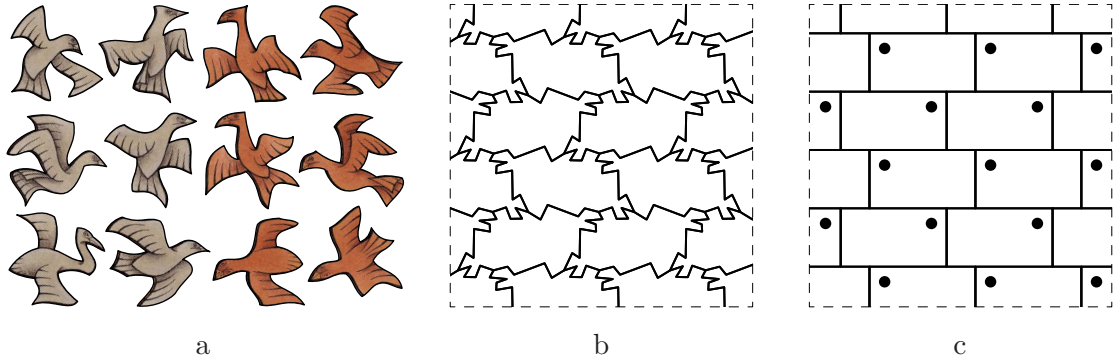


FIGURA 13. a) Moduli del disegno “Twelve birds” di Escher, che possono anche essere pensati come prototipi decorati curvilinei per una tassellazione del piano euclideo. b) Tassellazione con un unico prototipo poligonale approssimante l’unione di dodici moduli adiacenti. c) Tassellazione in rettangoli marcati avente lo stesso gruppo di simmetria.

e che i tasselli della tassellazione si possono raggruppare a gruppi di dodici ottenendo per approssimazione poligonale la tassellazione in figura 13b. Verificare inoltre che il gruppo di simmetria di tali tassellazioni coincide con quello della tassellazione (non propria) in rettangoli marcati in figura 13c, e che la marcatura sarebbe necessaria anche per la ovvia tassellazione propria in parallelogrammi più simile a quella in figura 13b.

Concludiamo questa parte introduttiva discutendo la relazione tra le tassellazioni di $X \subset \mathcal{S}$ e le configurazioni discrete in X , cui abbiamo già accennato in precedenza. Un sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ è detto *configurazione discreta* se è chiuso e tutti i suoi punti sono isolati, o equivalentemente se è localmente finito in \mathcal{S} (così come richiesto nella definizione di tassellazione per l’insieme dei tasselli).

Sebbene la relazione valga in un contesto più generale, limitiamo il nostro discorso alle *tassellazioni poligonali convesse del piano euclideo*. In tal caso, diciamo che un sottoinsieme \mathcal{C} del piano euclideo è una *configurazione ammissibile* se contiene almeno tre punti non allineati.

La configurazione discreta più immediatamente associabile a una tassellazione poligonale convessa \mathcal{T} del piano euclideo è costituita dai suoi vertici, cioè dai vertici del grafo planare $G_{\mathcal{T}}$. Questa configurazione presenta però due problemi: 1) da sola, senza le informazioni derivanti dagli spigoli del grafo $G_{\mathcal{T}}$, non basta a determinare la tassellazione, cioè tassellazioni diverse possono avere la stessa configurazione di vertici (per esempio le tassellazioni nelle figure 8 e 9a); 2) non è in corrispondenza biunivoca con i tasselli della tassellazione.

Volendo associare un singolo punto $c(T)$ a ogni tassello $T \in \mathcal{T}$, in modo che il gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ della configurazione $\mathcal{C} = \{c(T) \mid T \in \mathcal{T}\}$ sia in una qualche relazione con il gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ della tassellazione, la scelta naturale per $c(T)$ è rappresentata dal baricentro di T , o più semplicemente dal baricentro dell’insieme dei vertici di T (i due baricentri coincidono per i triangoli, ma non in generale). Infatti, per entrambe le scelte \mathcal{C} è una configurazione discreta ammissibile (verificare), per la quale vale l’inclusione $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{C}}$. Per avere l’uguaglianza può essere invece necessario

ed è sufficiente decorare i punti di \mathcal{C} in modo da rappresentare eventuali asimmetrie dei corrispondenti tasselli non rilevate da $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$, riducendo così quest'ultimo a $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$.

ESERCIZIO 5. Provare che i due baricentri menzionati sopra possono effettivamente differire e fornire per entrambi un procedimento di calcolo a partire dai vertici del poligono. Dimostrare che vale l'inclusione $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ per entrambe le scelte dei punti $c(T)$. Costruire una tassellazione poligonale convessa del piano euclideo per la quale si abbia $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \neq \mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ e sia quindi necessario il ricorso alle decorazioni.

I punti di \mathcal{C} possono essere considerati come vertici di un nuovo grafo $G_{\mathcal{T}'}$ associato a una tassellazione poligonale (non necessariamente convessa) \mathcal{T}' , che è chiamata *tassellazione duale* di \mathcal{T} . Gli spigoli di $G_{\mathcal{T}'}$ congiungono le coppie di vertici corrispondenti a tasselli adiacenti di \mathcal{T} con una spezzata formata da due segmenti con il vertice intermedio nel lato comune ai due tasselli (verificare che effettivamente ciò dà luogo a una tassellazione poligonale \mathcal{T}' non necessariamente convessa). Così come i tasselli di \mathcal{T} corrispondono biunivocamente ai vertici di $G_{\mathcal{T}'}$, i tasselli della tassellazione duale \mathcal{T}' corrispondono biunivocamente ai vertici di $G_{\mathcal{T}}$, mentre gli spigoli dei grafi $G_{\mathcal{T}'}$ e $G_{\mathcal{T}}$ si corrispondono biunivocamente tra loro.

Nella figura 14 sono mostrati esempi di tassellazioni duali (qui gli spigoli di $G_{\mathcal{T}'}$ sono segmenti, il che non è sempre possibile). La tassellazione in figura 14a è autoduale, cioè in questo caso il grafo $G_{\mathcal{T}'}$ è equivalente a $G_{\mathcal{T}}$, mentre le tassellazioni nelle figure 14b e 14c suggeriscono l'equivalenza, valida in generale, tra i grafi $G_{\mathcal{T}''}$ e $G_{\mathcal{T}}$.

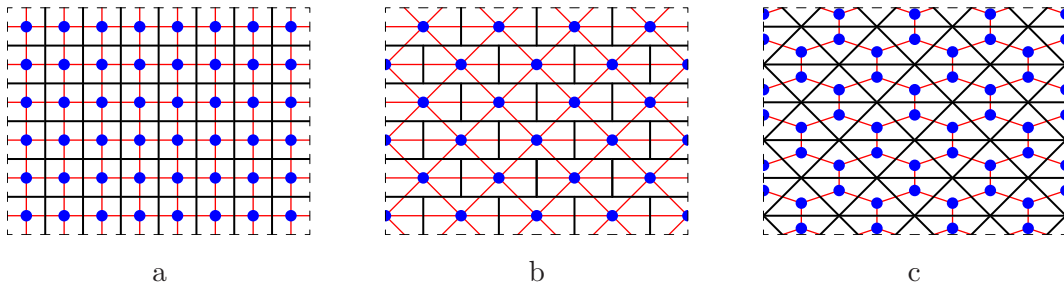


FIGURA 14. Configurazioni dei punti \mathcal{C} (in blu) associate a tre tassellazioni \mathcal{T} (in nero) e le corrispondenti tassellazioni duali \mathcal{T}' (in rosso).

Analogamente a quanto visto per le tassellazioni, anche le eventuali decorazioni dei punti della configurazione discreta ammissibile \mathcal{C} si possono sostituire con gruppi di punti, per ottenere una nuova configurazione discreta ammissibile non decorata con lo stesso gruppo di simmetria. Ovviamente così facendo si perde però la corrispondenza biunivoca con la tassellazione \mathcal{T} .

Abbiamo visto come associare a ogni tassellazione poligonale convessa del piano euclideo \mathcal{T} una configurazione discreta ammissibile $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{T})$. Viceversa, vediamo ora come associare a ogni configurazione discreta ammissibile \mathcal{C} nel piano euclideo una tassellazione poligonale convessa $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Data una configurazione discreta ammissibile \mathcal{C} , per ogni punto $c \in \mathcal{C}$ consideriamo l'insieme $V(c)$, chiamato *cella di Voronoi* di c , formato dai punti p del piano tali che $d(p, c) \leq d(p, c')$ per ogni $c' \in \mathcal{C}$, cioè i punti per i quali c è un punto di \mathcal{C} a distanza minima. Allora la famiglia $\mathcal{V} = \{V(c) \mid c \in \mathcal{C}\}$, chiamata *decomposizione di Voronoi*

associata a \mathcal{C} , è una decomposizione poligonale convessa del piano che soddisfa tutte le proprietà di una tassellazione eccetto il fatto che qualche cella $V(c)$ potrebbe essere illimitata (verificare). In tal caso, è comunque sempre possibile suddividere ogni cella illimitata in tasselli poligonali convessi (limitati), in modo da ottenere una tassellazione \mathcal{T} , avente lo stesso gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \mathcal{G}_{\mathcal{V}}$ (verificare, usando il fatto che una cella illimitata può avere come unica simmetria non banale una riflessione). Chiamiamo la tassellazione risultante \mathcal{T} una *tassellazione di Voronoi* associata a \mathcal{C} . Questa è univocamente determinata solo quando coincide con \mathcal{V} , in quanto le celle illimitate ammettono suddivisioni diverse. In generale il gruppo di simmetria della tassellazione \mathcal{T} soddisfa l'inclusione $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, mentre per avere l'uguaglianza può essere necessario ed è sufficiente decorare i tasselli di \mathcal{T} .

Le tassellazioni di Voronoi associate alle configurazioni discrete di punti ottenute in figura 14 sono mostrate in figura 15. Confrontando le due figure si vede che non sempre le due costruzioni sono una l'inversa dell'altra (come nel caso a), infatti può accadere che $\mathcal{T}(\mathcal{C}(\mathcal{T})) \neq \mathcal{T}$ (come nei casi b e c) anche quando la prima tassellazione è univocamente determinata.

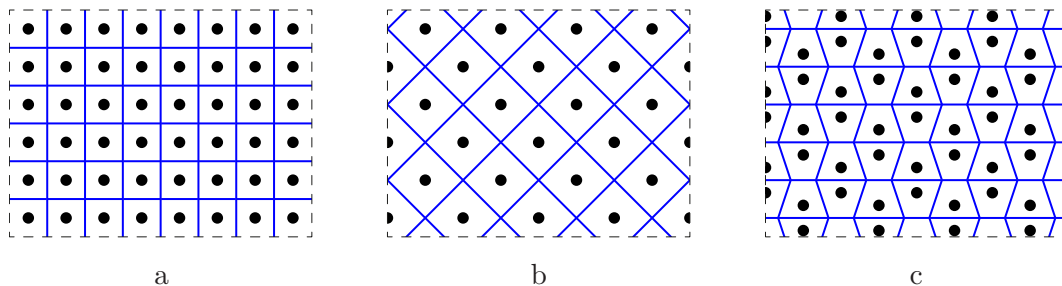


FIGURA 15. Le tre configurazioni di punti \mathcal{C} (in nero) ottenute in figura 14 e le corrispondenti tassellazioni di Voronoi \mathcal{T} (in blu).

ESERCIZIO 6. Provare con un esempio che si può verificare pure la disuguaglianza $\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathcal{C})) \neq \mathcal{C}$, anche quando $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ è univocamente determinata. Dimostrare che in generale vale l'inclusione $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ e costruire una configurazione discreta ammissibile \mathcal{C} per la quale si abbia $\mathcal{G}_{\mathcal{C}} \neq \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ e sia quindi necessario il ricorso alle decorazioni.

Quanto detto finora dimostra la prima parte del seguente teorema, che asserisce l'equivalenza, nel piano euclideo, tra le tassellazioni poligonali convesse e le configurazioni discrete ammissibili, almeno dal punto di vista dei loro gruppi di simmetria.

TEOREMA DI EQUIVALENZA. I gruppi di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ delle tassellazioni poligonali convesse \mathcal{T} del piano euclideo coincidono con i gruppi di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ delle configurazioni discrete ammissibili \mathcal{C} nello stesso piano euclideo. Infatti, tali gruppi coincidono con i *sottogruppi discreti* del gruppo \mathcal{G} delle isometrie del piano euclideo, cioè i sottogruppi $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ per i quali l'orbita $\mathcal{H}(p) = \{h(p) \mid h \in \mathcal{H}\}$ di ogni punto p è un sottoinsieme discreto del piano.

Dimostrazione. Resta da dimostrare solo la seconda parte del teorema. Per farlo usiamo il fatto che un sottoinsieme X del piano euclideo è discreto se e solo se ogni suo sottoinsieme limitato è finito (verificare).

Sia $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ il gruppo di simmetria di una configurazione discreta ammissibile \mathcal{C} . Supponiamo per assurdo che $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ non sia un sottogruppo discreto di \mathcal{G} . Allora de-

ve esistere un punto p del piano la cui orbita $\mathcal{G}_C(p)$ contiene un insieme infinito limitato $X = \{g_n(p)\}_{n \geq 1}$ con $g_n \in \mathcal{G}_C$ per ogni $n \geq 1$. Scelti tre punti non allineati $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{C}$ (che esistono essendo \mathcal{C} ammissibile), si ha che l'insieme $X_i = \{g_n(c_i)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$ è anch'esso limitato (i suoi punti distano al più $d(c_i, p)$ da X) e quindi finito, in quanto contenuto in \mathcal{C} discreto. Tenendo conto che ogni trasformazione g_n è univocamente determinata dai punti $g_n(c_1), g_n(c_2)$ e $g_n(c_3)$, ne segue che l'insieme $\{g_n\}_{n \geq 1}$ è finito, perciò anche l'insieme X dovrebbe esserlo, in contrasto con l'assunzione fatta all'inizio.

Viceversa, dato un qualunque sottogruppo discreto $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, dobbiamo costruire una configurazione discreta ammissibile \mathcal{C} tale che $\mathcal{G}_C = \mathcal{H}$. Proviamo innanzi tutto che \mathcal{H} è numerabile. Infatti, fissati tre punti non allineati p_1, p_2, p_3 , si ha che gli insiemi $X_i = \mathcal{H}(p_i)$ sono numerabili, in quanto discreti (verificare). Quindi, essendo ogni trasformazione $h \in \mathcal{H}$ univocamente determinata dai punti $h(p_1), h(p_2)$ e $h(p_3)$, ne segue che anche \mathcal{H} è numerabile.

Per ogni $h \in \mathcal{H}$ diversa dall'identità, l'insieme dei punti fissi di h è vuoto o un punto o una retta. Poiché una famiglia numerabile di punti e rette non può ricoprire tutto il piano, possiamo considerare un punto p_1 del piano che ha gruppo di isotropia $\mathcal{H}_{p_1} = \{h \in \mathcal{H} \mid h(p_1) = p_1\}$ banale, cioè contenente la sola identità. Poiché $\mathcal{H}(p_1)$ è discreto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $d(p_1, h(p_1)) > \varepsilon$ per ogni $h \in \mathcal{H} - \{\text{id}\}$. Siano ora p_2 e p_3 altri due punti che formano insieme a p_1 un triangolo scaleno con lati di lunghezza $< \varepsilon/2$. Allora $\mathcal{C} = \{h(p_i) \mid h \in \mathcal{H} \text{ e } i = 1, 2, 3\}$ è una configurazione discreta, perché unione di tre insiemi discreti, ed è ammissibile per costruzione. Inoltre, sempre per costruzione, si ha anche $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_C$. Per concludere basta quindi provare che vale anche l'inclusione opposta.

Dato un qualunque $g \in \mathcal{G}_C$, esistono $h \in \mathcal{H}$ e $i \in \{1, 2, 3\}$, tali che $g(p_1) = h(p_i)$. Per la scelta di $\varepsilon > 0$ e dei punti p_2, p_3 , segue immediatamente dalla proprietà triangolare che la stessa trasformazione h deve anche soddisfare $g(p_2) = h(p_j)$ e $g(p_3) = h(p_k)$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Essendo il triangolo p_1, p_2, p_3 scaleno, si deve avere $i = 1, j = 2$ e $k = 3$, il che implica $g = h$ e quindi $g \in \mathcal{H}$. \square

2. Tassellazioni regolari

Iniziamo a classificare le tassellazioni proprie del piano euclideo mediante poligoni regolari, cioè le tassellazioni per le quali $X = \mathcal{S} = E^2$ è il piano euclideo con il gruppo \mathcal{G} delle sue isometrie, mentre \mathcal{P} è costituito da poligoni regolari aventi tutti lo stesso lato. La classificazione è intesa a meno di \mathcal{G} -equivalenza cioè di isometrie, ma è conveniente ragionare a meno di similitudini identificando tassellazioni che differiscano per un cambiamento di scala (ricordiamo che le similitudini sono le trasformazioni del piano euclideo esprimibili come composizioni di isometrie e omotetie). Così facendo, possiamo assumere che il lato comune a tutti i poligoni regolari in \mathcal{P} sia unitario.

Consideriamo prima il caso più semplice delle *tassellazioni regolari*, quelle in cui \mathcal{P} è costituito da un solo elemento, cioè tutti i tasselli sono congruenti allo stesso poligono regolare (di lato unitario) P_n con $n \geq 3$. In questo caso, intorno a un qualunque vertice della tassellazione abbiamo un certo numero $k \geq 3$ di tasselli a due a due adiacenti. Allora, poiché gli angoli interni di P_n misurano tutti $(n-2)\pi/n$

radianti, sommando gli angoli dei tasselli intorno al vertice considerato e dividendo per π si ottiene

$$\frac{k(n-2)}{n} = 2, \quad (1)$$

o equivalentemente

$$(k-2)(n-2) = 4. \quad (2)$$

È immediato verificare che le uniche coppie ammissibili per $k, n \geq 3$ sono

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 3 \\ n = 6 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 4 \\ n = 4 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 6 \\ n = 3 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Quindi, fissato $n = 3, 4, 6$ si deve avere la stessa situazione, cioè lo stesso numero k di tasselli, intorno a tutti i vertici. Inoltre, essendo l'adiacenza tra due copie di P_n realizzabile in un unico modo a meno di isometrie, si ha che per ogni coppia ammissibile di valori di k e n esiste al più una sola tassellazione \mathcal{T}_n a meno di isometrie. Infatti, una volta posato il primo tassello, l'intera tassellazione risulta univocamente determinata (verificare).

ESERCIZIO 7. Dimostrare che le tassellazioni \mathcal{T}_3 e \mathcal{T}_4 sono effettivamente costruibili e periodiche. Dedurne che anche la tassellazione \mathcal{T}_6 lo è, in quanto duale di \mathcal{T}_3 a meno di similitudine (vedi figura 16).

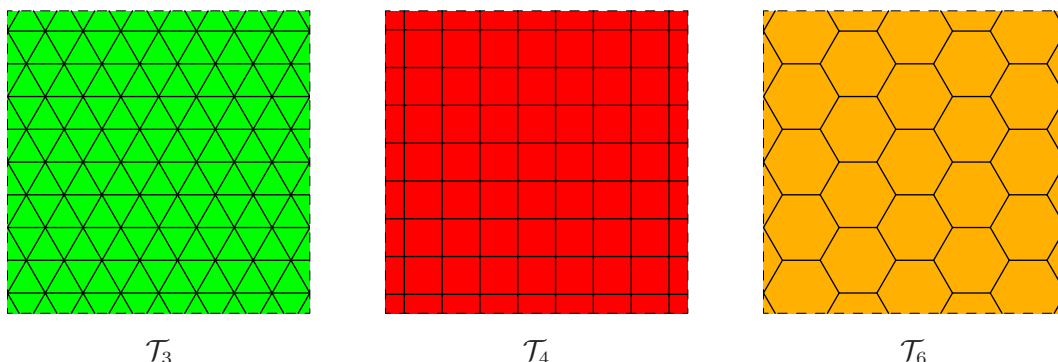


FIGURA 16. Le tre tassellazioni regolari del piano euclideo.

Le tre tassellazioni regolari \mathcal{T}_i con $i = 3, 4, 6$ sono costituite da tasselli tutti regolari e tutti congruenti tra loro per definizione. In effetti tali proprietà possono essere entrambe realizzate mediante l'azione del gruppo di simmetria $\mathcal{G}_{\mathcal{T}_i}$.

Infatti la regolarità di un tassello $T \in \mathcal{T}_i$ si può esprimere dicendo che il suo gruppo di simmetria \mathcal{G}_T è il più grande possibile, cioè \mathcal{G}_T agisce transitivamente sui vertici e sui lati di T , e anche sulle coppie vertice-lato (v, l) con $v \in l$. Nel caso delle tassellazioni regolari si ha l'inclusione $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}_i}$, cioè tutte le simmetrie di ciascun tassello si estendono a simmetrie dell'intera tassellazione \mathcal{T}_i .

Inoltre, la congruenza tra due qualunque tasselli si può ottenere con una simmetria dell'intera tassellazione \mathcal{T}_i , cioè per ogni $T, T' \in \mathcal{T}_i$ esiste $g \in \mathcal{G}_{\mathcal{T}_i}$ tale che $g(T) = T'$, in altre parole tutti i tasselli della tassellazione \mathcal{T}_i sono $\mathcal{G}_{\mathcal{T}_i}$ -equivalenti.

Mettendo insieme queste due proprietà, si ha che per le tassellazioni regolari \mathcal{T}_i , non solo tutti i vertici, tutti i lati e tutti i tasselli sono tra loro $\mathcal{G}_{\mathcal{T}_i}$ -equivalenti, ma lo

sono anche tutte le triple vertice-lato-tassello (v, l, T) con $v \in l \subset T$. Quest'ultima proprietà di simmetria implica che tutti i tasselli siano regolari e congruenti tra loro, e caratterizza quindi le tassellazioni regolari.

TEOREMA 1. Le tassellazioni regolari del piano euclideo (a meno di similitudini) sono $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$ e \mathcal{T}_6 . Queste sono le uniche tassellazioni poligonali \mathcal{T} del piano euclideo nelle quali tutte le triple vertice-lato-tassello (v, l, T) con $v \in l \subset T$ sono $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue da quanto detto sopra, la seconda parte dal fatto che la congruenza delle triple (v, l, T) è sufficiente a garantire che i tasselli siano tutti regolari e congruenti tra loro. \square

La $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenza tra elementi di una tassellazione poligonale \mathcal{T} è in generale più forte della \mathcal{G} -equivalenza. Infatti, la \mathcal{G} -equivalenza non è altro che la congruenza, e quando riferita a elementi dei tasselli esprime in realtà proprietà dei prototipi, al contrario $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenza esprime il fatto che due elementi, oltre a essere congruenti, sono anche collocati nella tassellazione \mathcal{T} in modi congruenti.

Per esempio, la \mathcal{G} -equivalenza dei tasselli di \mathcal{T} equivale al fatto che la tassellazione sia basata su un solo prototipo, così come la \mathcal{G} -equivalenza dei lati di \mathcal{T} equivale al fatto che tutti i prototipi siano equilateri con lati congruenti. Analogamente la \mathcal{G} -equivalenza di tutte le coppie vertice-tassello (v, T) con $v \in T$ o di tutte le coppie lato-tassello (l, T) con $l \subset T$ equivalgono rispettivamente al fatto che i tasselli siano tutti equiangoli e congruenti o tutti equilateri e congruenti.

Per i vertici di \mathcal{T} non ha senso parlare di \mathcal{G} -equivalenza (poiché si tratta di singoli punti), ma ha invece senso parlare di $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenza, proprietà della tassellazione e non dei prototipi, in quanto coinvolge elementi di diversi tasselli (quelli che condividono i vertici in questione).

Le tassellazioni in figura 17 hanno sia tasselli che lati tutti \mathcal{G} -equivalenti, e lo stesso vale per le coppie vertice-lato (v, l) con $v \in l$ e le coppie lato-tassello (l, T) con $l \subset T$. Ma solo la prima ha i vertici tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti e solo le prime due hanno i tasselli tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti, mentre nessuna ha i lati tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti.

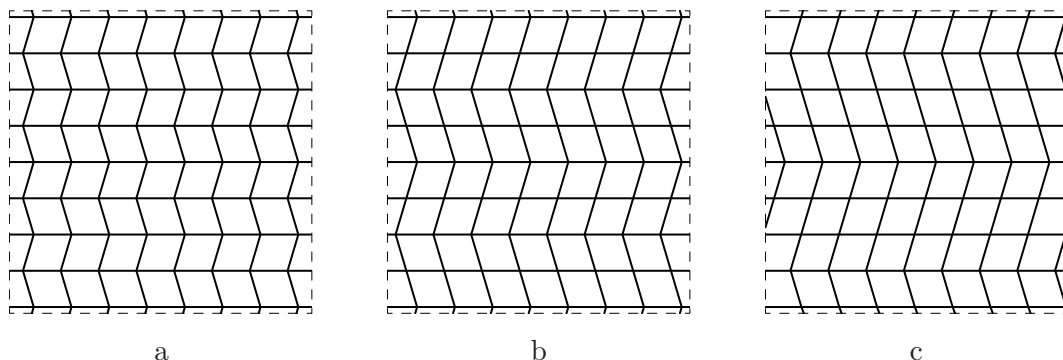


FIGURA 17. Esempi di tassellazioni \mathcal{T} del piano euclideo aventi i lati e i tasselli tutti congruenti tra loro, ma non tutti i lati $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti, e aventi inoltre: a) i vertici e i tasselli tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti, b) i tasselli ma non i vertici tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti, c) né i vertici né i tasselli tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti.

ESERCIZIO 8. Dimostrare che le tassellazioni poligonali convesse del piano euclideo che hanno le coppie vertice-tassello (v, T) con $v \in T$ tutte \mathcal{G}_T -equivalenti sono le tassellazioni regolari e la famiglia continua di tassellazione in rettangoli congruenti parametrizzata dalla classe di similitudine (o equivalentemente dal rapporto tra i lati) dei rettangoli, come in figura 18a. Qui si potrebbe sostituire la \mathcal{G}_T -equivalenza con la \mathcal{G} -equivalenza ottenendo le stesse tassellazioni.

ESERCIZIO 9. Dimostrare che le tassellazioni poligonali convesse del piano euclideo che hanno le coppie lato-tassello (l, T) con $l \subset T$ tutte \mathcal{G}_T -equivalenti sono le tassellazioni regolari, la famiglia continua di tassellazione in rombi congruenti parametrizzata dalla classe di similitudine (o equivalentemente dall'angolo acuto) dei rombi, come in figura 18b, e l'unica tassellazione in figura 18c (dove l'angolo acuto dei rombi è $\pi/3$). Qui non si può sostituire la \mathcal{G}_T -equivalenza con la \mathcal{G} -equivalenza.

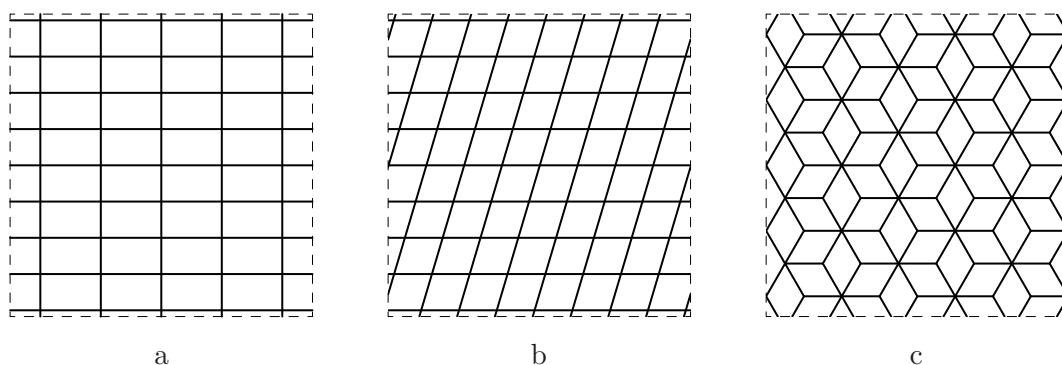


FIGURA 18. Tassellazioni poligonali non regolari del piano euclideo che hanno \mathcal{G}_T -equivalenti: a) tutte le coppie vertice-tassello (v, T) con $v \in T$, b) e c) tutte le coppie lato-tassello (l, T) con $l \subset T$.

Abbiamo fin qui esaminato le tassellazioni proprie del piano euclideo basate sugli insiemi di prototipi $\mathcal{P} = \{P_n\}$ con $n \geq 3$, cioè formate da tasselli tutti congruenti allo stesso poligono regolare P_n con n lati. Vogliamo ora estendere il discorso alle tassellazioni proprie basate sull'insieme di prototipi $\mathcal{P} = \{P_n \mid n \geq 3\}$, cioè formate da tasselli regolari, ma non necessariamente aventi tutti lo stesso numero di lati. I tasselli di una tale tassellazione devono comunque avere lati congruenti (verificare), ragionando a meno di similitudini assumiamo quindi assumere che tutti i prototipi P_n abbiano lato unitario.

ESERCIZIO 10. Provare che anche assumendo come prototipi solo un triangolo equilatero e un quadrato con lo stesso lato è possibile costruire un'infinità non numerabile di tassellazioni a due a due non equivalenti.

Alla luce dell'esercizio precedente, ha senso restringere l'attenzione a tassellazioni con qualche ulteriore proprietà di regolarità. Per limitare la classificazione a una casistica finita è sufficiente richiedere l'uniformità rispetto ai vertici. Più precisamente, una tassellazione poligonale propria \mathcal{T} del piano euclideo la diciamo *tassellazione uniforme* se i vertici sono tutti \mathcal{G}_T -equivalenti (tutti dello "stesso tipo").

Per *tassellazione semiregolare* si intende una tassellazione poligonale propria del piano euclideo che abbia tutti i tasselli regolari e sia uniforme.

Data una tale tassellazione semiregolare \mathcal{T} , sommando gli angoli intorno ad ogni vertice si ha la seguente equazione (analoga alla (1) per le tassellazioni regolari):

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \dots + \frac{n_k - 2}{n_k} = 2, \quad (4)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} = \frac{k - 2}{2}, \quad (5)$$

dove $k \geq 3$ è la valenza comune dei vertici, e (n_1, \dots, n_k) con $n_i \geq 3$ è la sequenza dei numeri di lati dei tasselli intorno a ciascun vertice. Quest'ultima è la stessa per tutti i vertici a meno di permutazioni cicliche e inversione, per l'ipotesi di uniformità.

Tenendo conto del fatto che ogni addendo al primo membro dell'equazione (4) vale almeno $1/3$, si ha che $k \leq 6$. Un'analisi esaustiva delle possibilità porta alle seguenti soluzioni per la sequenza (n_1, \dots, n_k) , a meno di permutazioni cicliche e inversione:

$$\begin{aligned} & (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12) && \text{per } k = 3; \\ & (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10), (6, 6, 6) && \\ & (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4) && \text{per } k = 4; \quad (6) \\ & (3, 4, 3, 12), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4) && \\ & (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 3, 4) && \text{per } k = 5; \\ & (3, 3, 3, 3, 3, 3) && \text{per } k = 6. \end{aligned}$$

Per $k = 3$ ogni tripla compare una sola volta in quanto tutte le permutazioni di una tripla si ottengono mediante permutazioni cicliche e inversioni, mentre per $k = 4$ le ultime tre sequenze si ottengono permutando opportunamente le prime tre, così come per $k = 5$ l'ultima si ottiene permutando la precedente.

Le soluzioni $(6, 6, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$ e $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ corrispondono alle tassellazioni regolari $\mathcal{T}_6 = \mathcal{T}_{6,6,6}$, $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_{4,4,4,4}$ e $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_{3,3,3,3,3,3}$ viste in precedenza, le rimanenti soluzioni danno i 18 tipi di vertici in figura 19.

Ciascuno di questi tipi può caratterizzare al più una sola tassellazione semiregolare. Infatti, la progressiva estensione delle configurazioni in figura 19, con l'aggiunta di un tassello alla volta adiacente a quelli già esistenti, è univocamente determinata dalla condizione di uniformità (non nell'ordine di costruzione, ma nel risultato finale a meno di isometrie). Non tutti i tipi danno però luogo a tassellazioni semiregolari dell'intero piano, in quanto il processo di estensione può portare a sovrapposizioni parziali dei tasselli.

ESERCIZIO 11. Provare che i tipi di vertici $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(4, 5, 20)$, $(5, 5, 10)$, $(3, 3, 4, 12)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 4, 4, 6)$ e $(3, 4, 3, 12)$ in figura 19 non danno luogo a nessuna tassellazione, mentre ognuno dei rimanenti tipi $(3, 12, 12)$, $(3, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ e $(3, 3, 4, 3, 4)$ determina un'unica tassellazione a meno di isometrie. Dedurre l'effettiva costruibilità di tali tassellazioni da quella delle tassellazioni regolari (rettangolari in un caso) con i prototipi decorati mostrati in figura 20.

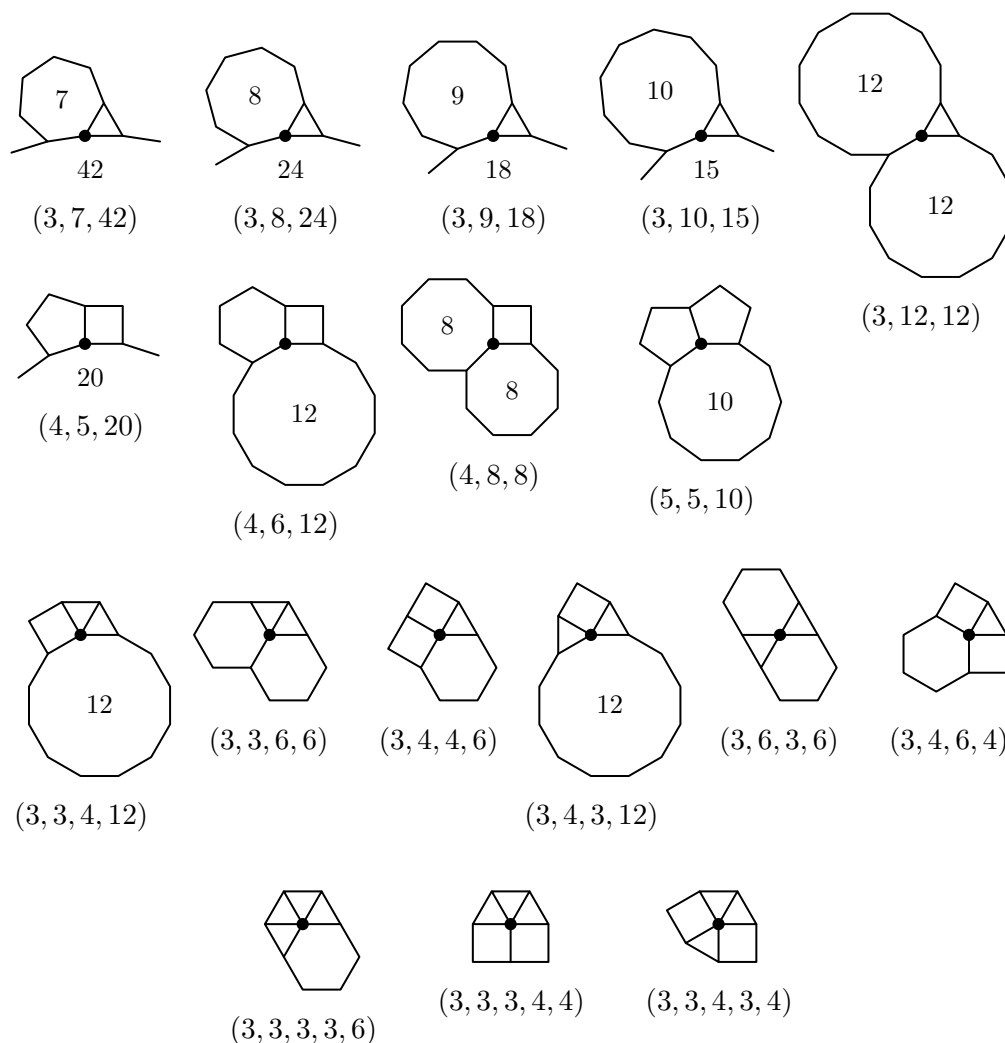


FIGURA 19. Tipi di vertici corrispondenti alle k -uple non omogenee in (6).

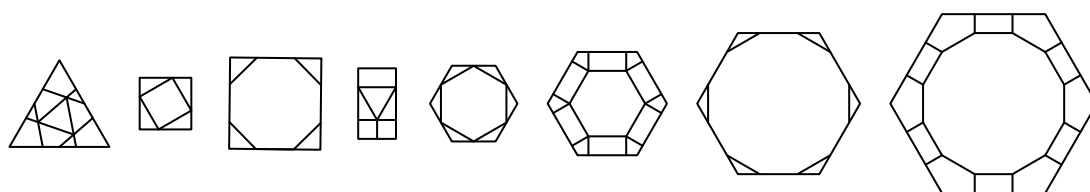


FIGURA 20. Prototipi decorati per la costruzione delle tassellazioni semiregolari.

Alla luce dell'esercizio precedente, possiamo concludere che esistono al più undici tassellazioni semiregolari, delle quali tre regolari e altre otto non regolari. Inoltre, il fatto che anche queste ultime possano essere ridotte a tassellazioni regolari con opportune decorazioni, implica che tutte sono periodiche.

TEOREMA 2. Le tassellazioni semiregolari del piano euclideo (a meno di similitudini) sono le tre tassellazioni regolari in figura 16 e le otto tassellazioni non regolari in figura 21.

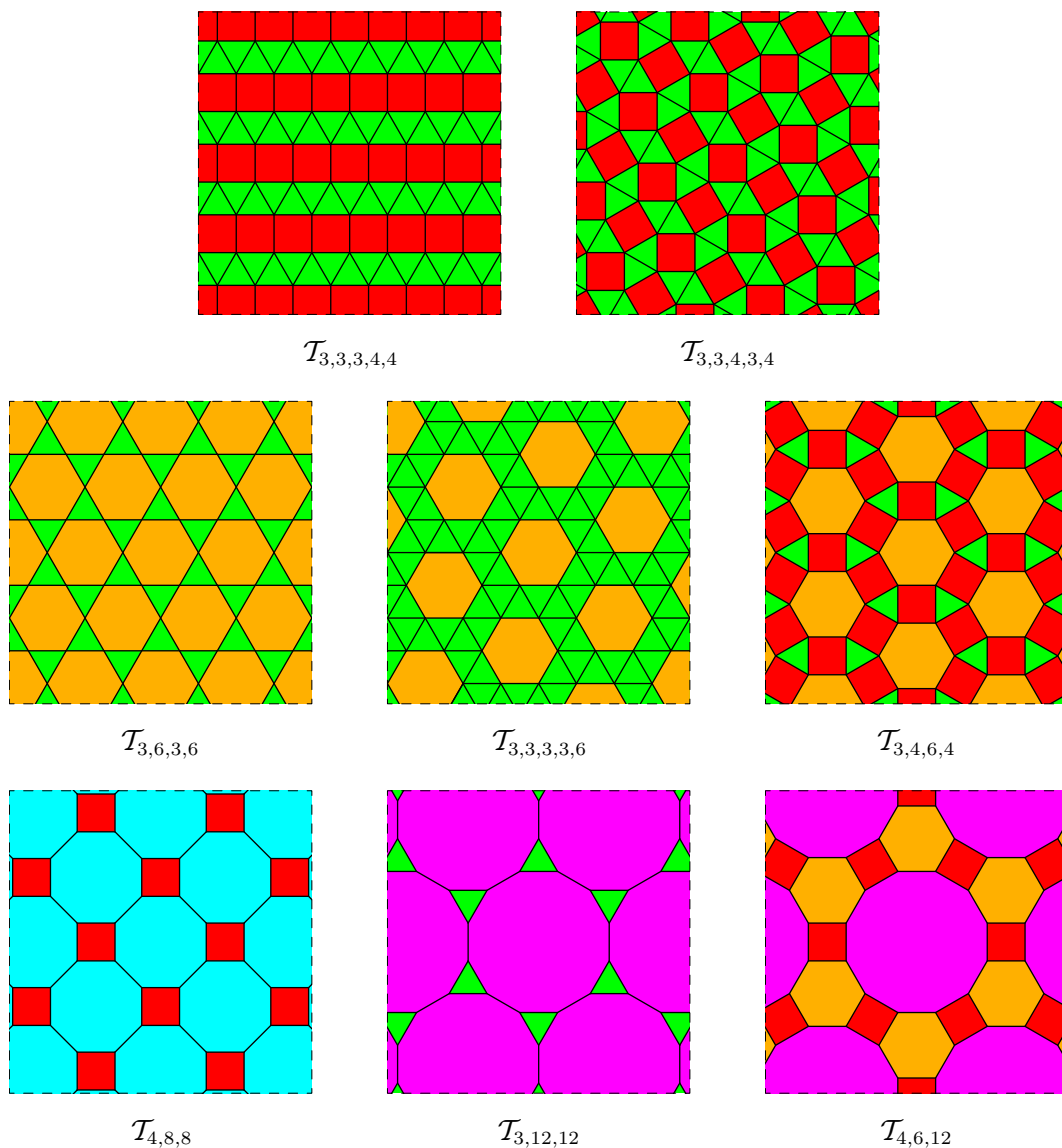


FIGURA 21. Le tassellazioni semiregolari del piano euclideo (oltre alle regolari). Qui i colori hanno il solo scopo di evidenziare la distinzione tra tasselli con numeri di lati diversi.

Dimostrazione. L'enunciato segue da quanto già discusso, salvo la verifica dell'uniformità delle tassellazioni in figura 21. Tenendo conto della periodicità di queste tassellazioni, tale verifica si riduce a un numero finito di casi. \square

Alcune delle tassellazioni in figura 21 ammettono anche costruzioni più dirette rispetto a quella indicata nell'ultimo esercizio. In particolare, la tassellazione $\mathcal{T}_{3,3,3,4,4}$ può essere costruita in modo ovvio per fasce alternate di triangoli equilateri e quadrati, mentre le tassellazioni $\mathcal{T}_{3,6,3,6}$ e $\mathcal{T}_{3,3,3,3,6}$ si possono ottenere da \mathcal{T}_3 raggruppando alcune sestuple di tasselli triangolari a formare esagoni. D'altra parte, la tassellazione $\mathcal{T}_{4,8,8}$ si può ottenere espandendo i vertici di \mathcal{T}_4 a quadrati, la tassellazione $\mathcal{T}_{3,12,12}$ si può ottenere espandendo i vertici di \mathcal{T}_6 a triangoli equilateri, e la tassellazione $\mathcal{T}_{4,6,12}$ si può ottenere espandendo simultaneamente i vertici e i lati di \mathcal{T}_6 a esagoni e quadrati rispettivamente.

Notiamo che in generale una tassellazione semiregolare \mathcal{T} può non avere tutti i lati $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti, in quanto le coppie di tasselli regolari adiacenti lungo un lato possono essere diverse. In effetti questa è l'unica ostruzione alla $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenza dei lati di \mathcal{T} .

ESERCIZIO 12. Verificare che due lati di una tassellazione semiregolare \mathcal{T} sono $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti se e solo se separano coppie di tasselli congruenti. In particolare, solo le tassellazioni regolari e $\mathcal{T}_{3,6,3,6}$ hanno tutti i lati $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti.

Con le tassellazioni semiregolari emerge il fenomeno della chiralità, che non si manifesta nelle tassellazioni regolari. Un sottoinsieme del piano euclideo $X \subset E^2$ si dice *chirale* se il suo gruppo di simmetria \mathcal{G}_X non contiene isometrie negative, mentre si dice *achirale* altrimenti. In altre parole, X è chirale se e solo se è distinto, a meno di isometrie positive, dal sottoinsieme $X' \subset E^2$ ottenuto come immagine speculare di X mediante una qualunque riflessione del piano (verificare). Tale definizione si estende in modo naturale a famiglie di sottoinsiemi. In particolare, diciamo che una tassellazione \mathcal{T} del piano euclideo è una *tassellazione chirale* se $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ non contiene isometrie negative, mentre diciamo che \mathcal{T} è una *tassellazione achirale* altrimenti.

ESERCIZIO 13. Determinare quali tra i tipi di vertici in figura 19 sono chirali e quali sono achirali. Verificare che tutte le tassellazioni semiregolari sono achirali a eccezione della tassellazione $\mathcal{T}_{3,3,3,6}$ che è invece chirale (pur essendo il tipo dei suoi vertici achirale).

Vogliamo ora vedere come le considerazioni fatte fin qui sulle tassellazioni regolari e semiregolari del piano euclideo si possono adattare a geometrie non euclidee, quali la geometria sferica e la geometria iperbolica.

Nella geometria sferica lo spazio \mathcal{S} è la sfera unitaria nello spazio euclideo $S^2 \subset E^3$, e il gruppo \mathcal{G} è il gruppo di simmetria di S^2 come sottoinsieme di E^3 , cioè il gruppo delle isometrie di E^3 che trasformano la sfera S^2 in se stessa, o equivalentemente che ne fissano il centro. In questo caso, i “segmenti” sono *archi geodetici*, cioè archi di cerchi massimi, e i “poligoni” sono delimitati da curve chiuse semplici che siano unioni finite di tali archi.

Analogamente al caso euclideo, anche nella sfera per *poligoni regolari* intendiamo i poligoni equilateri ed equiangoli. Ma, a differenza di quanto avviene nel piano euclideo, nella sfera non ci sono similitudini oltre alle isometrie, come si può dedurre dal fatto che S^2 ha area finita 4π . Per ogni $n \geq 3$ esistono infiniti poligoni regolari con n lati non isometrici (né simili) tra di loro, i cui angoli interni hanno ampiezza

$$\alpha(n, A) = \frac{(n-2)\pi + A}{n}, \quad (7)$$

dipendente quindi anche dall'area $A \leq 4\pi$ del poligono.

ESERCIZIO 14. Dimostrare che la somma degli angoli interni di un qualunque poligono sferico con n lati è $(n-2)\pi + A$ dove A è l'area del poligono, e quindi per i poligoni regolari vale la (7). Considerare prima il caso dei triangoli sferici ed estendere poi il discorso a tutti i poligoni scomponendoli in triangoli.

Per le *tassellazioni sferiche regolari*, cioè le tassellazioni proprie della sfera i cui tasselli sono tutti poligoni sferici regolari con lo stesso numero n di lati, sommando

gli angoli intorno a un vertice di valenza k (come già fatto nel caso euclideo), si ha

$$\frac{k(n-2)}{n} < 2, \quad (8)$$

o equivalentemente

$$(k-2)(n-2) < 4. \quad (9)$$

Fattorizzando i possibili valori del prodotto al primo membro (1, 2 e 3) si ottiene che le uniche coppie ammissibili per $k, n \geq 3$ sono

$$\left\{ \begin{matrix} k=3 \\ n=3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k=3 \\ n=4 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k=4 \\ n=3 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k=3 \\ n=5 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k=5 \\ n=3 \end{matrix} \right\}. \quad (10)$$

Per $n=4$ o $n=5$ si ha che k può assumere un solo valore, mentre per $n=3$ ci sono tre possibilità, cioè $k=3, 4$ e 5 . Ma fissata una qualunque tassellazione regolare \mathcal{T} della sfera, k deve essere lo stesso per tutti i vertici (verificare). Inoltre, ragionando come nel caso euclideo, si può concludere che per ogni coppia ammissibile di valori di k e n esiste al più una sola tassellazione $\mathcal{T}_{k,n}$ a meno di isometrie (verificare).

Le tassellazioni $\mathcal{T}_{k,n}$ per le coppie ammissibili sono rappresentate in figura 22. La loro effettiva costruibilità si basa sulla seguente osservazione: $n \geq 3$ punti (distinti) di S^2 sono vertici di un poligono sferico regolare se e solo se sono complanari e vertici di un poligono (euclideo) regolare nel piano che li contiene.

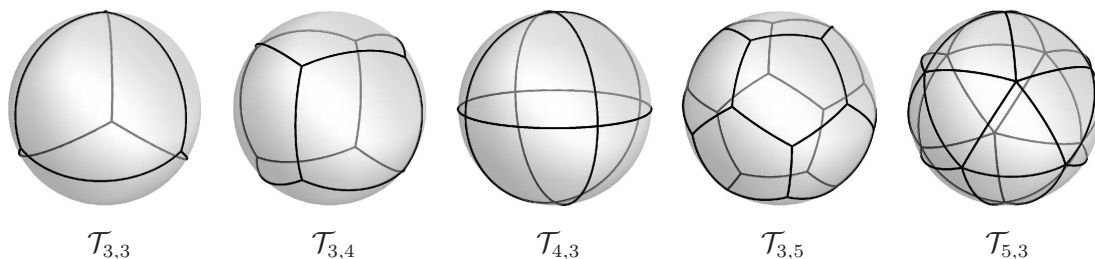


FIGURA 22. Le tassellazioni regolari della sfera.

Questa stessa osservazione consente anche di associare alle tassellazioni regolari $\mathcal{T}_{k,n}$ poliedri convessi regolari $P_{k,n}$, più noti come *solidi platonici*, inscritti nella sfera e aventi gli stessi vertici della corrispondente tassellazione, con lati e facce individuati rispettivamente dai lati e dai tasselli di quest'ultima (vedi figura 23).

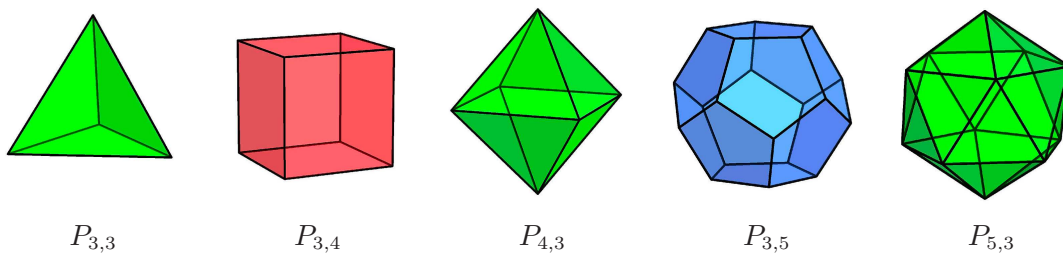


FIGURA 23. Solidi platonici corrispondenti alle tassellazioni regolari della sfera.

Viceversa, la tassellazione $\mathcal{T}_{k,n}$ si può ottenere proiettando le facce di $P_{k,n}$ sulla sfera dal suo centro.

ESERCIZIO 15. Dimostrare la validità dell'osservazione fatta sopra. Dedurne che le tassellazioni regolari della sfera e i solidi platonici sono effettivamente costruibili, a partire dai casi con $n = 3$ e sfruttando poi la dualità tra $\mathcal{T}_{3,4}$ e $\mathcal{T}_{4,3}$ e tra $\mathcal{T}_{3,5}$ e $\mathcal{T}_{5,3}$.

Analogamente a quanto visto nel piano euclideo, anche le tassellazioni regolari della sfera presentano una forte simmetria. In particolare, in una tale tassellazione \mathcal{T} tutte le triple vertice-lato-tassello (v, l, T) con $v \in l \subset T$ sono $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti (verificare).

A questo punto abbiamo sostanzialmente provato il seguente teorema.

TEOREMA 3. Le tassellazioni regolari della sfera sono le cinque in figura 22. Queste sono le uniche tassellazioni poligonali \mathcal{T} della sfera nelle quali tutte le triple vertice-lato-tassello (v, l, T) con $v \in l \subset T$ sono $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti.

Dimostrazione. Segue da quanto già detto e dal fatto che la \mathcal{G} -equivalenza delle triple (v, l, T) implica la regolarità della tassellazione. \square

Notiamo che la $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenza delle triple vertice-lato-tassello (v, l, T) con $v \in l \subset T$ per le tassellazioni sferiche si riflette in una corrispondente proprietà di equivalenza delle triple vertice-lato-faccia (v, l, F) con $v \in l \subset F$ per i poliedri regolari in figura 23. Ma mentre per le tassellazioni sferiche tale proprietà segue dalla sola assunzione che tutti i tasselli siano regolari e isometricamente equivalenti, lo stesso non vale per i poliedri, come evidenziato con il prossimo esercizio.

ESERCIZIO 16. Costruire un poliedro convesso $P \subset R^3$ con tutte le facce regolari e congruenti ma non tutte \mathcal{G}_P -equivalenti (a meno di similitudini ce ne sono solo tre). Osservare che un tale poliedro non può essere associato a una tassellazione regolare della sfera, e spiegare come ciò possa accadere nonostante le facce di P soddisfino le stesse proprietà richieste per i tasselli di una tassellazione regolare della sfera.

Passiamo ora a discutere sommariamente le *tassellazioni sferiche semiregolari*, cioè le tassellazioni proprie \mathcal{T} della sfera i cui tasselli sono tutti poligoni sferici regolari e i cui vertici sono tutti dello stesso tipo, cioè tutti $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti. Anche a queste tassellazioni corrispondono *poliedri convessi semiregolari* P inscritti nella sfera, in base alla stessa osservazione fatta sopra nel caso regolare. La $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenza dei vertici delle tassellazioni si riflette in un'analogia proprietà dei poliedri, nei quali tutti i vertici sono \mathcal{G}_P -equivalenti.

Per una tale tassellazione semiregolare \mathcal{T} , sommando gli angoli intorno ad ogni vertice si ha la disequazione

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \dots + \frac{n_k - 2}{n_k} < 2, \quad (11)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} > \frac{k - 2}{2}, \quad (12)$$

dove $k \geq 3$ è la valenza comune dei vertici, e (n_1, \dots, n_k) con $n_i \geq 3$ è la sequenza dei numeri di lati dei tasselli intorno a ciascun vertice (la stessa per tutti i vertici a meno di permutazioni cicliche e inversione, per l'ipotesi di uniformità). È facile

verificare che si deve avere $k \leq 5$, ma qui l'analisi esaustiva della casistica è molto più complessa che nel caso euclideo, e le soluzioni per (n_1, \dots, n_k) comprendono anche diverse famiglie infinite. Di queste famiglie, solo

$$(3, 3, 3, n) \text{ e } (4, 4, n) \text{ con } n \geq 3 \quad (13)$$

superano la verifica della costruibilità e danno quindi origine alle tassellazioni della sfera $\mathcal{T}_{3,3,3,n}$ e $\mathcal{T}_{4,4,n}$ e ai corrispondenti poliedri convessi $P_{3,3,3,n}$ e $P_{4,4,n}$, chiamati rispettivamente n -antiprismo e n -prisma (vedi figura 24). In particolare, notiamo che $\mathcal{T}_{3,3,3,3}$ e $\mathcal{T}_{4,4,4}$ coincidono con le tassellazioni regolari $\mathcal{T}_{4,3}$ e $\mathcal{T}_{3,4}$ in figura 22.

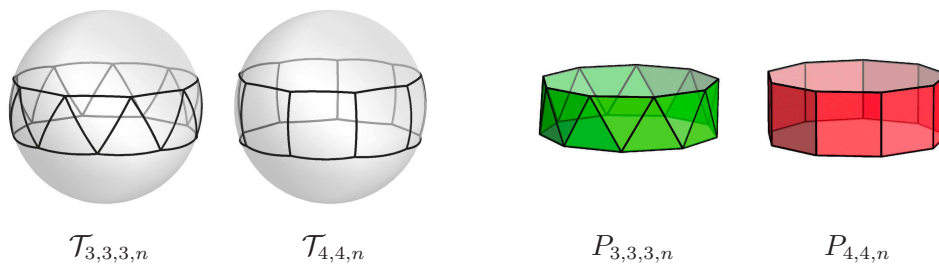


FIGURA 24. Le tassellazioni $\mathcal{T}_{3,3,3,n}$ e $\mathcal{T}_{4,4,n}$ della sfera e i corrispondenti poliedri.

Delle rimanenti soluzioni, che sono in numero finito, solo 13 oltre a quelle corrispondenti alle tassellazioni regolari in figura 22 superano la verifica della costruibilità. Queste danno origine alle tassellazioni sferiche semiregolari in figura 25 e quindi ai poliedri convessi semiregolari, più noti come *solidi archimedei*, in figura 26.

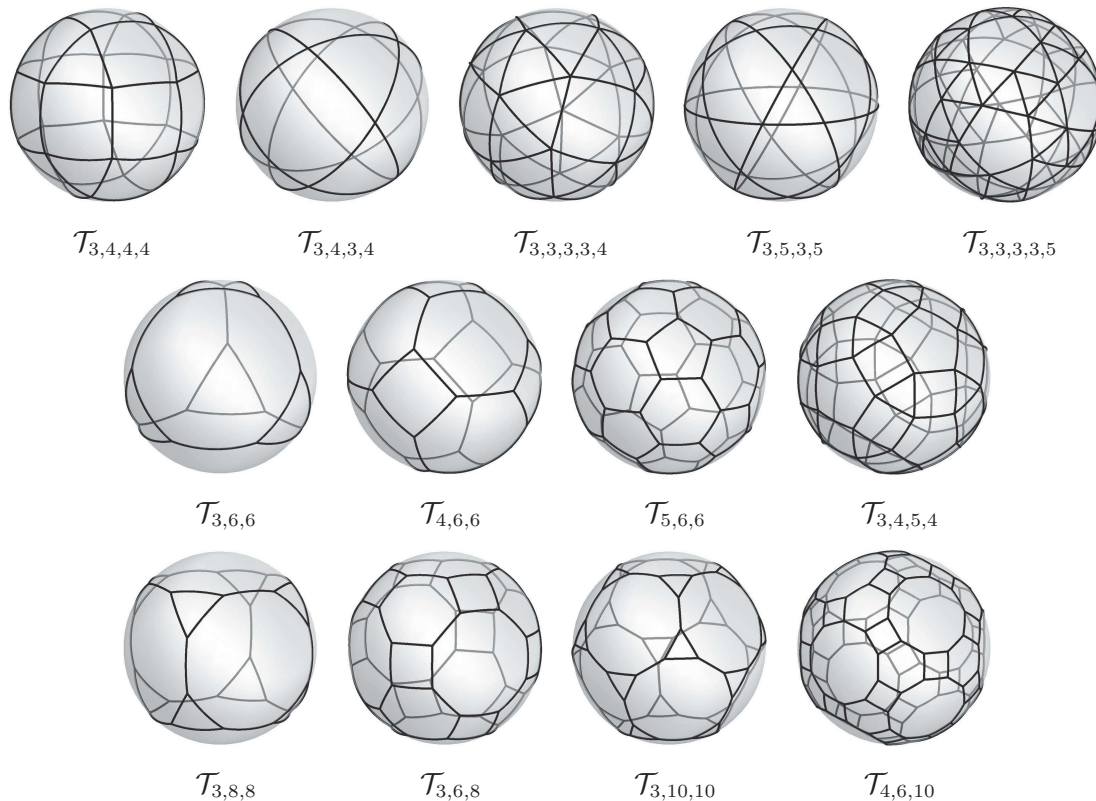


FIGURA 25. Le tassellazioni semiregolari della sfera.

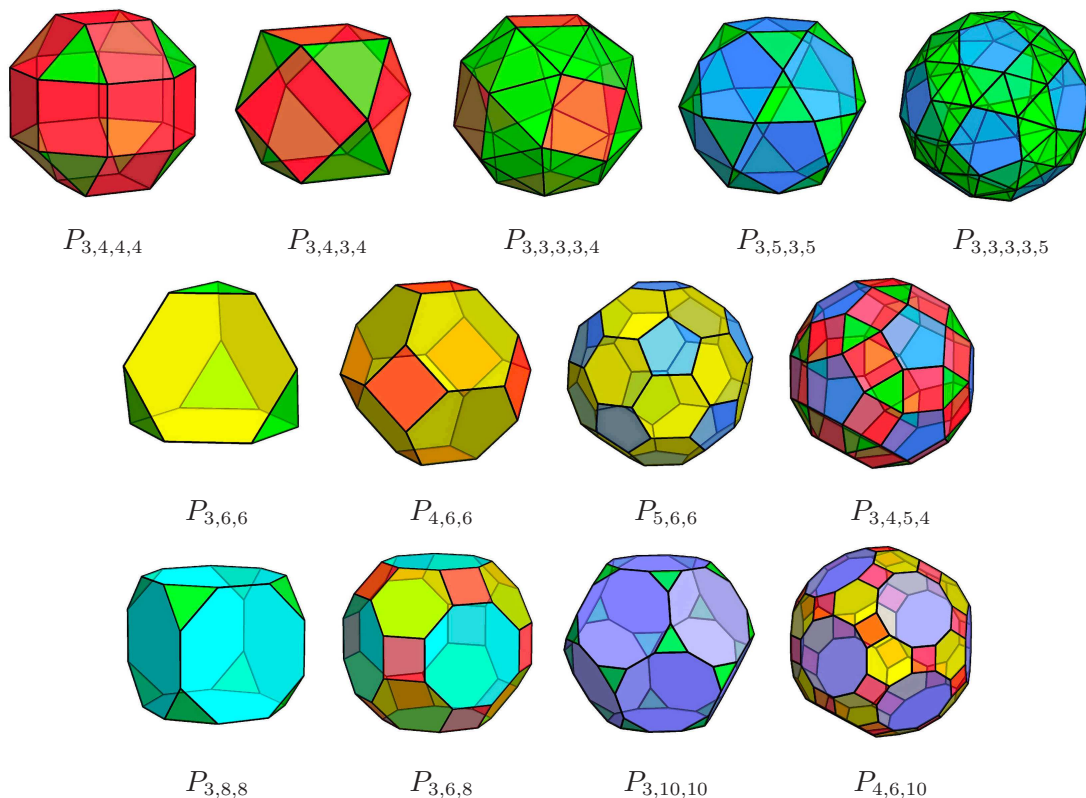


FIGURA 26. Solidi archimedei alle tassellazioni semiregolari della sfera.

Il fatto che le tassellazioni in figura 25 siano effettivamente costruibili e semiregolari, può essere derivato dal fatto che lo sono i poliedri convessi figura 25 e che questi sono inscritti nella sfera. Tali poliedri, ad eccezione di $P_{3,3,3,3,4}$ e $P_{3,3,3,3,5}$, si possono ottenere “troncando” opportunamente i poliedri regolari in figura 23.

Consideriamo per esempio il cubo inscritto nella sfera unitaria e gli otto piani tangenti alla sfera nei vertici del cubo, i quali contengono le facce di un ottaedro circoscritto alla stessa sfera. Riducendo progressivamente le dimensioni dell’ottaedro e tagliando via la parte del cubo che rimane al suo esterno, si ottengono in sequenza poliedri equivalenti a meno di omotetie dello spazio a $P_{3,8,8}$, $P_{3,4,3,4}$ e $P_{4,6,6}$, per terminare con l’intero ottaedro quando questo è tutto contenuto nel cubo di partenza. In modo analogo, partendo con il dodecaedro e tagliandolo con icosaedri via via più piccoli, si possono ottenere in sequenza i poliedri $P_{3,10,10}$, $P_{3,5,3,5}$ e $P_{5,6,6}$, fino a terminare con l’icosaedro. Entrambe le costruzioni appena descritte producono una sequenza che collega un poliedro regolare con il suo duale. Come effetto dell’auto-dualità del tetraedro, la stessa costruzione applicata ad esso genera invece solo un nuovo poliedro, e precisamente $P_{3,6,6}$. Infine, i poliedri $P_{3,4,5,4}$, $P_{3,6,8}$ e $P_{4,6,10}$ si possono ottenere troncando opportunamente poliedri regolari sia intorno ai vertici che lungo i lati.

ESERCIZIO 17. Verificare che tra i poliedri semiregolari, $P_{3,3,3,3,4}$ e $P_{3,3,3,3,5}$ sono gli unici *poliedri chirali*, cioè distinti, a meno di isometrie positive dello spazio, dalla loro immagine speculare mediante una qualunque riflessione dello spazio. Dedurne che tra le tassellazioni sferiche semiregolari, $\mathcal{T}_{3,3,3,3,4}$ e $\mathcal{T}_{3,3,3,3,5}$ sono le uniche *tassellazioni*

chirali, cioè distinte, a meno di isometrie positive della sfera, dalla loro immagine speculare mediante una qualunque riflessione della sfera.

Al contrario di quanto abbiamo visto per la sfera, le cui tassellazioni regolari e semiregolari presentano una forte analogia con quelle euclidee, nel piano iperbolico la situazione è sostanzialmente diversa, essendo la casistica infinita già il caso regolare.

Assumiamo come modello del piano iperbolico quello del *disco di Poincaré*, di cui ricordiamo brevemente la descrizione. La superficie \mathcal{S} è il disco unitario, senza la circonferenza di bordo che consiste dei “punti all’infinito”. Le rette iperboliche congiungono coppie arbitrarie di punti all’infinito, e sono rappresentate dagli archi di circonferenza che terminano ortogonalmente al bordo di \mathcal{S} e dai diametri (nel caso speciale in cui i due punti all’infinito siano opposti). Segmenti, poligoni semplici e *poligoni iperbolic* sono quindi definiti di conseguenza. Il gruppo delle isometrie \mathcal{G} è generato dalle riflessioni iperboliche rispetto alle rette iperboliche (analogamente a quanto avviene nel caso euclideo), che sono riflessioni euclidee nel caso dei diametri e *inversioni circolari* altrimenti.

La somma degli angoli interni di un poligono iperbolico con n lati è $(n - 2)\pi - A$, dove A è l’area (iperbolica) del poligono (confronta con l’esercizio 14). Ne segue che anche nel piano iperbolico, così come nella sfera, gli angoli interni di un *poligono regolare*, cioè equilatero ed equiangolo, hanno ampiezza

$$\alpha(n, A) = \frac{(n - 2)\pi - A}{n}, \quad (14)$$

dipendente sia dal numero n dei lati che dall’area A del poligono. La differenza di segno rispetto alla (7) implica che in questo caso tale ampiezza sia minore (e non maggiore) di quella che si avrebbe nel piano euclideo. Inoltre, visto che l’area A può assumere qualunque valore reale positivo (non è limitata come nella sfera), $\alpha(n, A)$ può assumere a sua volta qualunque valore positivo minore di $(n - 2)\pi/n$.

Quindi, per le *tassellazioni iperboliche regolari*, cioè le tassellazioni proprie del piano iperbolico i cui tasselli sono tutti poligoni iperbolic regolari con lo stesso numero n di lati, sommando gli angoli intorno a un vertice di valenza k (come abbiamo già fatto sia nel piano euclideo che nella sfera), si ha

$$\frac{k(n - 2)}{n} > 2, \quad (15)$$

o equivalentemente

$$(k - 2)(n - 2) > 4. \quad (16)$$

Si può dimostrare che per ogni coppia di valori per k e n che soddisfa tale disequazione esiste un’unica tassellazione iperbolica regolare $\mathcal{T}_{k,n}$ (l’unicità è semplice da verificare, non altrettanto l’esistenza). Possiamo quindi concludere che vale il seguente teorema.

TEOREMA 4. Per ogni $n \geq 3$, esiste una famiglia infinita di tassellazioni regolari $\mathcal{T}_{k,n}$ del piano iperbolico mediante poligoni regolari con n lati, dove $k > 2n/(n - 2)$ è la valenza comune a tutti i vertici (vedi figura 27). Queste sono le uniche tassellazioni poligonali \mathcal{T} del piano iperbolico nelle quali tutte le triple vertice-lato-tassello (v, l, T) con $v \in l \subset T$ sono $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalenti tra loro.

Dimostrazione. Della prima parte abbiamo già detto sopra. La seconda parte, e in realtà anche l'unicità di $\mathcal{T}_{k,n}$ con k e n dati, si basa sul fatto che due tasselli qualunque di una tassellazione regolare \mathcal{T} del piano iperbolico sono collegati da una catena di tasselli in cui ciascuno condivide un lato con il precedente ed è a esso $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ -equivalente mediante la riflessione iperbolica rispetto a tale lato. \square

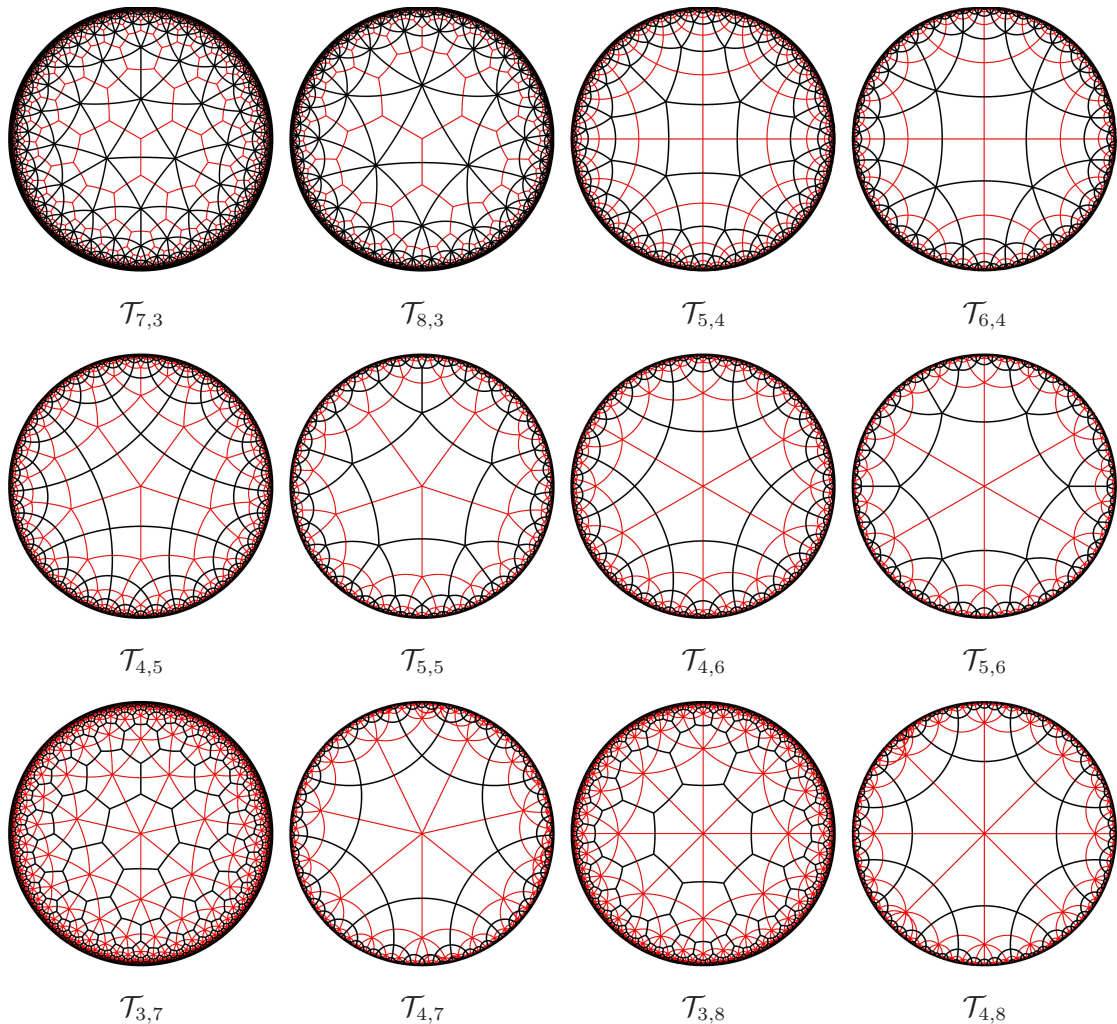


FIGURA 27. Le prime due tassellazioni $\mathcal{T}_{k,n}$ del piano iperbolico per $3 \leq n \leq 8$ (in nero) e le loro duali $\mathcal{T}'_{k,n} \cong \mathcal{T}_{n,k}$ (in rosso).

Vista la flessibilità delle tassellazioni iperboliche regolari, è naturale aspettarsi a maggior ragione un'ampia casistica anche delle *tassellazioni iperboliche semiregolari*, cioè le tassellazioni proprie del piano iperbolico con tasselli regolari e vertici tutti dello stesso tipo. E in effetti così è. Ci limitiamo solo a notare che una grande varietà di tali tassellazioni si ottiene già modificando quelle regolari $\mathcal{T}_{k,n}$ con tecniche analoghe a quelle viste nel caso euclideo: raggruppandone opportunamente i tasselli a formare nuovi tasselli regolari con numeri diversi di lati o espandendone i vertici a nuovi tasselli regolari (con k lati) ed eventualmente anche i lati a nuovi quadrati.

ESERCIZIO 18. Individuare su quali tassellazioni iperboliche regolari o semiregolari sono basati i disegni di Escher in figura 28.



FIGURA 28. Disegni della serie “Circle Limit” di Escher

Terminiamo questa sezione con un’osservazione sulle limitazioni che abbiamo incontrato nella costruzione delle tassellazioni regolari del piano euclideo e nella sfera. Sebbene l’argomento che abbiamo seguito sia basato sulle ampiezze degli angoli intorno ai vertici, e sia quindi di natura metrica, esso può essere reinterpretato in un ambito molto più generale di natura topologica, nel quale le tassellazioni sono considerate a meno di trasformazioni continue. Più precisamente, diciamo che due tassellazioni \mathcal{T} e \mathcal{T}' di $X \subset \mathcal{S}$ sono *topologicamente equivalenti* se c’è una trasformazione continua (cioè un omeomorfismo) $\varphi : X \rightarrow X$ tale che $\varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$.

Il caso sferico è più semplice in quanto riguarda tassellazioni finite (per la compattezza della sfera). Infatti, data una qualunque tassellazione propria \mathcal{T} della sfera, denotando rispettivamente con v, l e t i numeri dei vertici, dei lati e dei tasselli di \mathcal{T} , per la caratteristica di Eulero-Poincaré si deve avere

$$\chi(S^2) = v - l + t = 2. \quad (17)$$

Se richiediamo che \mathcal{T} sia *topologicamente regolare*, cioè abbia tasselli aventi tutti lo stesso numero n di lati, non necessariamente regolari né congruenti tra loro, e vertici aventi tutti la stessa valenza k , abbiamo due ulteriori equazioni:

$$2l = kv = nt. \quad (18)$$

Usando queste ultime per esprimere l e t in funzione di v e sostituendo nella precedente equazione si ottiene

$$(k - 2)(n - 2) = \frac{4(v - n)}{v}, \quad (19)$$

da cui la stessa disequazione già ottenuta per le tassellazioni sferiche regolari:

$$(k - 2)(n - 2) < 4. \quad (20)$$

Sulla base di questa disequazione possiamo provare il seguente teorema.

TEOREMA 5. Ogni tassellazione propria topologicamente regolare della sfera è topologicamente equivalente a una delle tassellazioni regolari in figura 22.

Dimostrazione. Data una coppia di valori ammissibili per k e n , il sistema delle equazioni (17) e (18) determina univocamente il numero $t = 4k/(2k + 2n - kn)$ dei tasselli, così come anche v e l . A questo punto l’equivalenza topologica tra due

tassellazioni sferiche corrispondenti alla stessa coppia si può ottenere per estensioni successive sui tasselli ordinati in modo che ciascun tassello condivida con i precedenti uno o più lati consecutivi, il che implica che l'adiacenza si può realizzare in modo unico a meno di trasformazioni continue. \square

Contrariamente a quanto accade per le tassellazioni sferiche regolari, per le quali la proprietà di avere tutti i vertici con la stessa valenza (infatti con lo stesso tipo) segue dalla regolarità dei tasselli, usando l'esempio costruito nell'esercizio 16 si può mostrare che per le tassellazioni topologicamente regolari tale proprietà va assunta esplicitamente, se si vuole che valga il teorema precedente.

ESERCIZIO 19. Verificare che per una qualunque tassellazione poligonale propria della sfera vale l'equazione

$$\sum_{n \geq 3} t_n(6 - n) + 2 \sum_{k \geq 3} v_k(3 - k) = 12, \quad (21)$$

dove t_n è il numero di tasselli con n -lati e v_k è il numero dei vertici di valenza k . Dedurre che ogni fullerene C_v , cioè molecola costituita da v atomi di carbonio che rappresentano, a meno di deformazione continua, i vertici, tutti di valenza 3, di una tassellazione della sfera in esagoni e pentagoni (vedi figura 29), forma esattamente 12 pentagoni.

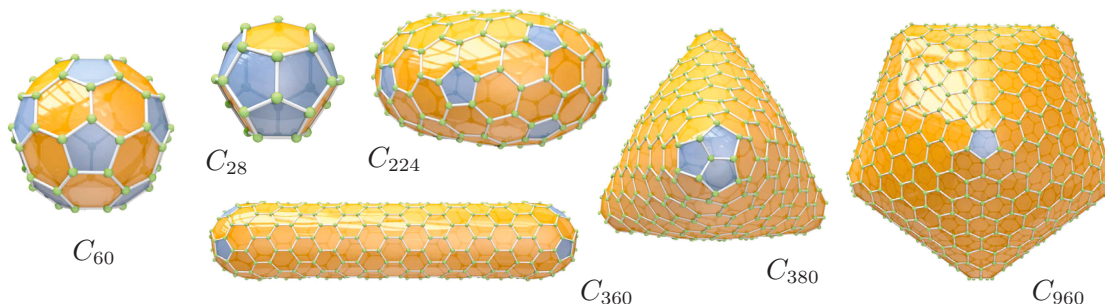


FIGURA 29. Esempi di fullereni con i dodici pentagoni in grigio.

Un'analoga caratterizzazione delle tassellazioni topologicamente regolari del piano euclideo vale solo nel caso periodico. Infatti, una tassellazione \mathcal{T} del piano è periodica se e solo se si può "avvolgere" sul toro $T^2 = S^1 \times S^1$ in modo da indurre una tassellazione \mathcal{T}' su quest'ultimo, che sarà anch'essa topologicamente regolare, con gli stessi valori di k e n , se lo è \mathcal{T} . Poiché \mathcal{T}' è una tassellazione finita (per la compattezza del toro) possiamo applicare a essa lo stesso calcolo già usato per la sfera. Indicando con v, l e t i numeri dei vertici, dei lati e dei tasselli di \mathcal{T}' , per la caratteristica di Eulero-Poincaré si deve avere

$$\chi(T^2) = v - l + t = 0, \quad (22)$$

da cui si ottiene

$$(k - 2)(n - 2) = 4. \quad (23)$$

Possiamo quindi concludere con il seguente teorema.

TEOREMA 6. Ogni tassellazione propria periodica e topologicamente regolare del piano euclideo è topologicamente equivalente a una delle tassellazioni regolari in figura 16.

Dimostrazione. Sia \mathcal{T} una tassellazione come nell'enunciato e sia \mathcal{T}' una qualunque tassellazione del toro indotta da \mathcal{T} . Data una coppia di valori ammissibili per k e n , ci sono infinite possibilità per \mathcal{T}' in dipendenza del numero t dei tasselli, che non è univocamente determinato (contrariamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema precedente per il caso sferico). Ma tutte le possibili tassellazioni \mathcal{T}' corrispondono alla stessa tassellazione \mathcal{T} del piano (la differenza tra diverse \mathcal{T}' sta solo nella periodicità con cui \mathcal{T} viene avvolta sul toro). \square

Le tassellazioni in figura 30 mostrano che l'assunzione, fatta nella definizione di tassellazione topologicamente regolare, che tutti i vertici abbiano la stessa valenza, così come l'assunzione della periodicità della tassellazione, sono entrambe essenziali per la validità del teorema. In particolare, notiamo che gli ettagoni della tassellazione in figura 30c tendono a degenerare a segmenti man mano che ci si allontana dall'origine. Si può dimostrare che ciò è inevitabile per una tassellazione del piano euclideo in ettagoni convessi. Infatti il teorema 6 vale anche se l'assunzione della periodicità si sostituisce con l'ipotesi che tutti i tasselli siano convessi e abbiano in-raggio $\geq r$ e circum-raggio $\leq R$ per opportune costanti $0 < r < R$.

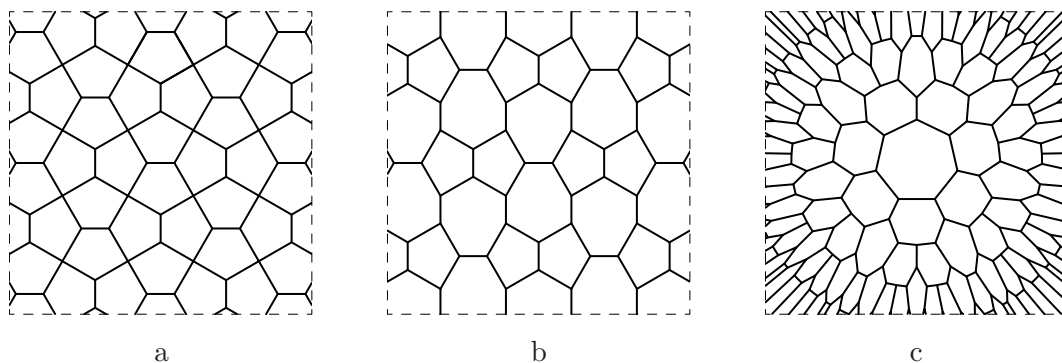


FIGURA 30. Tassellazioni del piano euclideo: a) in pentagoni, periodica ma con valenze diverse dei vertici, b) in pentagoni ed ettagoni, periodica e con vertici tutti di valenze 3, c) in ettagoni, con tutti i vertici di valenza 3 ma non periodica.

ESERCIZIO 20. Costruire tassellazioni del piano euclideo con le stesse proprietà di quelle nelle figure 30a e 30c, ma con ettagoni al posto di pentagoni la prima e viceversa con pentagoni al posto di ettagoni la seconda.

3. Gruppi di simmetria

Vogliamo ora determinare tutti i possibili gruppi di simmetria delle tassellazioni poligonali convesse del piano euclideo. In base al teorema di equivalenza che abbiamo provato alla fine della sezione 1, questi coincidono con i sottogruppi discreti del gruppo \mathcal{G} delle isometrie del piano euclideo. Analogamente a quanto fatto nella

sezione precedente per la classificazione delle tassellazioni, anche qui ragioniamo a meno di similitudini. Più precisamente, ci proponiamo di classificare i sottogruppi discreti di \mathcal{G} a meno di isomorfismi indotti non solo dalle isometrie ma anche dalle similitudini del piano euclideo, trascurando cioè il fattore scala. In termini tecnici ciò significa considerare tali gruppi a meno di coniugio non nel gruppo \mathcal{G} , come sarebbe naturale, ma nel gruppo più grande di tutte le similitudini del piano euclideo (che contiene \mathcal{G} come sottogruppo normale).

Ricordiamo che un'isometria euclidea (o congruenza) è una trasformazione del piano euclideo $g : E^2 \rightarrow E^2$ che conserva la distanza tra i punti, cioè $d(g(p), g(q)) = d(p, q)$ per ogni $p, q \in E^2$. Più in generale una similitudine, è una trasformazione che moltiplica tutte le distanze per uno stesso fattore di similitudine $k > 0$ ($= 1$ per le isometrie), cioè $d(g(p), g(q)) = k d(p, q)$ per ogni $p, q \in E^2$. Come conseguenza, per il terzo criterio di similitudine, una tale g conserva le ampiezze degli angoli. Inoltre g manda rette in rette e conserva il parallelismo tra rette, cioè se due rette sono parallele allora lo sono anche le loro immagini (e viceversa).

Le isometrie euclidee si dividono in *isometrie positive* che conservano l'orientazione del piano, cioè il verso di percorrenza degli angoli, e *isometrie negative* che invertono l'orientazione. La composizione rispetta la regola del prodotto dei segni, quindi le isometrie positive formano un sottogruppo $\mathcal{G}^+ \subset \mathcal{G}$ di indice 2 in \mathcal{G} .

Gli assiomi di congruenza (principi del trasporto e primo criterio di congruenza), implicano che comunque date due semirette s e s' uscenti dai punti p e p' esistono esattamente due isometrie $g \in \mathcal{G}$ tali che $g(s) = s'$ (e quindi anche $g(p) = p'$), una positiva e una negativa, a seconda di come g fa corrispondere i semipiani determinati dalla retta contenente s a quelli determinati dalla retta contenente s' . Infatti le due isometrie differiscono per la riflessione rispetto a quest'ultima retta. Ne segue che un'isometria è univocamente determinata da come agisce su un qualunque triangolo (cioè tripla di punti non allineati), mentre è determinata a meno di una riflessione da come agisce su due punti distinti.

Un'isometria euclidea $g \in \mathcal{G}$ è una *traslazione* se trasforma ogni retta r orientata in una retta $r' = g(r)$ a essa parallela (incluso il caso in cui coincida) e orientata nello stesso modo. In altre parole φ conserva modulo, direzione e verso dei vettori, cioè manda ogni vettore v in un vettore $v' = g(v)$ a esso equipollente. Usando i teoremi sui parallelogrammi, si può verificare che per ogni coppia di punti p e p' esiste un'unica traslazione g tale che $g(p) = p'$, e che questa è associata al vettore $v = \overline{pp'}$, nel senso che ogni punto q del piano è trasformato nell'unico punto $q' = g(q)$ tale che il vettore $\overline{qq'}$ coincide con v . Usiamo la notazione τ_v per indicare tale traslazione, e notiamo che questa non fissa nessun punto, cioè $\tau_v(p) \neq p$ per ogni $p \in E^2$, tranne che nel caso $v = 0$ per il quale si ha τ_0 coincidente con l'identità di E^2 .

Dalle precedenti considerazioni segue che le traslazioni formano un sottogruppo commutativo di \mathcal{G}^+ (e quindi di \mathcal{G}) isomorfo a R^2 , essendo la composizione di traslazioni corrispondente alla somma di vettori, cioè in formule $\tau_w \circ \tau_v = \tau_{v+w}$.

Per analizzare più in dettaglio le isometrie euclidee, è utile associare a ogni isometria euclidea $g \in \mathcal{G}$, l'insieme dei punti fissi di g , così definito:

$$\text{Fix}(g) = \{p \in E^2 \mid g(p) = p\}. \quad (24)$$

Alla luce dei richiami fatti sopra, se tale insieme contiene due punti allora contiene tutta la retta da essi determinata, e se contiene tre punti non allineati allora coincide con tutto il piano, cioè g è l'identità. Quindi le uniche possibilità per $\text{Fix}(g)$ sono che sia vuoto, un singolo punto, una retta o tutto il piano.

Vediamo come si possono classificare le isometrie del piano euclideo in base ai loro insiemi di punti fissi, considerando prima il caso più semplice della retta euclidea.

PROPOSIZIONE 1. Ogni isometria $g : E^1 \rightarrow E^1$ della retta euclidea E^1 soddisfa una (e una sola) delle seguenti proprietà:

- 1) $\text{Fix}(g)$ coincide con tutta la retta e quindi g è l'identità;
- 2) $\text{Fix}(g)$ è un punto e g è la riflessione rispetto a tale punto;
- 3) $\text{Fix}(g)$ è vuoto e in tal caso g è una traslazione (non nulla).

Inoltre, le traslazioni (inclusa l'identità) conservano l'orientazione (il verso di percorrenza della retta), mentre le riflessioni invertono l'orientazione. Conseguentemente, nella retta si ha che la composizione di due riflessioni è una traslazione e la composizione di una riflessione e una traslazione (in qualunque ordine) è una riflessione.

Dimostrazione. L'enunciato segue da quanto detto sopra, una volta provato che ogni isometria della retta g che inverte l'orientazione deve fissare un punto (e uno solo). Per fare questo, basta osservare che rispetto a sistema di ascisse euclideo le isometrie della retta hanno equazioni del tipo $x' = \pm x + c$, con $c \in R$ e segno $+$ o $-$ a seconda che l'orientazione sia conservata o no. Quindi se g inverte l'orientazione, i punti fissi di g sono determinati dall'equazione $x = -x + c$, che ammette come unica soluzione $x = c/2$ per qualunque $c \in R$. \square

PROPOSIZIONE 2. Ogni isometria $g : E^2 \rightarrow E^2$ del piano euclideo E^2 soddisfa una (e una sola) delle seguenti proprietà:

- 1) $\text{Fix}(g)$ coincide con tutto il piano e quindi g è l'identità;
- 2) $\text{Fix}(g)$ è una retta r e g è la *riflessione* σ_r rispetto a tale retta;
- 3) $\text{Fix}(g)$ è un punto p e g è la *rotazione* $\rho_{p,\alpha}$ intorno a p di un angolo $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$;
- 4) $\text{Fix}(g)$ è vuoto e in tal caso g è una traslazione (non nulla) se conserva l'orientazione o una *glissoriflessione* (cioè la composizione $\tau_v \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \tau_v$ di una riflessione σ_r rispetto a una retta r e una traslazione τ_v con $v \neq 0$ parallelo a r) se inverte l'orientazione.

Dimostrazione. Che quelli indicati siano i soli casi possibili per $\text{Fix}(g)$ è già stato osservato. Il caso 1 è banale, mentre il caso 2 è stato discusso sopra.

Per quanto riguarda il caso 3, se p è l'unico punto fissato da g , allora una qualunque circonferenza C di centro p deve essere trasformata in se stessa conservando l'orientazione, altrimenti se l'orientazione di C fosse invertita esisterebbe un altro punto fisso $q \in C$ (verificare) e quindi g fisserebbe l'intera retta pq in contrasto con l'ipotesi. A questo punto è facile concludere che g è una rotazione intorno a p .

Consideriamo infine il caso 4. Sia g un'isometria del piano euclideo senza punti fissi. Proviamo innanzi tutto che esiste una retta r invariante rispetto a g , cioè tale che $g(r) = r$. Fissiamo un qualunque punto $p \in E^2$ siano $p' = g(p)$ e $p'' = g(p')$. Se i tre punti p, p' e p'' sono allineati allora possiamo porre $r = pp'$, infatti $g(r) = p'p'' = r$.

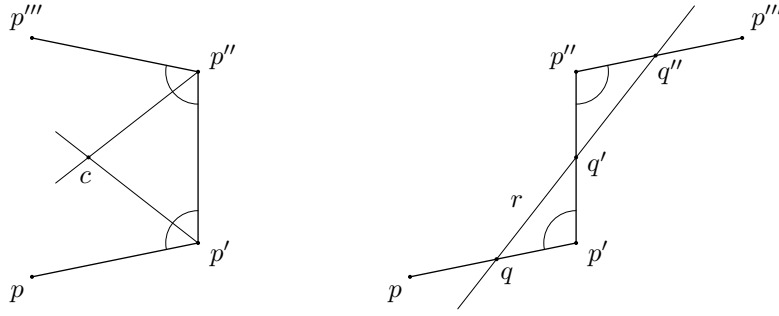


FIGURA 31.

Altrimenti si deve avere una delle due configurazioni in figura 31, dove $p''' = g(p'')$. La configurazione a sinistra è impossibile in quanto implicherebbe l'esistenza di un punto fisso c . Nel caso della configurazione a destra, posti q, q' e q'' rispettivamente uguali ai punti medi dei segmenti $pp', p'p''$ e $p''p'''$, si ha che $q' = g(q)$ e $q'' = g(q')$ con q, q' e q'' allineati, possiamo allora porre $r = qq'$ e come sopra si ha $g(r) = q'q'' = r$. Per la proposizione precedente g deve trasformare r in se stessa mediante una traslazione non nulla, altrimenti g fisserebbe qualche punto di r . È facile ora concludere che g è una traslazione o una glissoriflessione come richiesto. \square

Per ogni $p \in E^2$, denotiamo con $\mathcal{G}_p = \{g \in \mathcal{G} \mid g(p) = p\} \subset \mathcal{G}$ il gruppo delle isometrie euclidee che fissano il punto. Questo coincide con il gruppo di simmetria \mathcal{G}_C di una qualunque circonferenza C con centro p (verificare), e in base alla proposizione precedente è costituito dalle rotazioni $\rho_{p,\alpha}$ intorno a p e dalle riflessioni σ_r rispetto alle rette r passanti per p . Il sottogruppo $\mathcal{G}_p^+ = \mathcal{G}_p \cap \mathcal{G}^+$ delle isometrie euclidee positive che fissano il punto p si riduce invece alle sole rotazioni intorno a p e risulta isomorfo al gruppo degli angoli $R/2\pi\mathbb{Z}$, essendo la composizione di rotazioni intorno a p corrispondente alla somma di angoli, in formule $\rho_{p,\beta} \circ \rho_{p,\alpha} = \rho_{p,\alpha+\beta \bmod 2\pi}$.

Inoltre i quattro tipi di isometrie del piano euclideo (traslazioni, rotazioni, riflessioni e glissoriflessioni), sono invarianti per coniugio, cioè $g' = h \circ g \circ h^{-1}$ è dello stesso tipo di g per ogni isometria $h \in \mathcal{G}$, e più in generale per ogni similitudine h . Infatti: se g è la traslazione τ_v , allora g' è la traslazione $\tau_{h(v)}$ (le traslazioni formano un sottogruppo normale di \mathcal{G}); se g è la rotazione $\rho_{p,\alpha}$ intorno a p di angolo α , allora g' è la rotazione $\rho_{h(p),\pm\alpha}$ intorno a $h(p)$ di angolo $\pm\alpha$; se g è la riflessione σ_r rispetto alla retta r , allora g' è la riflessione $\sigma_{h(r)}$ rispetto alla retta $h(r)$; se g è una glissoriflessione rispetto alla retta r , allora g' è una glissoriflessione rispetto alla retta $h(r)$.

Riassumiamo nella proposizione che segue alcune ulteriori proprietà delle composizioni di questi quattro tipi di isometrie.

PROPOSIZIONE 3. Siano $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ due isometrie del piano euclideo. Per la composizione $g = g_2 \circ g_1$ vale quanto segue:

- 1) se le g_i sono una traslazione non nulla e una rotazione di un angolo $\alpha \neq 0 \bmod 2\pi$ intorno a un punto c , allora g è una rotazione dello stesso angolo α intorno a un punto $c' \neq c$;
- 2) se le g_i sono una traslazione non nulla e una riflessione/glissoriflessione rispetto a una retta r , allora g è una riflessione/glissoriflessione rispetto a una retta r' , che coincide con r se e solo se la traslazione è parallela a r ;

- 3) se le g_i sono rotazioni di angoli α_i intorno ai punti c_i , allora g è una traslazione se $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \pmod{2\pi}$ (l'identità nel caso in cui $c_1 = c_2$), altrimenti g è una rotazione di angolo $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \pmod{2\pi}$ (intorno al punto $c = c_1 = c_2$ nel caso in cui $c_1 = c_2$);
- 4) se le g_i sono riflessioni rispetto alle rette r_i , allora g è una traslazione in direzione ortogonale a r_1 e r_2 se tali rette sono parallele (l'identità se queste sono coincidenti), altrimenti g è una rotazione intorno al punto $c = r_1 \cap r_2$ di un angolo doppio mod 2π rispetto a quello da r_1 a r_2 orientate arbitrariamente.

Inoltre, ogni altra composizione si può determinare sulla base di queste.

Dimostrazione. Tutte le verifiche sono semplici e sono lasciate come esercizio. \square

Grazie alle proprietà delle isometrie euclidee fin qui richiamate, possiamo ora determinare i sottogruppi discreti G del gruppo \mathcal{G} di tali isometrie, esaminando i vari casi in ordine di complessità: prima il caso non periodico in cui G non contiene traslazioni, poi quello 1-periodico in cui G contiene traslazioni in una sola direzione, e infine quello 2-periodico in cui G contiene traslazioni in più direzioni. La proposizione che segue fornisce criteri per distinguere i primi due casi.

PROPOSIZIONE 4. Se G è un gruppo discreto di isometrie del piano euclideo, allora:

- 1) G non contiene traslazioni se e solo se esiste un punto $c \in E^2$ tale che $g(c) = c$ per ogni $g \in G$, se e solo se G è finito;
- 2) G contiene traslazioni in una sola direzione se e solo se è infinito ed esiste una retta $r \subset E^2$ tale che $g(r) = r$ per ogni $g \in G$, e in tal caso la direzione comune a tutte le traslazioni è parallela alla retta r .

Dimostrazione. Le implicazioni “se” sono facili. In particolare, se G è finito, allora per ogni $p \in E^2$ si ha che il baricentro c dell'orbita $G(p)$ è un punto fisso per ogni $g \in G$ (verificare). Proviamo le implicazioni “solo se”.

Nel primo caso, supponiamo per assurdo che G non contenga traslazioni e che l'insieme $\bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$ sia vuoto. Allora G non può essere ridotto alla sola identità, e non può contenere glissoriflessioni né coppie di riflessioni rispetto a rette parallele, per la proposizione precedente. Quindi G deve contenere almeno una rotazione g_1 di un angolo $\alpha \neq 0$ intorno a un punto p_1 (verificare). D'altra parte, G deve contenere almeno un altro elemento (non banale) g_2 con $p_1 \notin \text{Fix}(g_2)$, per il quale $g_1 \circ g_2 \circ g_1^{\pm 1} \circ g_2^{-1}$ è una traslazione (verificare), in contrasto con l'ipotesi. Resta da dimostrare che se esiste un punto $c \in E^2$ tale che $g(c) = c$ per ogni $g \in G$ allora G è finito. Infatti, per un qualunque punto $p \neq c$ l'orbita $G(p)$ è finita, essendo discreta e contenuta nella circonferenza di centro c passante per p . Ne segue che anche G è finito, in quanto per ogni $p' \in G(p)$ ci sono al più due $g \in G$ tali che $g(p) = p'$.

Nel secondo caso, sia $\tau_v \in G$ una traslazione e assumiamo che tutte le altre traslazioni in G siano parallele a v . Allora ogni elemento $g \in G$ deve preservare la direzione di v , altrimenti $g \circ \tau_v \circ g^{-1}$ sarebbe una traslazione non nulla in direzione diversa da quella di v . Se G contiene solo traslazioni, allora r si può porre uguale a una qualunque retta parallela a v . Altrimenti, oltre alle traslazioni G può contenere solo rotazioni di π radianti (le altre rotazioni non preservano alcuna direzione), riflessioni rispetto a rette parallele o ortogonali a v , glissoriflessioni rispetto a rette parallele a v .

I centri delle eventuali rotazioni sono tutti allineati su una retta r' parallela a v , in quanto componendo rotazioni di π radianti con centri diversi si ottiene una traslazione nella direzione individuata dai centri. Un analogo argomento implica che gli assi delle eventuali riflessioni/glissoriflessioni paralleli a v sono tutti coincidenti con una retta r'' (parallela a v), e che r' e r'' coincidono se entrambe definite. In ogni caso, la retta r uguale a r' e/o r'' è trasformata in se stessa da qualunque $g \in G$. \square

Sia G un gruppo discreto di isometrie del piano euclideo che non contiene traslazioni. Dalle proposizioni 2 e 4 segue che G è finito e interamente costituito da rotazioni tutte intorno a un stesso punto c (inclusa la rotazione nulla) e/o riflessioni rispetto a rette passanti per c . Eccetto i casi in cui G sia banale o costituito solo dall'identità e una riflessione, in tutti gli altri casi G contiene almeno una rotazione non nulla (verificare). Poiché G è finito, esiste la rotazione $\rho_{c,\alpha} \in G$ di angolo positivo minimo α e tutte le altre rotazioni di G si ottengono iterando questa, cioè hanno la forma $\rho_{c,k\alpha}$ (verificare). Per un certo $n \geq 2$ si deve avere $\rho_{c,n\alpha} = \text{id}$, altrimenti ci sarebbero infinite rotazioni distinte. Ciò significa che $\alpha = 2\pi/n$ e G contiene tutte e sole le n rotazioni $\rho_{c,0}, \rho_{c,2\pi/n}, \dots, \rho_{c,2(n-1)\pi/n}$. A questo punto abbiamo due possibilità: G non contiene alcuna riflessione oppure G contiene almeno una riflessione σ_r rispetto a una retta passante per c . Nel primo caso G è costituito dalle rotazioni appena dette e coincide con il gruppo ciclico $G_{P_n}^+ \cong \mathbb{Z}_n$ delle simmetrie positive di un poligono regolare P_n con n lati centrato in c , intendendo per P_2 un segmento (verificare). Nel secondo caso, possiamo scegliere P_n in modo che un suo vertice p sia su r (vedi figura 32). Tenendo conto della proposizione 3 (punto 4), G non può contenere riflessioni rispetto a rette che formino un angolo minore di π/n e d'altra parte $\rho_{c,2\pi/n} \circ \sigma_r$ è la riflessione rispetto alla retta per c e $\rho_{c,\pi/n}(p)$, la quale forma un angolo di π/n con la retta r (verificare). Ne segue che G contiene n riflessioni rispetto a rette che formano angoli π/n ciascuna con la successiva, e possiamo quindi concludere che in questo caso G ha $2n$ elementi e coincide con il gruppo diedrale $\mathcal{G}_{P_n} \cong \mathbb{D}_n$ delle simmetrie del poligono regolare P_n , intendendo anche qui per P_2 un segmento (verificare).

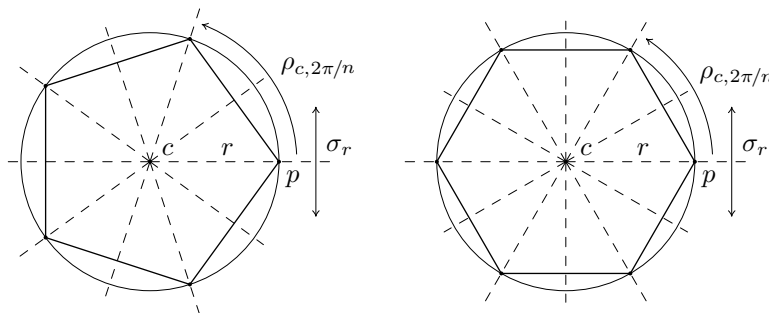


FIGURA 32. Gruppi di simmetria \mathcal{G}_{P_n} con $n = 5$ e 6 .

TEOREMA 5. I sottogruppi finiti non banali del gruppo \mathcal{G} delle isometrie del piano euclideo, cioè i gruppi discreti di isometrie del piano euclideo che non contengono traslazioni, sono isomorfi al gruppo ciclico \mathbb{Z}_n o al gruppo diedrale \mathbb{D}_n con $n \geq 2$. Infatti, a parte il gruppo ciclico $G = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ generato da una singola riflessione $\sigma \in \mathcal{G}$, essi coincidono con il gruppo $\mathcal{G}_{P_n}^+ \cong \mathbb{Z}_n$ delle simmetrie positive di P_n o il gruppo $\mathcal{G}_{P_n} \cong \mathbb{D}_n$ di tutte simmetrie di P_n , dove P_n è un poligono regolare con $n \geq 2$ lati, intendendo per P_2 un segmento.

Dimostrazione. Segue dalle considerazioni fatte sopra. \square

Ovviamente ogni sottogruppo di un gruppo finito di isometrie euclidee è anch'esso un gruppo finito di isometrie euclidee. Infatti, ogni sottogruppo di $\mathcal{G}_{P_n}^+$ è del tipo $\mathcal{G}_{P_k}^+$ con k divisore di n , e ogni sottogruppo di \mathcal{G}_{P_n} è del tipo \mathcal{G}_{P_k} o $\mathcal{G}_{P_k}^+$ con k divisore di n . Tali sottogruppi possono essere realizzati come gruppi di simmetria del poligono regolare P_n opportunamente decorato (vedi figura 33).

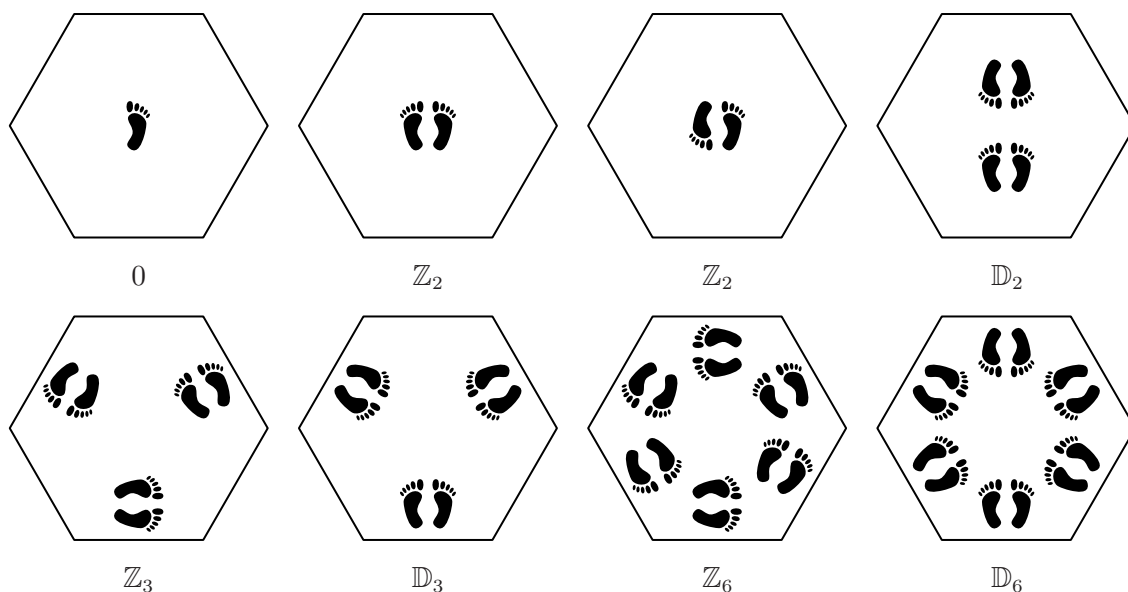


FIGURA 33. Sottogruppi di $\mathcal{G}_{P_6} \cong \mathbb{D}_6$ come gruppi di simmetria dell'esagono regolare P_6 opportunamente decorato.

I gruppi considerati nel teorema 5 sono anche detti *gruppi dei rosoni*, in quanto sono tutti i possibili gruppi di simmetria dei rosoni che spesso decorano le facciate delle chiese (vedi figura 34). In effetti questi gruppi di simmetria caratterizzano qualunque decorazione realizzata su una regione circolare e più in generale qualunque struttura piana limitata.

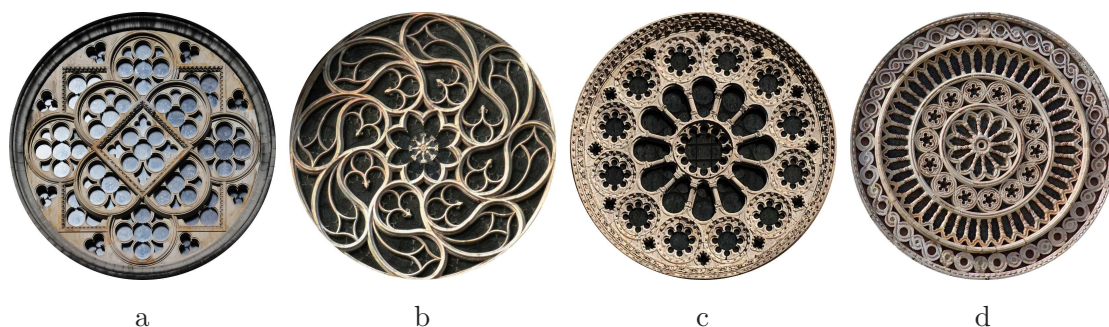


FIGURA 34. Esempi di rosoni. a) Cattedrale di Losanna. b) Duomo di Milano. c) Cattedrale di Chartres. d) Basilica di S. Francesco ad Assisi.

ESERCIZIO 21. Determinare i gruppi di simmetria dei rosoni in figura 34, dei disegni di Escher in figura 28 e delle tassellazioni non periodiche nelle figure 8c e 30c.

Sia ora G un gruppo discreto di isometrie del piano euclideo contenente traslazioni in una sola direzione, e sia r una retta invariante rispetto all'azione di G , la cui esistenza è garantita dalla proposizione 4. Poiché G è discreto, esiste una traslazione $\tau_v \in G$ con v vettore parallelo a r di modulo minimo $\ell > 0$ e tutte le altre traslazioni di G si ottengono iterando questa o la sua inversa, cioè hanno la forma τ_{kv} con $k \in \mathbb{Z}$ (verificare). Per l'invarianza della retta r , oltre alle traslazioni G può contenere solo: la riflessione σ_r rispetto a r , riflessioni rispetto a rette ortogonali a r , rotazioni di π radianti intorno a punti di r , e glissoriflessioni rispetto a r . In base alla proposizione 3, se G contiene una riflessione σ_s rispetto a una retta s ortogonale a r allora, a parte eventualmente σ_r , contiene tutte e sole le riflessioni $\sigma_{\tau_{kv/2}(s)}$ rispetto alle rette $\tau_{kv/2}(s)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (verificare). Analogamente, se G contiene una rotazione $\rho_{p,\pi}$ allora contiene tutte e sole le rotazioni $\rho_{\tau_{kv/2}(p),\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$, e se G contiene una glissoriflessione $\tau_w \circ \sigma_r$ allora w è un multiplo intero di $v/2$ e G contiene tutte e sole le glissoriflessioni $\tau_{kv/2} \circ \sigma_r$ con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, sempre grazie alla proposizione 3, se G contiene sia le riflessioni rispetto alle rette $\tau_{kv/2}(s)$, ciascuna distante $\ell/2$ dalla successiva, sia le rotazioni intorno ai punti $\tau_{kv/2}(p)$, ciascuno distante $\ell/2$ dal successivo, allora si hanno due sole possibilità: i punti appartengono alle rette oppure sono intercalati rispetto a esse, ciascuno a distanza $\ell/4$ dalle due rette più vicine.

Alla luce delle considerazioni fatte, possiamo provare il seguente teorema.

TEOREMA 6. I gruppi discreti 1-periodici di isometrie del piano euclideo, a meno di isomorfismi indotti dalle similitudini, cioè a meno di coniugio nel gruppo delle similitudini del piano euclideo, coincidono con i sette gruppi indicati nella figura 36.

Dimostrazione. Siano $G \subset \mathcal{G}$ un gruppo discreto 1-periodico, r una retta invariante rispetto all'azione di G e v un vettore parallelo a r di modulo minimo $\ell > 0$ tale che $\tau_v \in G$ come sopra. A meno di similitudini, l'effettiva posizione di r e l'effettivo valore di v e ℓ non sono rilevanti. Possiamo fissare su r un punto p_0 nel seguente modo: 1) se G contiene riflessioni rispetto rette ortogonali a r scegliamo p_0 su una tale retta, che indichiamo con s_0 ; 2) altrimenti, se G contiene rotazioni scegliamo p_0 coincidente con il centro di una tale rotazione; 3) altrimenti, scegliamo p_0 arbitrariamente.

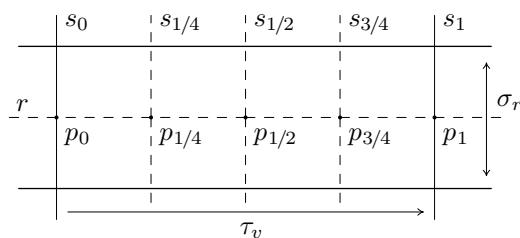

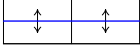
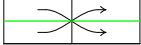
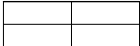


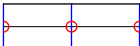



FIGURA 35.

Allora, ponendo $p_t = \tau_{tv}(p_0)$ e $s_t = \tau_{tv}(s_0)$, le eventuali riflessioni in G rispetto a rette ortogonali a r sono tutte e sole quelle rispetto alle rette $s_{k/2}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre se p_0 è stato fissato in accordo al punto 2 le rotazioni in G sono tutte e sole quelle intorno ai punti $p_{k/2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, mentre se p_0 è stato fissato in accordo al punto 1 le eventuali rotazioni in G possono essere tutte e sole quelle intorno ai punti $p_{k/2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ oppure tutte e sole quelle intorno ai punti $p_{(2k+1)/4}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Le diverse possibilità appena descritte sono indicate nella prima colonna della tabella che segue, mentre nella prima riga della stessa tabella sono indicate l'eventuale riflessione rispetto a r e le eventuali glissoriflessioni rispetto a r contenute in G .

				
	id	σ_r	$\tau_{kv/2} \circ \sigma_r$	
	id	p111	p1m1	p1g1
	$\sigma_{s_{k/2}}$	pm11	—	—
	$\rho_{p_{k/2}}$	p112	—	—
	$\sigma_{s_{k/2}}$ e $\rho_{p_{k/2}}$	—	pmm2	—
	$\sigma_{s_{k/2}}$ e $\rho_{p_{(2k+1)/4}}$	—	—	pmg2

Osserviamo che queste ultime non possono coesistere in G , altrimenti componendo si avrebbe anche la traslazione $\tau_{v/2}$, in contrasto con l'ipotesi di minimalità di v . Combinando le due casistiche si ottengono solo le sette possibilità indicate nella

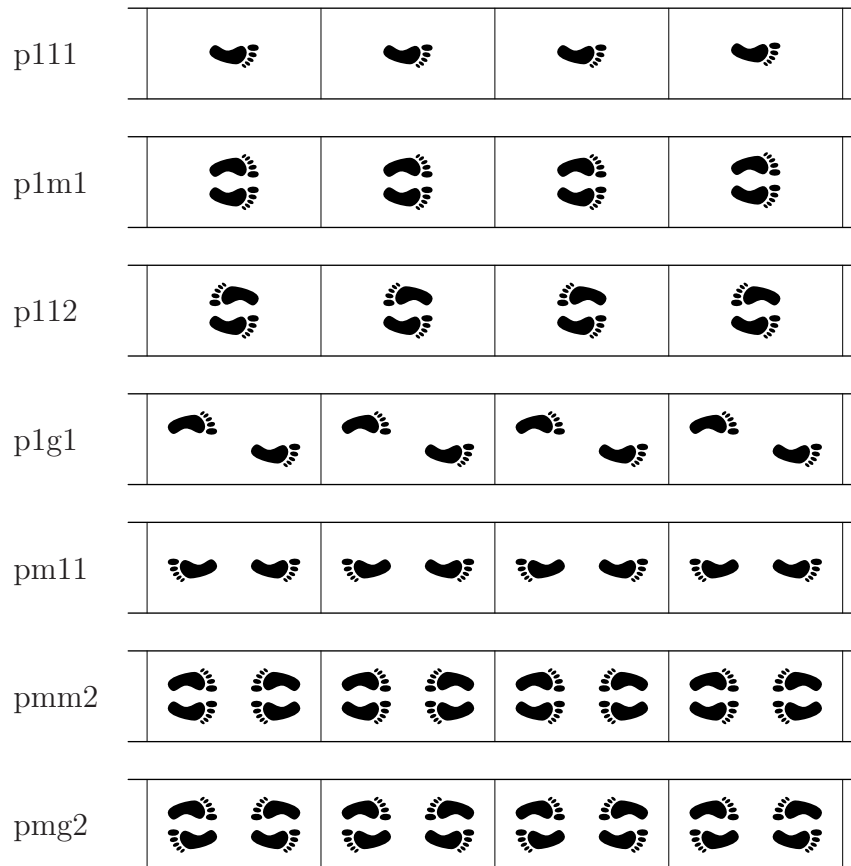


FIGURA 36. Gruppi discreti 1-periodici di isometrie del piano euclideo realizzati come gruppi di simmetria di una banda opportunamente decorata.

tabella. Queste sono usualmente denotate con un codice di quattro caratteri, il primo dei quali è sempre “p”. Il secondo carattere è “m” se G contiene riflessioni rispetto a rette ortogonali a r e “1” altrimenti. Il terzo è “m” se G contiene la riflessione rispetto a r , “g” se G contiene glissoriflessioni rispetto a r e “1” altrimenti. Infine, il quarto è “2” se G contiene rotazioni (di ordine 2) e “1” altrimenti. Le rimanenti caselle della tabella sono vuote, in quanto componendo le trasformazioni corrispondenti alla riga e alla colonna si otterrebbe la traslazione $\tau_{v/2}$ non ammissibile o ulteriori trasformazioni che porterebbero in un’altra casella.

Resta da verificare che le sette possibilità indicate nella tabella sono tutte effettivamente realizzabili mediante gruppi discreti 1-periodici di isometrie del piano euclideo. Ciò può essere fatto considerando i gruppi di simmetria di una banda intorno alla retta r opportunamente decorata, come mostrato nella figura 36. \square

Come già rilevabile nella figura 33 la classificazione geometrica dei gruppi discreti di isometrie eucldee non coincide con la loro classificazione algebrica. Infatti, in quella figura compaiono due gruppi di simmetria che dal punto di vista algebrico sono entrambi isomorfi al gruppo ciclico \mathbb{Z}_2 , quindi anche isomorfi tra loro, ma dal punto di vista geometrico non sono equivalenti, in quanto l’unica trasformazione non banale in un caso conserva l’orientazione mentre nell’altro la inverte.

ESERCIZIO 22. Verificare che i sette gruppi discreti 1-periodici di isometrie del piano euclideo si riducono a quattro se classificati dal punto di vista puramente algebrico, cioè a meno di isomorfismi di gruppi.

I gruppi considerati nel teorema 6 sono anche detti *gruppi dei fregi*, in quanto sono tutti i possibili gruppi di simmetria dei fregi usati come decorazioni in architettura (vedi figura 37). In effetti questi gruppi di simmetria caratterizzano qualunque decorazione realizzata ripetendo un motivo lungo una banda piana e più in generale qualunque struttura piana che si ripeta lungo una direzione.

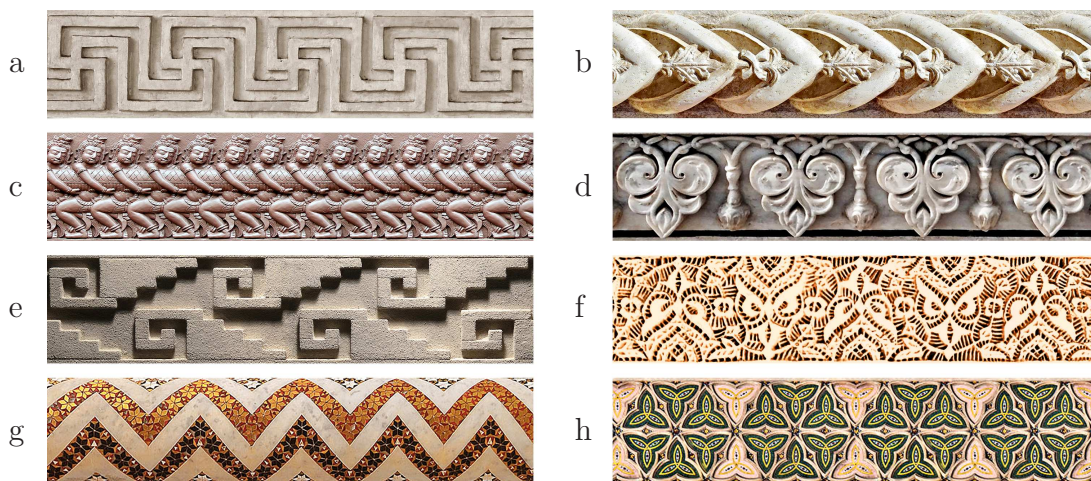


FIGURA 37. Esempi di fregi. a) Ara Pacis a Roma. b) Santa Maria dei Freri a Venezia. c) Silver pagoda a Phnom Penh in Cambogia. d) Mausoleo Taj Mahal ad Agra in India. e) Sito archeologico di Mitla in Messico. f) Bahia palace a Marrakesh in Marocco. g) Cattedrale di Monreale. h) Duomo di Orvieto.

ESERCIZIO 23. Determinare gruppi di simmetria dei fregi nella figura 37. Per ciascuno dei sette gruppi dei fregi, realizzare una tassellazione 1-periodica del piano in rettangoli (come nella figura 8) avente tale gruppo come gruppo di simmetria.

Consideriamo infine il caso periodico, in cui G è un gruppo discreto di isometrie del piano euclideo contenente traslazioni in diverse direzioni. Analogamente a quanto fatto nel caso 1-periodico, iniziamo individuando delle “traslazioni minime”, la cui esistenza è garantita dal fatto che G è discreto. Più precisamente, esistono due traslazioni $\tau_v, \tau_w \in G$, tali che il vettore v abbia modulo minimo $\ell > 0$ e il vettore w abbia modulo minimo $m \geq \ell$ tra i vettori non paralleli a v . Dopo aver scelto v arbitrariamente, scegliamo w in modo che l'angolo orientato α da v a w sia positivo minimo, e a meno di riflessione rispetto a una retta parallela a v possiamo assumere $0 < \alpha \leq \pi/2$. Inoltre se $m = \ell$ allora $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$, altrimenti si avrebbe $\tau_{w-v} = \tau_w \circ \tau_v^{-1} \in G$ con $w - v$ vettore di modulo $< \ell$.

Le due traslazioni τ_v e τ_w generano tutte le traslazioni di G , infatti per ogni traslazione $\tau_u \in G$ esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $u = av + bw$, da cui $\tau_u = \tau_v^a \circ \tau_w^b$. Altrimenti per opportuni $a, b \in \mathbb{Z}$ si avrebbe un vettore $u - av - bw$ nella regione grigia mostrata nella figura 38 a sinistra, di modulo $< m$ ($< \ell$ se u è parallelo a v e quindi $b = 0$) e tale che $\tau_{u-av-bw} = \tau_u \circ \tau_v^{-a} \circ \tau_w^{-b} \in G$ (verificare).

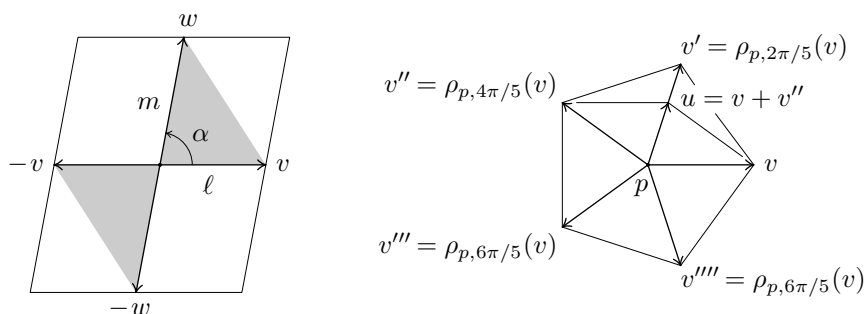


FIGURA 38.

LEMMA 7. Se G è un gruppo discreto periodico di isometrie del piano euclideo, allora le eventuali rotazioni contenute in G devono essere di ordine 2, 3, 4 o 6.

Dimostrazione. Poiché G è discreto, ogni eventuale rotazione in G deve essere del tipo $\rho_{p, 2\pi/n}$, cioè avere ordine finito n (come già visto nel caso non periodico). Inoltre, se G contiene una tale rotazione di ordine $n > 2$, si deve avere $m = \ell$ e $2\pi/n \geq \alpha$, in quanto $\tau_{\rho_{p, 2\pi/n}(v)} \in G$ con $\rho_{p, 2\pi/n}(v)$ vettore di modulo ℓ , e dalla disuguaglianza $\alpha \geq \pi/3$ si deduce $n \leq 6$. D'altra parte, non si può avere $n = 5$, altrimenti G conterrebbe una traslazione τ_u con $u = v + v''$ di modulo $< \ell$ (vedi figura 38 a destra). Ne segue che le eventuali rotazioni in G sono di ordine $n = 2, 3, 4$ o 6 . \square

TEOREMA 8. I gruppi discreti periodici di isometrie del piano euclideo, a meno di isomorfismi indotti dalle similitudini, cioè a meno di coniugio nel gruppo delle similitudini del piano euclideo, sono costituiti dalle due famiglie dipendenti da due parametri reali indicate nella figura 39, dalle sette famiglie dipendenti da un parametro reale indicate nelle figure 41 e 42, dagli otto gruppi singoli indicati nelle figure 44, 45 e 46.

Dimostrazione. Se G non contiene altre trasformazioni oltre alle traslazioni, allora è interamente generato da τ_v e τ_w ed è quindi univocamente determinato dai vettori v e w . Dal punto di vista algebrico si ha $G \cong \mathbb{Z}^2$ qualunque siano v e w , cioè a meno di isomorfismi si ha un solo gruppo. Al contrario, dal punto di vista geometrico si ha un'intera famiglia di gruppi non equivalenti dipendenti da due parametri. Infatti, a meno di similitudini possiamo assumere v in posizione standard e $\ell = 1$, ma G resta comunque dipendente dai due parametri m e α . Tali parametri determinano il parallelogramma generico (a meno di similitudini) generato da v e w , nel quale possiamo immaginare una decorazione generica (priva di simmetrie) che si ripete su tutto il piano per traslazione mediante l'azione di G .

La situazione è rappresentata nella figura 39 a sinistra e la relativa famiglia di gruppi di simmetria G è denotata con p1. Qui e nelle figure che seguono è evidenziato in grigio il *dominio fondamentale* che genera l'intera configurazione mediante l'azione del gruppo delle traslazioni contenute in G (che solo nel caso in esame coincide con tutto G). Inoltre i gruppi di simmetria sono denotati con un codice simile a quello visto nel caso 1-periodico, relativo alla classificazione dei reticoli cristallografici.

Se invece la decorazione è simmetrica rispetto al centro del parallelogramma, allora il gruppo di simmetria dell'intera configurazione contiene anche tutte le rotazioni di ordine 2 (simmetrie centrali) i cui centri sono indicati con i dischetti rossi nella figura 39 a destra. La famiglia di questi gruppi di simmetria è denotata con p2.

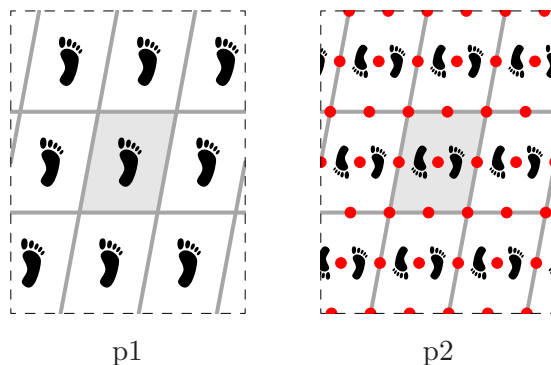


FIGURA 39. I gruppi p1 (di sole traslazioni) e p2 (con rotazioni di ordine 2).

Tra i gruppi di tipo p1 e p2 non vi sono gruppi intermedi, in quanto una sola delle rotazioni presenti in p2 insieme alle traslazioni τ_v e τ_w genera tutte le altre (verificare). Poiché il generico parallelogramma ha come unica simmetria quella centrale, non vi sono altre possibilità con v e w generici. Infatti, lo stesso argomento usato sopra nel caso 1-periodico mostra che i centri delle rotazioni di ordine 2 non possono essere disposti diversamente, altrimenti si otterrebbero nuove traslazioni (verificare). D'altra parte la presenza di rotazioni di ordine maggiore di due o di riflessioni/glissoriflessioni impone dei vincoli sui vettori v e w , come vedremo nel seguito della dimostrazione.

Consideriamo il caso in cui G contenga anche riflessioni/glissoriflessioni, ma non rotazioni. In base alla proposizione 3, possiamo affermare che tutti gli assi delle riflessioni/glissoriflessioni hanno la stessa direzione, e quindi tali trasformazioni agiscono tutte nello stesso modo sui vettori. Sia σ una qualunque di queste trasformazioni. Denotiamo con r l'asse di σ e poniamo $v' = \sigma(v)$ e $w' = \sigma(w)$. Se r è parallela a v , allora $v' = v$ e $w + w'$ è parallelo a v , quindi si deve avere $w + w' = kv$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ricordando come è stato scelto il vettore w ci si riduce a uno dei due casi illustrati nelle figure 40a e 40b, corrispondenti rispettivamente a $k = 0$ e $k = 1$. Nel primo caso w è ortogonale a v , mentre nel secondo possiamo sostituire w con $w - w'$ che è ortogonale a v . Se r è parallela a w , si ragiona in modo analogo con i ruoli di v e w invertiti. Altrimenti, se r non è parallela né a v né a w , allora possiamo assumere $w = v'$ e sostituire v e w con $v+w$ e $w-v$ che risultano tra loro ortogonali. Entrambe queste ultime due sostituzioni riducono il gruppo delle traslazioni, ma il gruppo originale può essere ricostituito con la sola aggiunta del vettore w (verificare). Ne segue che nelle figure 40b e 40c si avranno tassellazioni formate da due famiglie di tasselli rettangolari, una traslata di w rispetto all'altra.

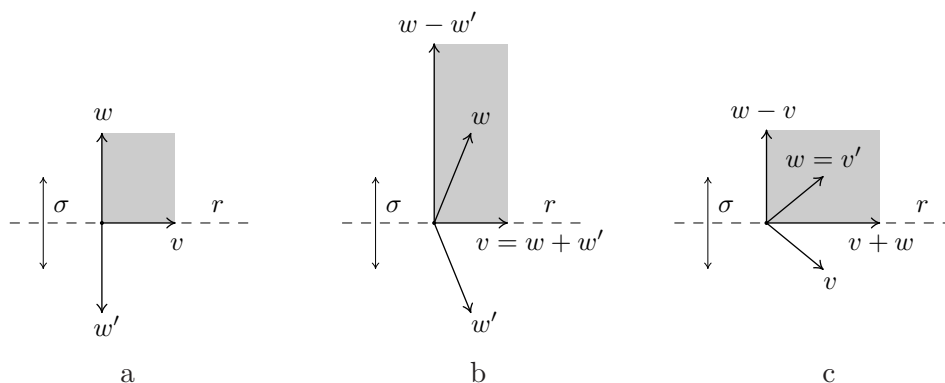


FIGURA 40.

In tutti i casi, il gruppo G può essere pensato come gruppo di simmetria di una tassellazione rettangolare del piano opportunamente decorata, in modo che le uniche simmetrie siano traslazioni e riflessioni/glissoriflessioni con assi ortogonali a uno dei lati dei tasselli, diciamo il vettore u di lunghezza h . Come già visto per $p1$ e $p2$, a meno di similitudini possiamo assumere u in posizione standard e $h = 1$, ma la tassellazione e quindi il gruppo G restano dipendenti da un parametro reale rappresentato dalla lunghezza dell'altro lato dei tasselli.

Si ottengono così le tre famiglie di gruppi illustrate nella figura 41, dove la direzione di u è orizzontale e nel caso di cm il dominio fondamentale è un rombo con lo stesso centro ma di area doppia rispetto rettangolo originale, o equivalentemente h è doppio rispetto agli altri casi. Qui e nelle figure che seguono sono indicati in blu gli assi che ammettono anche la riflessione, mentre sono indicati in verde quelli

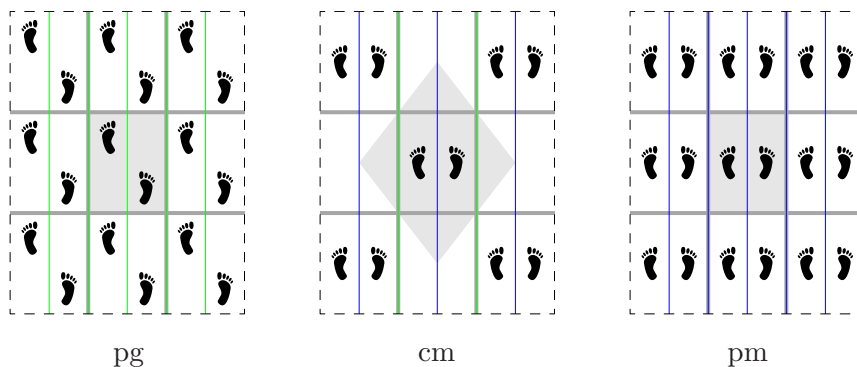


FIGURA 41. I gruppi pg , cm , pm (con riflessioni/glissoriflessioni).

che ammettono solo glissoriflessioni. Infatti, ragionando come nel caso 1-periodico, si hanno le seguenti proprietà (verificare): 1) gli assi delle riflessioni/glissoriflessioni sono infiniti, ciascuno alla stessa distanza $h/2$ dal precedente e dal successivo; 2) se rispetto a un asse r c'è la riflessione σ_r , allora ci sono anche tutte le riflessioni $\sigma_{\tau_{ku}(r)}$ con $k \in \mathbb{Z}$; 3) se rispetto a un asse r ci sono solo glissoriflessioni, lo stesso vale per tutti gli assi $\tau_{ku}(r)$ con $k \in \mathbb{Z}$; 4) tutti gli assi sono dello stesso tipo (come nel punto 2 o nel punto 3) o di entrambi i tipi alternati tra loro; 5) ogni fascia verticale di rettangoli, doppia nel caso di cm, ha simmetria di tipo p1m1 o p1g1.

Simmetrizzando le decorazioni nella figura 41 che danno origine alle famiglie di gruppi pg, cm e pm si ottengono le quattro nuove famiglie di gruppi illustrate nella figura 42. Più precisamente, pgg e pmg derivano entrambe da pg mediante due simmetrizzazioni non equivalenti, mentre cmm e pmm derivano rispettivamente da cm e pm. Anche in questo caso, tenendo conto che l'unica simmetria rotazionale del generico rettangolo è quella centrale di ordine 2 e ragionando in modo analogo a come accennato per p1 e p2, si può provare che queste sono le uniche estensioni possibili dei gruppi pm, cm e pg aventi solo rotazioni di ordine 2 (verificare).

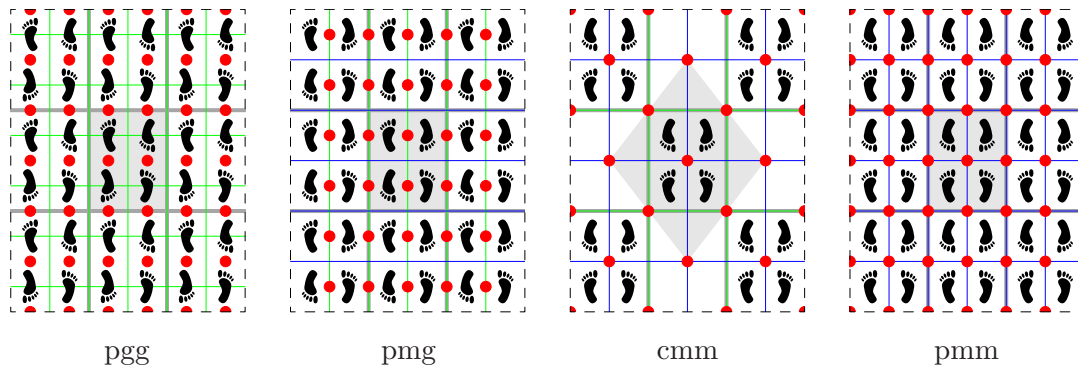


FIGURA 42. I gruppi pgg, pmg, cmm, pmm (con rotazioni di ordine 2).

I gruppi fin qui determinati esauriscono tutte le possibilità se le uniche rotazioni presenti sono di ordine 2. Infatti, come abbiamo osservato sopra, sia in assenza che in presenza di riflessioni/glissoriflessioni, i centri di rotazione di ordine 2 sono tutti e soli quelli mostrati nelle figure 39 e 42.

Supponiamo ora che G contenga almeno una rotazione ρ di ordine $n > 2$. Per il lemma 7 possiamo assumere $\rho = \rho_{p, 2\pi/n}$ con $n = 3, 4$ o 6 . Ciò implica che $\rho(v)$ ha lo stesso modulo ℓ ma direzione diversa rispetto a v , quindi $m = \ell$. La figura 43 mostra le famiglie di rotazioni che si ottengono nei diversi casi componendo ρ con le traslazioni di G . Se $n = 3$ allora $w = -\rho^2(v)$, e si ottengono tutte le rotazioni di ordine 3 intorno ai vertici e ai centri degli esagoni della tassellazione regolare \mathcal{T}_6 (vedi figura 16). Infatti, oltre ai centri di rotazione indicati dai dischetti pieni nella figura 43a, che si possono facilmente determinare con l'aiuto della proposizione 3 (verificare), ci sono tutti i loro traslati mediante le traslazioni τ_{av+bw} di G (tra i quali anche $\tau_v(p)$, $\tau_w(p)$, $\tau_{\rho(v)}(p)$, $\tau_{-\rho(v)}(p)$, $\tau_{-v}(p)$, $\tau_{-w}(p)$ e $\tau_{-\rho(v)}(p)$ non evidenziati nella figura). Se $n = 4$ allora $w = \rho(v)$, e si ottengono in modo analogo tutte le rotazioni di ordine 4 intorno ai vertici e ai centri dei quadrati della tassellazione regolare \mathcal{T}_4 (vedi figura 16), e quelle di ordine 2 intorno ai centri dei lati, indicate nella figura 43b con i dischetti vuoti (verificare). Finalmente, anche per $n = 6$ si ha $w = \rho(v)$,

e in questo caso si ottengono tutte le rotazioni di ordine 6 intorno ai centri degli esagoni della tassellazione \mathcal{T}_6 , quelle di ordine 3 intorno ai vertici e quelle di ordine 2 intorno ai centri dei lati (verificare). In tutti i casi, quelle individuate sono tutte e sole le rotazioni di G , in quanto ogni altra rotazione implicherebbe nuove traslazioni (verificare).

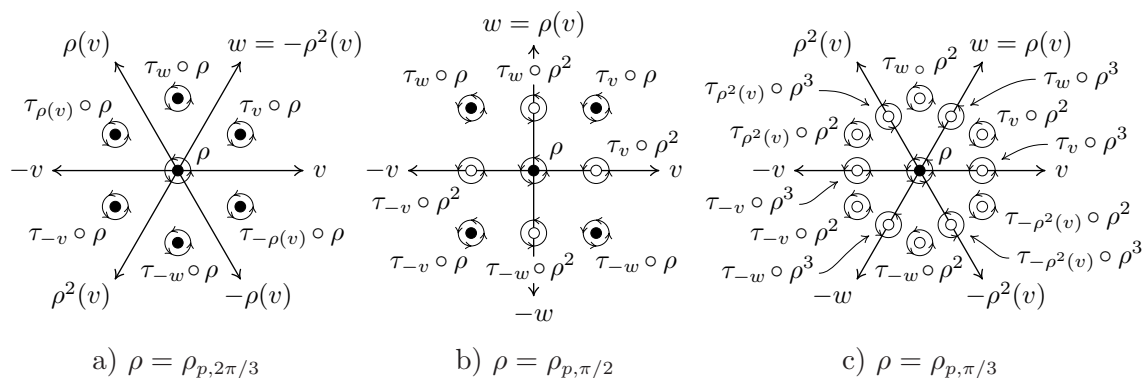


FIGURA 43.

Se G non contiene riflessioni/gliissoriflessioni, allora è equivalente a meno di similitudini a uno dei gruppi p3, p4 e p6 nelle figure 44, 45 e 46. I gruppi p3 e p6 sono i gruppi di simmetria della tassellazione regolare \mathcal{T}_6 decorata in modo da ridurre le simmetrie degli esagoni ai gruppi \mathbb{Z}_3 e \mathbb{Z}_6 rispettivamente (vedi figura 33). Analoga-

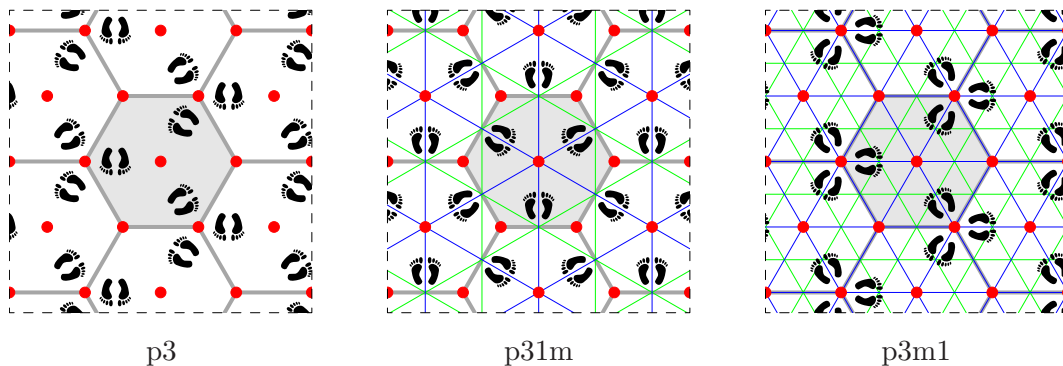


FIGURA 44. I gruppi p3, p31m e p3m1 (con rotazioni di ordine 3).

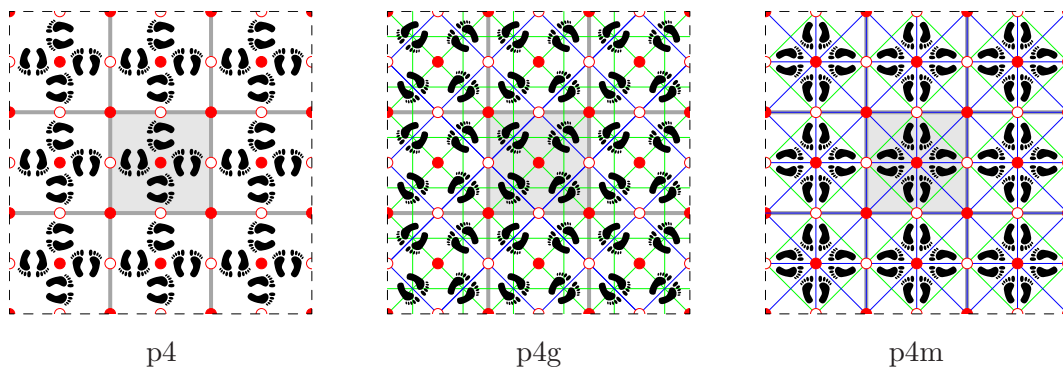


FIGURA 45. I gruppi p4, p4g e p4m (con rotazioni di ordine 4).

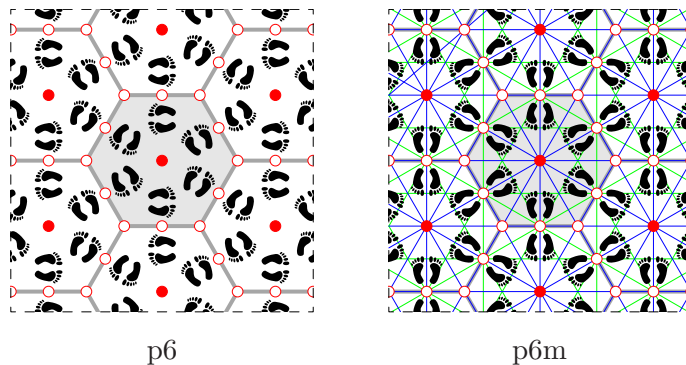


FIGURA 46. I gruppi p6 e p6m (con rotazioni di ordine 6).

mente il gruppo p4 è il gruppo di simmetria della tassellazione regolare \mathcal{T}_4 decorata in modo da ridurre le simmetrie dei quadrati al gruppo \mathbb{Z}_4 .

I rimanenti gruppi nelle figure 44, 45 e 46, si ottengono dai gruppi p3, p4 e p6 aggiungendo riflessioni/glissoriflessioni compatibili con il sottogruppo delle traslazioni generato da τ_v e τ_w , cioè tali da non generare ulteriori traslazioni. In particolare, nel caso di p6 l'aggiunta di una sola di tali riflessioni/glissoriflessioni porta al gruppo p6m, che coincide con il gruppo di simmetria della tassellazione \mathcal{T}_6 (verificare), mentre nel caso di p4 c'è il gruppo intermedio p4g prima di arrivare al gruppo p4m, che coincide con il gruppo di simmetria della tassellazione \mathcal{T}_4 (verificare). Notiamo che le decorazioni corrispondenti a p4m e p6m nelle figure 45 e 46 non comportano restrizioni al gruppo di simmetria (vedi figura 33 per il caso esagonale). Infine, il gruppo p3 ammette le due estensioni non equivalenti p31m e p3m1 mostrate in figura 44, che costituiscono i gruppi di simmetria della tassellazione \mathcal{T}_6 con due diverse decorazioni che riducono entrambe il gruppo di simmetria degli esagoni a \mathbb{D}_3 (verificare). \square

Ricordiamo che il gruppo delle *trasformazioni affini* del piano, cioè le trasformazioni caratterizzate dalla sola proprietà di mandare rette in rette, agisce transitivamente sull'insieme dei parallelogrammi, cioè due qualunque parallelogrammi sono equivalenti a meno di trasformazioni affini. Ne segue che ciascuna delle nove famiglie di gruppi considerate nel teorema 8 e illustrate nelle figure 39, 41 e 42 si riduce a meno di isomorfismi indotti dalle trasformazioni affini a un solo gruppo, coincidente con il gruppo di simmetria della tassellazione \mathcal{T}_4 con una opportuna decorazione.

Quindi, a meno di tali isomorfismi si ottengono diciassette gruppi discreti periodici, descritti nelle figure 39, 41, 42, 44, 45 e 46, usualmente denominati *gruppi della carta da parati* o anche *gruppi cristallografici piani* (per distinguerli da quello nello spazio, effettivamente usati in cristallografia), in quanto caratterizzano qualunque decorazione realizzata ripetendo un motivo di due direzioni o più in generale qualunque struttura piana periodica.

Questi diciassette gruppi di simmetria si ritrovano nelle decorazioni di tutte le culture e di tutte le epoche. In particolare, è stata formulata l'ipotesi che fossero già tutti presenti nelle decorazioni dell'antico Egitto. Come osservato all'inizio, nella cultura islamica si ha la maggior diffusione e varietà di utilizzo di questi gruppi nelle decorazioni degli edifici religiosi e non. In particolare, il palazzo dell'Alhambra a Granada

è famoso per i suoi mosaici geometrici le cui simmetrie realizzano molti dei gruppi dei diciassette gruppi periodici. Ma forse non tutti, come discusso da B. Grünbaum nell'articolo *What symmetry groups are present in the Alhambra?* apparso nel 2006 sulla rivista "Notices of the AMS", in occasione del Congresso Internazionale dei matematici tenutosi in quell'anno a Madrid.



FIGURA 47. Mosaici del palazzo dell'Alhambra a Granada.

ESERCIZIO 24. Determinare i gruppi di simmetria dei mosaici nella figura 47 nelle diverse versioni: con i colori effettivi, in bianco e nero (considerando nero tutto ciò che non è bianco), senza colorazione (considerando tutti i colori equivalenti, bianco incluso, con i soli contorni tra colori diversi delineati in nero).

Concludiamo questa sezione con qualche ulteriore considerazione sulle tassellazioni (proprie) del piano euclideo non periodiche, cioè tassellazioni il cui gruppo di simmetria non contiene alcuna traslazione. Come abbiamo visto fin dall'inizio, non è difficile costruire una tale tassellazione con tasselli rettangolari tutti congruenti a

un unico prototipo (figura 8c). Con gli stessi tasselli è comunque anche possibile realizzare tassellazioni periodiche (figura 8a).

È naturale chiedersi se esista un insieme finito di prototipi *aperiodico*, nel senso che consente di realizzare solo tassellazioni non periodiche del piano euclideo. All'inizio degli anni '60 il logico matematico Hao Wang congetturò che la risposta fosse negativa. In questo caso il *problema della tassellazione*, cioè stabilire se con un dato insieme di prototipi si può tassellare il piano o no sarebbe stato decidibile, cioè sarebbe esistito un algoritmo in grado di risolvere il problema in un tempo finito per qualunque insieme di prototipi. Infatti, la non esistenza di insiemi di prototipi aperiodici avrebbe consentito di limitare il controllo alle eventuali tassellazioni periodiche, cioè quelle ottenibili replicando per traslazione una configurazione finita di tasselli.

Ma nel 1966 Robert Berger, un allievo di Wang, riuscì a costruire un insieme di prototipi aperiodico, mostrando quindi che il problema della tassellazione è indecidibile, in quanto equivalente al problema della terminazione per le macchine di Turing. L'insieme è costituito da prototipi ottenuti decorando un unico quadrato in modo da imporre opportune condizioni di adiacenza, o equivalentemente da 20.426 diversi prototipi.

Successivamente sono stati trovati molti altri insiemi di prototipi aperiodici ben più ridotti di quello appena menzionato, in particolare quello contenente 6 prototipi proposto da Raphael Robinson e mostrato nella figura 48.

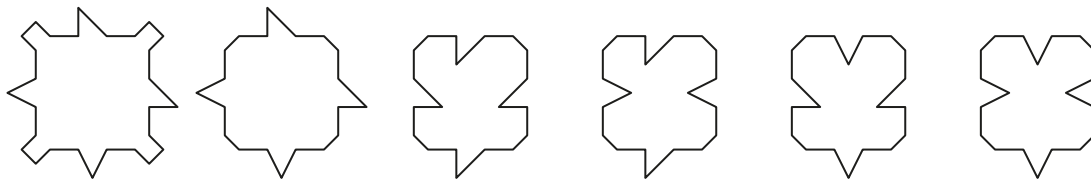


FIGURA 48. Insieme di prototipi aperiodico di Robinson.

I due insiemi di prototipi aperiodici \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 descritti nella figura 49 e costituiti ciascuno da due soli quadrilateri con le condizioni di adiacenza derivanti dalla colorazione degli angoli e delle frecce, sono stati proposti da Roger Penrose. Il primo

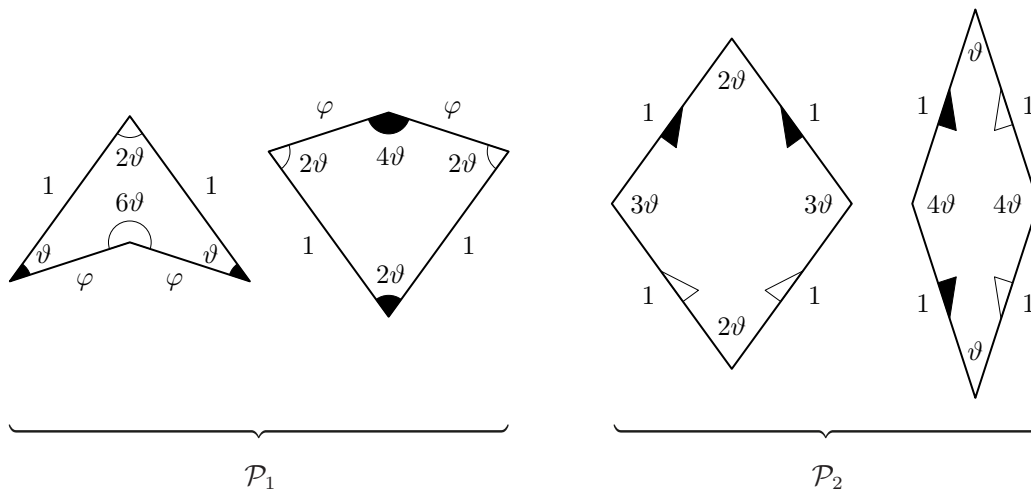


FIGURA 49. Prototipi aperiodici di Penrose ($\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$ e $\vartheta = \pi/5$).

presenta il vantaggio di essere più semplice da trattare, soprattutto nelle condizioni di adiacenza, mentre il secondo è interessante in quanto formato da convessi, infatti rombi. Codificando le condizioni di adiacenza con opportune deformazioni dei lati si ottengono nuovi insiemi di prototipi aperiodici formati da due soli elementi (non convessi). Non è noto se esistono insiemi di prototipi aperiodici formati da un solo poligono o da due soli poligoni convessi (senza condizioni di adiacenza).

ESERCIZIO 25. Provare che i 7 tipi di vertici mostrati nella figura 50 sono gli unici possibili per l'insieme \mathcal{P}_1 e determinare i 14 possibili tipi di vertici per l'insieme \mathcal{P}_2 .

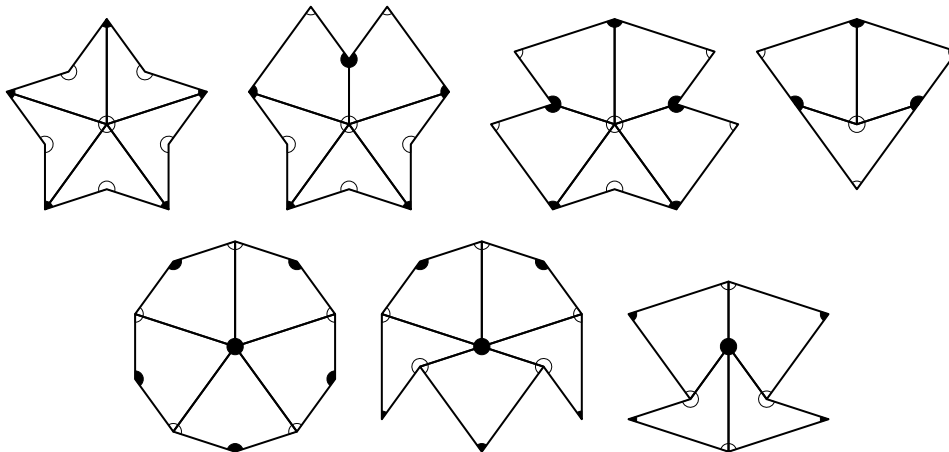


FIGURA 50. Possibili tipi di vertici per i tasselli di tipo \mathcal{P}_1

I due insiemi di prototipi \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sono equivalenti, nel senso che ogni tassellazione \mathcal{T}_1 del piano realizzata con tasselli di tipo \mathcal{P}_1 induce una tassellazione \mathcal{T}_2 realizzata con tasselli di tipo \mathcal{P}_2 , e viceversa. Inoltre \mathcal{T}_1 è periodica se e solo se lo è \mathcal{T}_2 , e quindi \mathcal{P}_1 è un insieme di prototipi aperiodico se e solo se lo è \mathcal{P}_2 .

L'equivalenza è dimostrata nella figura 51, dove si vede come realizzare i due prototipi di \mathcal{P}_1 mediante tasselli di tipo \mathcal{P}_2 ridotti di un fattore $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$ (a sinistra), e come realizzare i due prototipi di \mathcal{P}_2 mediante tasselli di tipo \mathcal{P}_1 ridotti dello stesso fattore φ (a destra). In effetti, in tutti e quattro i casi ci sono

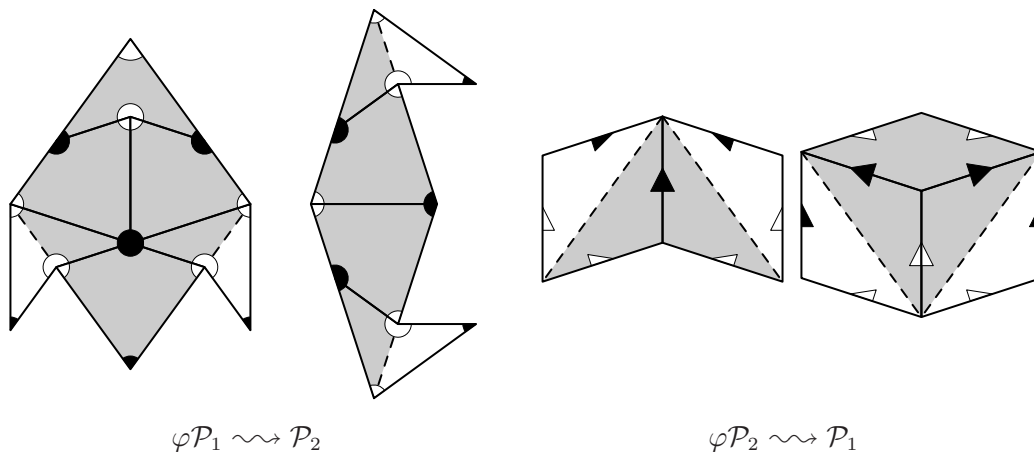


FIGURA 51. Equivalenza tra i due insiemi di prototipi \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 ($\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$).

due triangoli in eccesso, i quali possono però essere sempre condivisi con i tasselli adiacenti nella tassellazione in virtù delle condizioni di adiacenza (verificare).

Concentriamoci quindi sulle tassellazioni di tipo \mathcal{P}_1 . Osserviamo innanzi tutto che iterando le decomposizioni illustrate nella figura 51 si ha $\varphi^2\mathcal{P}_1 \rightsquigarrow \varphi\mathcal{P}_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}_1$. Ciò significa che ogni tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 , induce un'analogha tassellazione con tasselli più piccoli di un fattore φ^2 . Riscaldando la nuova tassellazione di un fattore $\varphi^{-2} = (1 + \varphi)^2$, si possono poi riportare i tasselli alle dimensioni originali.

In effetti come mostrato nella figura 52 un analogo processo può essere realizzato direttamente sui tasselli di tipo \mathcal{P}_1 , senza coinvolgere quelli di tipo \mathcal{P}_2 . In questo caso i nuovi tasselli sono ridotti semplicemente di un fattore φ , e vanno perciò riscaldati di un fattore $\varphi^{-1} = 1 + \varphi$.

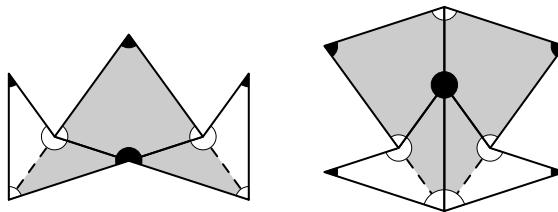


FIGURA 52. $\varphi\mathcal{P}_1 \rightsquigarrow \mathcal{P}_1$

Penrose ha chiamato il processo appena descritto *deflazione*. Esso definisce un'applicazione dall'insieme di tutte le tassellazioni di tipo \mathcal{P}_1 a se stesso. In base all'esercizio 25 si ha che tale applicazione è biunivoca. Cioè ogni tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 si ottiene in modo unico applicando il processo di deflazione a un'altra tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 (verificare). I tasselli di quest'ultima sono inizialmente più grandi di quelli iniziali di un fattore $1 + \varphi$ e vengono poi riscaldati di un fattore φ . Questo processo inverso è stato chiamato da Penrose *inflazione*.

ESERCIZIO 26. Trovare una decomposizione analoga a quella di figura 52 per i prototipi dell'insieme \mathcal{P}_2 , che consenta di definire i processi di deflazione e inflazione per le tassellazioni di tipo \mathcal{P}_2 .

Tutte le considerazioni fatte finora riguardano ipotetiche tassellazioni di tipo \mathcal{P}_1 , di cui non abbiamo però ancora provato l'esistenza! Possiamo comunque osservare che il processo di deflazione si può applicare anche a una tassellazione parziale, che ricopre cioè solo una regione R del piano. In tal caso il risultato finale è una tassellazione di una regione più grande R' , coincidente approssimativamente con la regione R scalata di un fattore lineare $1 + \varphi$ (a cui vanno aggiunti dei triangoli in eccesso). Ciò implica che è possibile costruire tassellazioni di tipo \mathcal{P}_1 di regioni (contenenti dischi) arbitrariamente grandi. In base al seguente teorema di estensione, questo basta a garantire l'esistenza di una tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 di tutto il piano.

TEOREMA DI ESTENSIONE. Sia \mathcal{P} un insieme finito di prototipi poligonali. Se esistono tassellazioni proprie di tipo \mathcal{P} di regioni contenenti dischi arbitrariamente grandi, allora esiste almeno una tassellazione propria di tipo \mathcal{P} di tutto il piano.

Dimostrazione. A meno di traslazioni possiamo assumere che i dischi nell'enunciato siano tutti centrati nell'origine. Possiamo quindi costruire una successione di tassellazioni \mathcal{T}_n con $n \geq 1$, tale che ogni \mathcal{T}_n tassella una regione connessa contenente

il disco D_n centrato nell'origine di raggio n . Per ogni $n \geq 1$ sia $T_{0,n}$ un tassello di \mathcal{T}_n contenente l'origine. Poiché l'insieme \mathcal{P} è finito, possiamo anche assumere, passando eventualmente a una sottosuccessione, che i tasselli $T_{0,n}$ siano tutti congruenti allo stesso prototipo. Quindi a meno di congruenze possiamo anche assumere che questi coincidano tutti con lo stesso tassello T_0 . A questo punto si procede con un argomento diagonale “alla Cantor”. Fissato un lato l di T_0 , c'è solo un numero finito di possibili tasselli adiacenti a T_0 lungo l , quindi deve esistere una sottosuccessione di tassellazioni nelle quali tali tasselli siano sempre lo stesso, diciamo T_1 . Ripetendo il ragionamento con l un qualunque lato del bordo di $T_0 \cup T_1$, si trova una ulteriore sottosuccessione di tassellazioni nelle quali c'è sempre uno stesso tassello T_2 a condividere il lato l con $T_0 \cup T_1$. E così via... Assumendo di aver già individuato i tasselli T_0, \dots, T_{n-1} , si ripete il ragionamento con un lato l del bordo di $T_0 \cup \dots \cup T_{n-1}$ per individuare il successivo tassello T_n adiacente ai precedenti lungo il lato l in tutte le tassellazioni di una opportuna sottosuccessione. Si ottiene così una tassellazione $\mathcal{T} = \{T_n\}_{n \geq 1}$ dell'intero piano. L'unica accortezza, perché non rimangano buchi, è di considerare i lati l in modo da esaurire prima quelli più vicini all'origine. \square

In figura 53 vediamo la tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 che si ottiene applicando il procedimento descritto sopra a partire dal decagono centrale. Poiché la configurazione

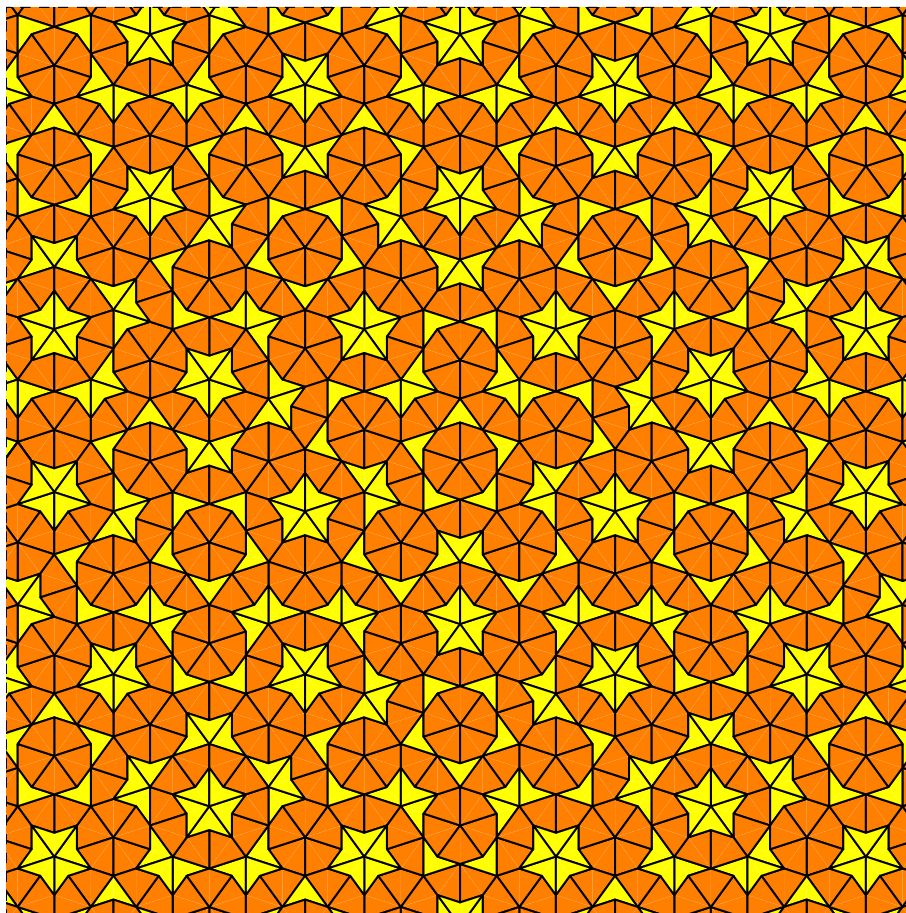


FIGURA 53. Tassellazione di Penrose con simmetria di ordine 5.

iniziale ha simmetria di ordine 5, lo stesso vale per tutta la tassellazione, che non può quindi essere periodica per il lemma 7. Poiché vogliamo provare che nessuna tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 è periodica, tale argomento non è sufficiente, infatti partendo da una configurazione iniziale non simmetrica si sarebbe ottenuta una tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 senza alcuna simmetria.

TEOREMA 9. L'insieme di prototipi \mathcal{P}_1 è aperiodico. Infatti esistono infinite tassellazioni del piano euclideo di tipo \mathcal{P}_1 , ma nessuna di queste è invariante rispetto a una qualunque traslazione.

Dimostrazione. Così come la tassellazione in figura 53 è stata generata a partire dal decagono centrale, è possibile generare tassellazioni di tipo \mathcal{P}_1 a partire da qualunque tassellazione parziale. Poiché esistono infinite tassellazioni parziali, nessuna delle quali equivalente a una parte di un'altra (verificare), si ottengono in questo modo infinite tassellazioni del piano di tipo \mathcal{P}_1 a due a due non equivalenti.

Sia ora \mathcal{T} una tassellazione di tipo \mathcal{P}_1 e assumiamo per assurdo che esista una traslazione τ_v tale che $\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. Allora la tassellazione \mathcal{T}' che si ottiene da \mathcal{T} per inflazione ma senza la riscalatura finale (vedi figura 54), ha tasselli più grandi rispetto a \mathcal{T} di un fattore lineare $1 + \varphi$ e soddisfa anch'essa la proprietà $\tau_v(\mathcal{T}') = \mathcal{T}'$. Iterando il discorso si potrebbe costruire una tassellazione $\mathcal{T}^{(n)}$ con tasselli ingranditi di un fattore lineare $(1 + \varphi)^n$ maggiore nel modulo di v tale che $\tau_v(\mathcal{T}^{(n)}) = \mathcal{T}^{(n)}$. Ma ciò è assurdo poiché tali tasselli avrebbero punti interni in comune con i propri traslati. \square

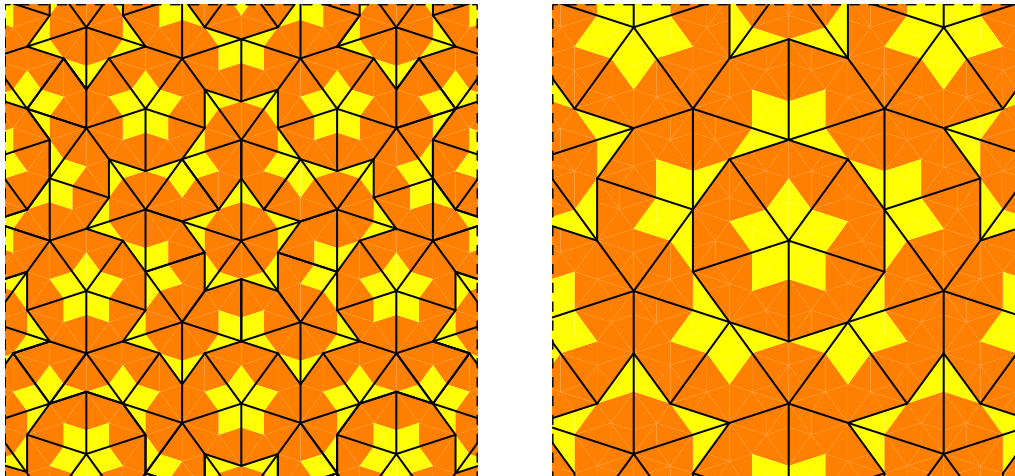


FIGURA 54. Tassellazioni ottenute applicando due volte il processo di inflazione senza riscalatura finale alla (parte centrale della) tassellazione in figura 53.

Lo stesso argomento usato nella dimostrazione consente di provare che, sebbene non siano globalmente invarianti per nessuna traslazione, le tassellazioni \mathcal{T} di tipo \mathcal{P}_1 hanno comunque una notevole proprietà di simmetria traslazionale parziale, per cui vengono chiamate *tassellazioni quasi-periodiche*. Cioè, data una qualunque porzione connessa $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ della tassellazione, formata da un numero finito (arbitrariamente grande) di tasselli, esistono in \mathcal{T} infinite repliche per traslazione di \mathcal{R} . Ciò dipende dal fatto che per n abbastanza grande \mathcal{R} risulta contenuta in un singolo tassello di $\mathcal{T}^{(n)}$,

o al più in una configurazione di tasselli come in figura 50. Ciò basta per dedurre l'esistenza delle infinite repliche per traslazione (verificare).

Le difficoltà concettuali a concepire la quasi-periodicità diventano ancora maggiori di fronte alla sua effettiva realizzazione nella struttura dei quasi-cristalli. In particolare, non è ancora chiaro come nella generazione dei quasi-cristalli, basata su un accrescimento di carattere locale, la natura possa tener conto di informazioni di carattere globale necessarie a prevenire la formazione di configurazioni localmente ammissibili, ma non ulteriormente estendibili.

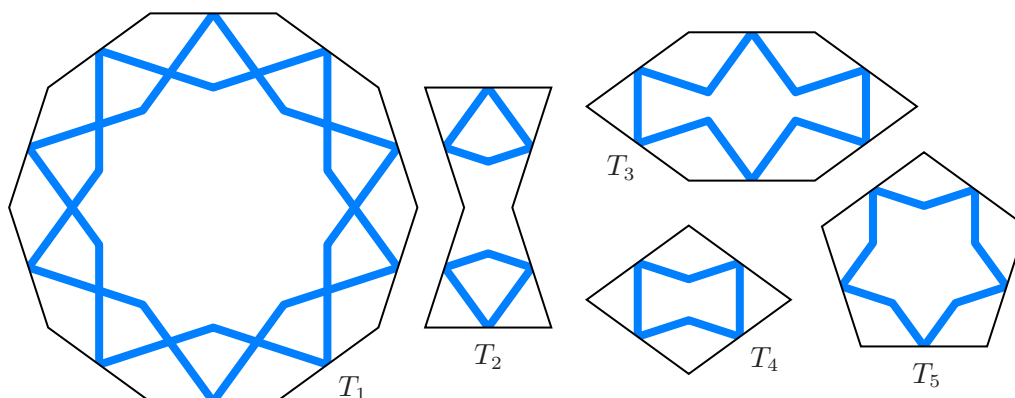


FIGURA 55. I tasselli “girih”.

Notiamo infine che anche in relazione alle tassellazioni quasi-periodiche l'arte sembra aver anticipato la matematica, come hanno suggerito per primi Peter J. Lu e Paul J. Steinhardt in un articolo apparso nel 2007 sulla rivista “Science”.

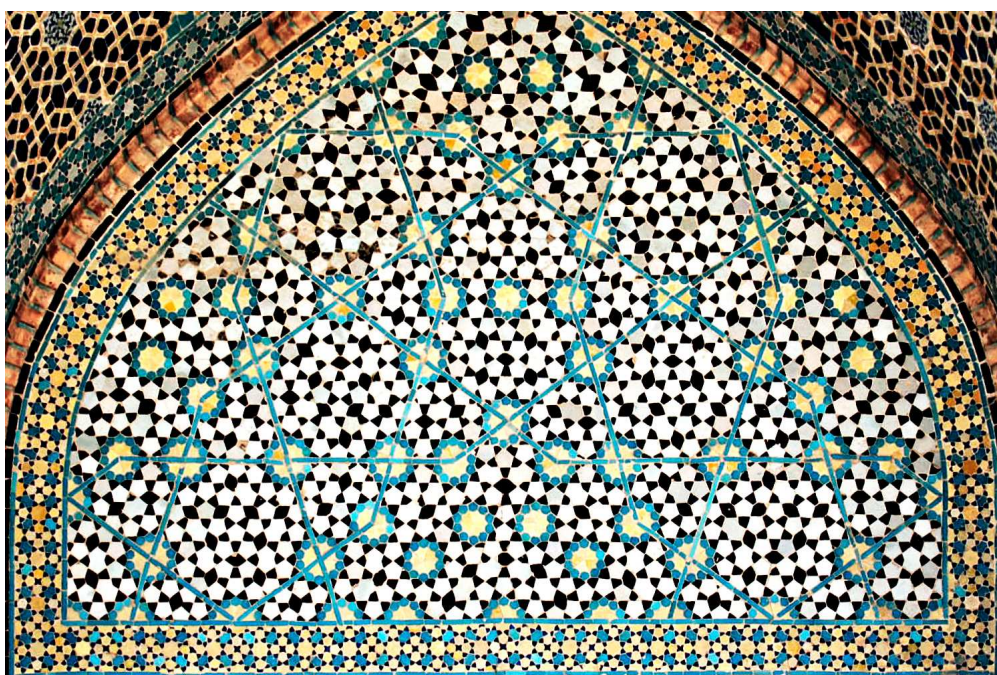


FIGURA 56. Moschea Sentiero dell'Imam a Esfahan – Iran (XV sec.)

Infatti i tasselli “girih” in figura 55 sono stati usati nell’arte islamica già dal medio evo, per costruire complesse decorazioni a intreccio come quella che abbiamo visto all’inizio in figura 2d, formate dall’unione delle linee azzurre che decorano i tasselli. In questo caso le decorazioni dei tasselli non servono a imporre condizioni di adiacenza, ma a realizzare l’intreccio decorativo che è lo scopo finale della tassellazione.

ESERCIZIO 27. Realizzare i tasselli T_1, T_2 e T_3 in figura 55 con lati lunghi $1 + \varphi$ usando quelli di Penrose di tipo \mathcal{P}_1 , senza tener conto delle condizioni di adiacenza per T_1 . Mostrare che lo stesso non si può fare per i tasselli T_4 e T_5 , né è possibile viceversa utilizzare i tasselli “girih” per realizzare quelli di Penrose di tipo \mathcal{P}_1 .

In effetti, l’esercizio precedente mostra che c’è una relazione tra i tasselli di tipo \mathcal{P}_1 e quelli “girih”, ma questi ultimi così come peraltro anche quelli di Penrose in assenza di condizioni di adiacenza, possono dare origine anche a tassellazioni periodiche, e in tal modo sono stati comunemente usati dagli artisti islamici (vedi figura 56).

Bibliografia

- [1] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley & Sons 1969.
- [2] P.R. Cromwell, *Polyhedra* Cambridge University Press 1997.
- [3] M. Gardner, *Pensore tiles to trapdoor ciphers*, MAA 1997.
- [4] B. Grünbaum e G.C. Shephard, *Tilings & patterns*, Dover Publications 2016.
- [5] D. Hilbert e S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing 1990.
- [6] C.E. Horne, *Geometric symmetry in patterns and tilings*, CRC Press 2000.
- [7] C.S. Kaplan, *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*, Morgan & Claypool Publishers 2009.
- [8] D.A. Klarner, *The Mathematical Gardner*, Wadsworth International 1981.
- [9] V. Klee e S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, MAA 1991.
- [10] R.J. Lang, *Twists, tilings and tessellations – Mathematical methods for geometric origami*, CRC Press 2018.
- [11] G.E. Martin, *Polyominoes – A guide to puzzles and problems in tiling*, MAA 1996.
- [12] L. Sadun, *Topology of tiling spaces*, AMS 2008.
- [13] J.R. Weeks, *The shape of space*, Marcel Dekker 2002.