Universitá degli Studi di Camerino

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Matematica e Applicazioni (L-35)

Equilibrio di Nash e Applicazioni alla Biologia

Candidata:

Camilla Alessandrelli

Relatori:

Prof. Riccardo Piergallini

Anno Accademico 2018 -2019

Indice

Introduzione

La nascita della teoria dei giochi viene ufficialmente fatta coincidere con la pubblicazione del libro *Theory of Game and Economic Behavior*, scritto dal matematico John von Neumann e dall'economista Oskar Morgenstern.
Il libro sviluppa un'interessante teoria riguardante i giochi a somma zero a due persone, ovvero quelle situazioni in cui un giocatore vince ciò che l'altro giocatore perde. In particolare in questo testo vengono trattati i cosiddetti giochi cooperativi, per cui la teoria si basa sull'analisi delle interrelazioni che possono formarsi tra i vari giocatori.
La teoria dei giochi è una disciplina della matematica applicata utilizzata principalmente per la modellizzazione di fenomeni economici. Essa analizza le decisioni individuali di un soggetto in una situazione di conflitto o di interazione strategica con altri e studia le possibili condizioni di equilibrio derivanti dalle interazioni tra gli stessi.
Queste interazioni strategiche avvengono tra individui intelligenti e razionali, dove, con intelligenti si indicano soggetti in grado di capire la situazione circostante e di effettuare ragionamenti logici complessi; essendo anche razionali, essi sono in grado di ordinare i loro obbiettivi in una scala di preferenze e di agire per ottenere il risultato ottimale tra quelli raggiungibili.
In altre parole quindi, la teoria dei giochi classica si occupa di un individuo razionale impegnato in una data interazione, o "gioco", con altri giocatori che deve decidere tra diverse opzioni, o "strategie", al fine di massimizzare un payoff dipendente dalle strategie degli altri giocatori (che a loro volta cercano di massimizzare il loro payoff).
John Nash introduce una "variante" della teoria dei giochi classica, i cui concetti principali verranno affrontati nel terzo capitolo, dopo aver introdotto qualche no-

zione preliminare utile alla coprensione degli argomenti che seguirammo. Questa tratta giochi non cooperativi, basandosi quindi sull'assenza di coalizione. Ciò vuol dire che ogni giocatore agisce in maniera indipendente, senza collaborare o comunicare con qualcun altro.

L'ingrediente base di questa teoria è la nozione di punto di equilibrio, in quanto permette di generalizzare il concetto di soluzione di un gioco a somma zero a due persone. In particolare, verranno trattate la definizione di punto di equilibrio, il concetto di funzione payoff e ed il teorema che afferma che un gioco non cooperativo finito ammette sempre almeno un punto di equilibrio, argomenti chiave di questa teoria.

La teoria evolutiva dei giochi, invece, è stata introdotta inizialmente da biologi evoluzionisti, anticipata in parte dai teorici del gioco classico, poi ripresa e formalizzata dai matematici, tra i quali Oskar Morgenstern e John von Neumann. Lo stesso John Nash, in una sezione inedita della sua tesi, tracciò un "approccio di azione di massa" alla sua nozione di equilibrio che, molti anni dopo, fu riscoperto come approccio evolutivo.

Questa teoria si concentra sulle dinamiche di gioco evolutive deterministiche, quindi delle dinamiche che descrivono come le frequenze delle strategie all'interno di una popolazione cambiano nel tempo, in base al successo delle stesse. Pertanto si occupa di intere popolazioni di giocatori, tutte programmate per utilizzare una strategia (o un tipo di comportamento).

Le strategie con payoff elevato si diffonderanno all'interno della popolazione (ciò può essere ottenuto attraverso l'apprendimento, copiando o ereditando strategie o persino tramite l'infezione) ed i payoff dipendono dalle azioni dei co-giocatori, cioè dalle frequenze delle strategie all'interno della popolazione.

La dinamica descritta dalla teoria evolutiva dei giochi viene rappresentata dalle cosiddette equazioni di replicazione (“replicator equations”), ovvero un sistema di equazioni differenziali ordinarie dipendenti dal tempo.

Capitolo 1

Nozioni e risultati preliminari

Per iniziare, mostriamo alcuni risultati preliminare necessari a capire meglio concetti che verranno introdotti più avanti per spiegare la teoria dei giochi non cooperativi, partendo da alcune semplici definizioni.

1.1 Richiami di algebra lineare

Consideriamo solamente il caso reale, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $U \subset V$ è detto *sottospazio vettoriale* (su $\mathbb{R}$) se e solo se

- U è uno spazio vettoriale con le operazioni di V ristrette a U
- $U \neq \emptyset$ e
    1. se $v_1, v_2 \in V$, allora $v_1 + v_2 \in U$
    2. se $a \in \mathbb{R}$ e $v \in U$, allora $av \in U$.

Definizione 1.2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $v_1, ..., v_n$ vettori in V. Definiamo *combinazione lineare* il vettore dato da

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

dove gli elemnti $a_1, ..., a_n$ appartengono a $\mathbb{R}$.

Definizione 1.3. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme, allora indichiamo con $\langle S \rangle$ il *sottospazio vettoriale generato* da S, dove $\langle S \rangle$ è definito come

- il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S
- l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di V contenenti S
- $\{a_1v_1 + ... + a_nv_n \,|\, a_i \in \mathbb{K},\, v_i \in S,\, n \geq 0\}$.

Osservazione 1.4. La combinazione lineare $a_1v_1+...+a_nv_n = 0_V$, per $v_1, ..., v_n \in V$ per $n = 0$, da cui ne deriva che $\langle\emptyset\rangle = \{0_V\}$.

Definizione 1.5. $S \subset V$ è un *insieme di generatori* se e solo se $V = \langle S\rangle$. Diciamo che V è finitamente generato se e solo se $\exists\, S \subset V$ insieme finito di generatori.

Definizione 1.6. $S \subset V$ è detto *linearmente dipendente* se e solo se $\exists\, v_1, ...v_n \in S$ distinti linearmente dipendenti; $S \subset V$ è detto *linearmente indipendente* se e solo se $\exists\, v_1, ...v_n \in S$ distinti linearmente indipendenti.

Possiamo quindi dare la definizione di base:

Definizione 1.7. $B \subset V$ è una *base* di V se e solo se

- B è un insieme di generatori linearmente indipendenti
- B è un insieme di generatori minimale
- B è linearmente indipendente massimale.

Osservazione 1.8. B è una base per $V \iff$ ogni vettore di V si può esprimere in modo unico come combinazione lineare di vettori di B.

Proposizione 1.9. Se V è uno spazio finitamente generato, allora esiste $B \subset V$ base per V (infatti ogni insieme di generatori contiene una base e ogni insieme linearmente indipendente è contenuto in una base).

Proposizione 1.10. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, allora tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.

Definizione 1.11. La dimensione di V, che indicheremo con $dimV$, coincide con la cardinalità delle basi di V.

Corollario 1.12. V è uno spazio finitamente generato se e solo se V ha dimensione finita. In tal caso:

1. sia $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ un insieme di generatori, allora $n \geq dimV$ e vale $n = dimV \Leftrightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ è base di V

2. sia $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ un insieme linearmente indipendente, allora $n \leq dimV$ e vale $n = dimV \Leftrightarrow \{v_1, ..., v_n\}$ è base di V.

Corollario 1.13. Sia $U \subset V$ sottospazio vettoriale, allora $dimU \leq dimV$. Vale $dimU = dimV$ se e solo se $U = V$.

Ricordiamo che il sottoinsieme $U \subset V$ è una base per V se gli elementi di U sono linearmente indipendenti e ogni vettore si può scrivere come combinazione lineare finita di elementi di U. Segue direttamente la prossima

Definizione 1.14. Uno spazio vettoriale libero V su U e $\mathbb{R}$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari formali di un numero finito di elementi di U a coefficienti in $\mathbb{R}$, cioè i vettori di V sono del tipo

$$\sum_i a_i u_i \qquad a_i \in \mathbb{R},\ u_i \in U$$

dove i coefficienti a_i sono non nulli ed in numero finito e somma e prodotto sono definite come segue:

$$\sum_i a_i u_i + \sum_i b_i u_i := \sum_i (a_i + b_i) u_i \qquad \forall\, a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \sum_i a_i u_i := \sum_i (\alpha a_i) u_i \qquad \forall\, a_i, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definizione 1.15. Definiamo $\varphi : V \to W$, con V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ un'*applicazione lineare* (o *omomorfismo* di spazi vettoriali) se e solo se

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$,

2. $\varphi(av) = a\varphi(v)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

φ è detto *isomorfismo* (*lineare*) se e solo se φ è lineare e biiettiva.

Definizione 1.16. Diciamo che due spazi vettoriale V e W sono isomorfi, e lo indichiamo con $V \cong W$ se e solo se $\exists\, \varphi : V \to W$ isomorfismo.

Proposizione 1.17. Siano V e W spazi vettoriali e sia $v_1, ..., v_n$ base di V, allora $\forall\, w_1, ..., w_n \in W$ esiste ed è unica $\varphi : V \to W$ applicazione lineare tale che $\varphi(v_i) = w_i$

Corollario 1.18. $V \cong W \Leftrightarrow dimV = dimW$, con V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

Proposizione 1.19. Sia $\varphi : V \to W$ un'applicazione lineare, allora

- $V' \subset V$ sottospazio vettoriale $W' \Rightarrow W' = \varphi(V') \subset W$ sottospazio vettoriale
- $W' \subset W$ sottospazio affine $V' \Rightarrow V' = \varphi^{-1}(W') \subset V$ sottospazio affine.

Ne deriva che $\varphi_{|V'} : V' \to W'$ è un'applicazione lineare.

Definizione 1.20. Siano $V_1, ..., V_n$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, allora definiamo $V_1 \times ... \times V_n$ lo spazio vettoriale *prodotto* con operazioni definite per componenti.

Esempio 1.1.1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ ripetuto n volte.

Proposizione 1.21. Siano $V_1, ..., V_n$ spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$, allora $dim\,(V_1 \times ... \times V_n) = dimV_1 + ... + dimV_n$.

Definizione 1.22. Dati $n+1$ spazi vettoriali $V_1, ..., V_n$ e W su $\mathbb{R}$, definiamo un'*applicazione multilineare* la funzione

$$f : V_1 \times ... \times V_n \to W$$

che associa a n vettori $v_1, ..., v_n$ rispettivamente di $V_1, ..., V_n$ un vettore $f(v_1, ..., v_n)$ che sia lineare in ogni componente, cioè deve valere

$$f(v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i + \beta {v_i}', v_{i+1}, ..., v_n) = \alpha f(v_1, ..., v_n) + \beta f(v_1, ..., {v_i}', ..., v_n),$$

per ogni componente i, per ogni n-upla di vettori $v_1, ..., v_n$ e $v_i, {v_i}' \in V_i$ e per ogni coppia di scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Se W coincide con il campo $\mathbb{R}$, allora l'applicazione si dice *forma multilineare.*

Proposizione 1.23. Siano $V_1, ..., V_n, W$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e sia $B_i = \{v_{i,1}, ..., v_{i,p_i}\}$ base di V_i per $i = 1, ..., n$, allora esiste ed è unica $f : V_1 \times ... \times V_n \to W$ applicazione multilineare.

Dimostrazione. Sia $B_i = \{v_{i,1}, ..., v_{i,p_i}\}$ base di V_i per $i = 1, ..., n$, allora ogni vettore $v_i \in V_i$ si può scrivere in modo unico come $v_i = \sum_{j_i=1}^{p_i} a_{i,j_i} v_{i,j_i} \in V_i$, per cui si ha $(v_1, v_2, ..., v_n) = \left(\sum_{j_1=1}^{p_1} a_{1,j_1} v_{1,j_1}, \sum_{j_2=1}^{p_2} a_{2,j_2} v_{2,j_2}, ..., \sum_{j_n=1}^{p_n} a_{n,j_n} v_{i,j_n}\right)$.
Quindi l'applicazione f manda la n-upla $(v_1, ..., v_n)$ in

$$f\,(v_1, ..., v_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{p_1} a_{1,j_1} v_{1,j_1}, \sum_{j_2=1}^{p_2} a_{2,j_2} v_{2,j_2}, ..., \sum_{j_n=1}^{p_n} a_{n,j_n} v_{i,j_n}\right)$$

e dalla multilinearità di f

$$f\left(\sum_{j_1=1}^{p_1} a_{1,j_1}v_{1,j_1}, \sum_{j_2=1}^{p_2} a_{2,j_2}v_{2,j_2}, ..., \sum_{j_n=1}^{p_n} a_{n,j_n}v_{i,j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_2=1}^{p_2}...\sum_{j_n=1}^{p_n} a_{1,j_1}a_{2,j_2}...a_{n,j_n} f\left(v_{1,j_1}, v_{2,j_2}, ..., v_{n,j_n}\right),$$

dove l'applicazione f è univocamente determinata dai valori $f\left(v_{1,j_1}, v_{2,j_2}, ..., v_{n,j_n}\right)$ e dai rispettivi coefficienti. Ne deriva che se esiste una funzione multilineare, questa deve essere unica.

Viceversa, se scegliemo arbitrariamente $w_(j_1, ..., j_n) \in W$ con $1 \leq j_i \leq p_i$, possiamo definire un'applicazione multilineare tale che $f\left(v_{1,j_1}, v_{2,j_2}, ..., v_{n,j_n},\right) = w_(j_1, ..., j_n)$ ponendo

$$f\left(\sum_{j_1=1}^{p_1} a_{1,j_1}v_{1,j_1}, \sum_{j_2=1}^{p_2} a_{2,j_2}v_{2,j_2}, ..., \sum_{j_n=1}^{p_n} a_{n,j_n}v_{i,j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_2=1}^{p_2}...\sum_{j_n=1}^{p_n} a_{1,j_1}a_{2,j_2}...a_{n,j_n} f w_{j_1,...,j_n}.$$

□

1.2 Richiami di geometria affine

Anche in questo paragrafo assumiano $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definizione 1.24. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora definiamo A *spazio affine* su V se e solo se

- per ogni $p \in A$ e $v \in V$ esiste un unico $q \in A$ tale che $\vec{pq} = v$
- $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr}$ per ogni $p, q, r \in A$.

Chiamiamo A spazio affine reale.

Osservazione 1.25. La dimensione di A come spazio affine coincide con la dimensione di V, cioè $dimA = dimV$.

Definizione 1.26. $L \subset A$ è detto *sottospazio affine* se e solo se

- $DirL = \{\vec{pq} \,|\, p, q \in L\} \subset V$ sottospazio vettoriale, chiamato giacitura di L e L è spazio affine su $DirL$

- esiste $p \in L$ tale che $\{\vec{pq} \,|\, p, q \in L\} \subset V$ sottospazio vettoriale.

Osservazione 1.27. La dimensione di un sottospazio affine non può superare quella di A. Consideriamo $L \subset A$ sottoinsieme affine, se $dimL = dimA$ allora $L = A$; se $dimL = dimA - 1$, L è detto *iperpiano*.

Definizione 1.28. Siano $v_1, ..., v_n \in S \subset V$ spazio affine e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Allora l'espressione

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

è chiamata *combinazione affine*.

Definizione 1.29. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme non vuoto, allora indichiamo con $\langle S \rangle_{Aff}$ il *sottospazio affine generato* da S, dove $\langle S \rangle$ è definito come

- il più piccolo sottospazio affine di A contenente S
- l'intersezione di tutti i sottospazi affini di A contenenti S
- il sottospazio affine tale che $S \subset \langle S \rangle_{Aff}$ e $Dir\langle S \rangle_{Aff} = \langle \{\vec{pq} \,|\, p, q \in S\} \rangle$.

Osservazione 1.30. Sia $S \subset V$ uno spazio affine su se stesso, allora $\langle S \rangle_{Aff} = \{a_1 v_1 + ... + a_n v_n \,|\, \sum_i a_i = 1,\, v_i \in S,\, n \geq 1\} \not\subseteq \langle S \rangle$.

Proposizione 1.31. Sia A spazio affine e siano L_1, $L_2 \subset A$ sottospazi affini tali che $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, allora $dim\langle L_1 \cup L_2 \rangle_{Aff} = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 \cap L_2)$.

Ricordiamo che dati $A_1, ..., A_n$ spazi affini rispettivamente su $V_1, ..., V_n$ la struttura affine $A_i \times A_i \to V_i$ per ogni $i = 1, ..., n$ è definita $(p_i, q_i) \mapsto \vec{p_i q_i}$. Fatta questa considerazione, possiamo definire il prodotto di spazi affini:

Definizione 1.32. Siano $A_1, ..., A_n$ spazi affini su $V_1, ..., V_n$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, per ogni A_i, $i = 1, ..., n$, è definita una struttura affine. Poniamo $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ e $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$, allora lo spazio affine *prodotto* è definito $((p_1, p_2, ..., p_n), (q_1, q_2, ..., q_n)) \mapsto (\vec{p_1 q_1}), \vec{p_2 q_2}), ..., \vec{p_n q_n}))$.
$A \times A \to V$ è la struttura affine su A.

Definizione 1.33. Definiamo $\varphi : A \to B$, con A e B spazi affini su V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ un'*applicazione lineare affine* se e solo se
$\exists\, \varphi_* : V \to W$ applicazione lineare tale che $\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \varphi_*(\vec{pq})$, $\forall\, p, q \in A$.
φ è detto *isomorfismo affine* se e solo se φ_* è un isomorfismo.

Definizione 1.34. Diciamo che due spazi affini A e B sono isomorfi, e lo indichiamo con $A \cong B$ se e solo se $\exists \varphi : A \to B$ isomorfismo affine.

Proposizione 1.35. Siano A e B spazi affini su V e W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, $\forall p_0 \in A$, $\forall q_0 \in B$, $\forall \psi : V \to W$ applicazione lineare, esiste ed è unica $\varphi : A \to B$ applicazione affine tale che $\varphi(p_0) = q_0$ e $\varphi_* = \psi$.

Corollario 1.36. $A \cong B \Leftrightarrow dimA = dimB$, con A e B spazi affini su $\mathbb{R}$.

Proposizione 1.37. Sia $\varphi : A \to B$ un'applicazione affine, allora

- $A' \subset A$ sottospazio affine $B' \Rightarrow B' = \varphi(A') \subset B$ sottospazio affine
- $B' \subset B$ sottospazio affine $A' \Rightarrow A' = \varphi^{-1}(B') \subset A$ sottospazio affine.

Ne deriva che $\varphi_{|A'} : A' \to B'$ è un'applicazione affine.

Definizione 1.38. Un sottoinsieme $C \subset A$ è *convesso* se e solo se $\bar{pq} \subset C$ per ogni $p, q \in C$.

Definizione 1.39. Sia S un sottoinsieme di A spazio affine, possiamo definire l'*involucro convesso* di S, indicandolo con $\langle S \rangle_{Con}$, il più piccolo convesso di A contenente S, dato dall'intersezione di tutti i convessi di A contenenti S.

Definizione 1.40. Siano $v_1, ..., v_n \in S \subset V$ spazio affine e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ non negativi e tali che $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Allora l'espressione

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

è chiamata *combinazione convessa.*

Definizione 1.41. Sia A uno spazio affine reale e siano $p_0, ..., p_n \in A$ punti indipendenti (o in posizione generale). Il *simplesso* di dimensione n (o n*-simplesso*) di vertici $p_0, ..., p_n$ è l'insieme dei punti $p \in A$ tali che

$$\vec{p_0 p} = t_1 \vec{p_0 p_1} + ... + t_n \vec{p_0 p_n}$$

per qualche $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$, con $t_1, ..., t_n \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1$.

Osservazione 1.42. Tutti i simplessi di una data dimensione sono tra loro affinemente equivalenti, il che ci permette di ragionare con il simplesso standard Δ^n di dimesione n generato in $\mathbb{R}^{n+1}$ dagli $n+1$ vettori della base canonica $e_1, ..., e_{n+1}$.

Osservazione 1.43. Alcune propritá riguardanti i convessi sono le seguenti:

- una trasformazione affine manda convessi in convessi
- l'intersezione di una collezione arbitraria di insiemi convessi è un insieme convesso
- il prodotto di insiemi convessi è un insieme convesso.

1.3 Richiami di topologia

Indichiamo con $(X, \mathcal{T}) = X_{\mathcal{T}} = X$ lo *spazio topologico* e diamo i seguenti risultati:

Definizione 1.44. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ è detta *base* per la topologia $\mathcal{T}$ se e solo se

- $\forall\, A \in \mathcal{T}\, \exists\, \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ tale che $A = \cup_{i \in I} B_i$
- $\forall\, x \in A \in \mathcal{T}\, \exists\, B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset A$

Definizione 1.45. Siano $X_{\mathcal{T}}$ uno spazio topologico e $Y \subset X$ sottoinsieme, allora $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y \,|\, A \in \mathcal{T}\}$ è una topologia su Y.

Definizione 1.46. $Y_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{T}}$ è un *sottospazio topologico* se e solo se $Y \subset X$ e $\mathcal{S} = \mathcal{T}_Y$.

Esempio 1.3.1. Due esempi di sottospazi topologici che utilizzeremo nel prossimo paragrafo sono

- m-boccia chiusa $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, ||x|| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^m$
- $(m-1)$-sfera $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^m$

Definizione 1.47. Siano $(X_1, \mathcal{T}_1), ..., (X_n, \mathcal{T}_n)$ spazi topologici, allora $\{A_1 \times ... \times A_n \,|\, A_i \in \mathcal{T}_i\}$ è una base su $X_1 \times ... \times X_n$. Definiamo il *prodotto topologico*

$$(X_1, \mathcal{T}_1) \times ... \times (X_n, \mathcal{T}_n) = ((X_1 \times ... \times X_n, \langle\{A_1 \times ... \times A_n \,|\, A_i \in \mathcal{T}_i\}\rangle) \,.$$

Definizione 1.48. Sia $x \in X_{\mathcal{T}}$. Chiamiamo

- $\mathcal{I}_x = \{I \subset X \,|\, \exists\, A \in \mathcal{T}\, con\, x \in A \subset I\}$ *sistema degli intorni di* x in $X_{\mathcal{T}}$
- $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_x\}_{x \in X}$ *sistema degli intorni* in $X_{\mathcal{T}}$.

Osservazione 1.49. Siano $X_{\mathcal{T}}$ spazio topologico e $E \subset X$ sottoinsieme, indichiamo con:

- $IntE = \{x \in X \,|\, \exists\, I \in \mathcal{I}_x \, con \, I \subset E\}$ l'interno di E
- $ClE = \{x \in X \,|\, \forall\, I \in \mathcal{I}_x \; I \cap E \neq \emptyset\}$ la chiusura di E
- $FrE = \{x \in X \,|\, \forall\, I \in \mathcal{I}_x \; I \cap E \neq \emptyset \neq I - E\}$ la frontiera di E.

Definizione 1.50. Sia $f : X \to Y$, con X e Y spazi topologici, allora f è continua se e solo se

- A aperto in $Y \Rightarrow f^{-1}(A)$ aperto in X
- $\forall\, x \in X \; \big[J \in \mathcal{I}_{f(x)} \;\Rightarrow\; f^{-1}(J) \in \mathcal{I}_x\big]$
- $f(Cl_X E) \subset Cl_Y f(E)$ per ogni $E \subset X$
- C chiuso in $Y \Rightarrow f^{-1}(C)$ chiuso in X

Osservazione 1.51. Siano X e $Y = Y_1 \times ... \times Y_n$ spazi topologici, allora $f : X \to Y$ è in corrispondenza biunivoca con $\{f_i : X \to Y_i \,|\, i = 1, ..., n\}$. Si ha che

$$f \; continua \;\Leftrightarrow\; f_i \; continua \, per \; ogni \, i = 1, ..., n.$$

Definizione 1.52. Sia $f : X \to Y$, con X e Y spazi topologici, allora f è aperta se e solo se

- A aperto in $X \Rightarrow f(A)$ aperto in Y
- $\forall\, x \in X \; \big[I \in \mathcal{I}_x \;\Rightarrow\; f(I) \in \mathcal{I}_{f(x)}\big]$

Definizione 1.53. Sia $f : X \longrightarrow Y$ con X e Y spazi topologici, allora f è un *omeomorfismo* se e solo se

- f biunivoca, f e f^{-1} continue,
- f biunivoca, continua e aperta.

Definizione 1.54. Diremo che due spazi topologici sono omeomorfi $X \cong Y$ se e solo se $\exists\, f : X \longrightarrow Y$ omeomorfismo.

Osservazione 1.55. Sia $f_i : X_i \to Y_i$ un omeomorfismo, allora $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ è un omeomorfismo.

Definizione 1.56. Definiamo X spazio topologico *compatto* se e solo se

- $\forall \mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X $\exists \{U_1, ..., U_n\} \subset \mathcal{U}$ sottoricoprimento finito
- $\forall \mathcal{U}$ ricoprimento aperto basico di X $\exists \{U_1, ..., U_n\} \subset \mathcal{U}$ sottoricoprimento finito.

Teorema 1.57. *Siano X e Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Se X è compatto, allora $f(X)$ è compatto.*

Proposizione 1.58. Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ un sottoinsieme, allora X è compatto se e solo se è chiuso e limitato; dove ricordiamo che X è limitato se e solo se esiste $R > 0$ tale che $X \subset B(0, R)$.

Osservazione 1.59. La compattezza è una proprietà topologia che si conserva per il prodotto di spazi topologici, quindi, dati X e Y spazi topologici compatti, il loro prodotto $X \times Y$ è compatto.

1.4 Teoremi del punto fisso

Il contributo maggiore che John Nash ha dato alla teoria dei giochi è la dimostrazione matematica dell'esistenza del punto di equilibrio per un gioco finito, che si basa sulla correlazione tra la nozione di punto fisso e quella di strategia razionale. La prima versione di tale dimostrazione utilizza il teorema di Kakutani, solo più avanti Nash riuscirà a presentare una rielaborazione basandosi direttamente sul teorema del punto fisso di Brouwer.
Il teorema del punto fisso di Brouwer discende dal teorema di non retrazione, del quale diamo solamente l'enunciato. Si veda [2] per maggiori dettagli.

Teorema 1.60 (di non retrazione)**.** *Non esiste una retrazione continua di B^m su S^{m-1} per ogni $m \geq 1$. Infatti, $\forall f : B^m \longrightarrow S^{m-1}$ continua $\exists\, x \in S^{m-1}$ tale che $f(x) = f(-x)$.*

Teorema 1.61 (del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $f : B^m \longrightarrow B^m$ continua con $m \geq 1$, allora f ammette un punto fisso: $\exists x \in B^m$ tale che $f(x) = (x)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x \,\forall\, x \in B^m$, allora consideriamo $r : B^m \longrightarrow S^{m-1}$ retrazione continua definita $r(x) = s_{f(x),x} \cap S^{m-1}$, dove

$s_{f(x),x}$ è una semiretta aperta uscente da $f(x)$ e passante per x. Se $x \in S^{m-1}$, allora $r(x) = x$, il che è assurdo per quanto detto nel teorema di non retrazione. Quindi, esiste $x \in B^m$ tale che $f(x) = (x)$. $\square$

Osservazione 1.62. Per dimostrare l'esistenza del punto di equilibrio di Nash abbiamo bisogno di estendere l'applicazione del teorema del punto fisso di Brouwer ai convessi, in particolare al prodotto di convessi, che sappiamo essere a sua volta convesso. Utilizzando un caso speciale del teorema di Schoenflies dimostriamo che qualsiasi convesso in $\mathbb{R}^m$ è omeomorfo alla boccia B^m.

Teorema 1.63 (di Schoenflies)**.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^m$ convesso e sia $C = FrD \subset \mathbb{R}^m$ compatta, allora esiste $k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ omeomorfismo tale che $k(S^{m-1}) = C$. (In particolare, $\forall\, h : S^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ immersione tale che $h(S^{m-1}) = C\ \exists\, k$ tale che $k_{|S^{m-1}} = h$).*

Dimostrazione. Sia C compatto, allora D compatto, regolare e $IntD \neq \emptyset$. Consideriamo la funzione $f : C \longrightarrow S^{m-1}$ continua e biiettiva, definita $f(x) = \frac{x}{||x||}$. Allora f è un omeomorfismo, quindi anche $f^{-1} : S^{m-1} \longrightarrow C$ è continua.
Possiamo ora definire k come segue

$$\begin{cases} 0 & se\, x = 0 \\ ||f^{-1}\left(\frac{x}{||x||}\right)||x & \forall\, x \neq 0 \end{cases}$$

k è un omeomorfismo, essendo continua e biunivoca. Dobbiamo ora dimostrare che $k(S^{m-1}) = C$, verifichiamolo con la doppia inclusione:

- sia $x \in S^{m-1}$, allora $k(x) = ||f^{-1}(x)||x$ con $x = f(f^{-1}(x)) = \frac{f^{-1}(x)}{||f^{-1}(x)||}$ $\Longrightarrow k(x) = ||f^{-1}(x)||\frac{f^{-1}(x)}{||f^{-1}(x)||} = f^{-1}(x) \in C$,
- sia $x \in C$, allora $k(f(x)) = ||f^{-1}(f(x))||f(x) = ||x||f(x) = ||x||\frac{x}{||x||} = x \in k(S^{m-1})$.

Abbiamo così dimostrato che $k(S^{m-1}) = C$. $\square$

Come è già stato anticipato, la versione originale del teorema dell'esistenza del punto di equilibrio si basa sul teorema di Kakutani, che rappresenta una generalizzazione del teorema di Brouwer. Nel prossimo capitolo vedremo che l'esistenza del punto di equilibrio segue come risultato diretto dal teorema di Kakutani; al contrario, la versione che si basa sul teorema 1.61, risulta più complicata e macchinosa. Qui diamo solo l'enunciato, per approfondire si faccia riferimento a [4].

Teorema 1.64 (di Kakutani). *Siano Z un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio euclideo e $f : Z \to C(Z)$ con $C(Z) = \{C \subset Z$ chiuso e convesso $\}$ tale che:*

- *$f(z)$ è un insieme non vuoto;*
- *il grafico di f, definito come $\{(z, w) \,|\, z \in Z,\, w \in f(z)\} \subset Z \times Z$, è chiuso.*

Allora f ha un punto fisso, cioè $\exists\, \bar{z} \in Z$ tale che $\bar{z} \in f(\bar{z})$.

Osservazione 1.65. Il teorema di Kakutani estende il teorema di Brower alle funzioni a più valori, infatti quest'ultimo rappresenta un caso speciale del teorema di Kakutani, che prevede che $f(x)$ sia un singoletto, quindi contenente un unico punto. Di conseguenza, Brouwer utilizza una dimostrazione più semplice e diretta rispetto a quella necessaria per la sua generalizzazione.
Osserviamo inoltre che, dato un singoletto $f(x)$, il che significa $f(x) = \{z\}$, possiamo considerare l'applicazione $h : Z \to Z$ tale che $h(z) = w$: si ha che f ha grafico chiuso se e solo se h è continua.

Capitolo 2

Giochi non cooperativi

2.1 Definizioni formali e terminologia

Da ora in avanti si assumerà l'ipotesi di non cooperazione nei giochi, senza doverla esplicitare ogni volta.
Iniziamo dando la seguente

Definizione 2.1. Per gioco non cooperativo si intende un insieme di n giocatori, o n posizioni, $I = \{1, 2, ..., n\}$, ad ognuno dei quali è associato un insieme finito di strategie pure $S(i)$ ed una funzione payoff p_i, che mappa l'insieme di tutte le n-uple delle strategie pure nei numeri reali.

In particolare, dato l'insieme delle strategie pure $S(i)$ del giocatore i e considerando una n-upla come un insieme di n oggetti, ogni oggetto corrispondente ad un giocatore differente, $s = (s_1, ..., s_n)$ sarà la n-upla di strategie pure, in cui s_i è una strategia pura del giocatore i. La funzione payoff (o guadagno) del giocatore $i \in I$ sarà $p_i(s) \in \mathbb{R}$, $p_i : S \to \mathbb{R}$; mentre la funzione payoff del gioco è indicata con $p(s) = (p_1(s), ..., p_n(s))$, $p : S \to \mathbb{R}^n$. Prendendo come base l'insieme delle strategie pure $S(i)$ del giocatore i, questo genera lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{|S(i)|} \cong \{\sum_h c_{i,h}s_{i,h}\} \cong \langle S(i) \rangle_{\mathbb{R}}$, quindi generato su $\mathbb{R}$. Le strategie miste formano un simplesso all'interno di questo spazio vettoriale, diamo quindi la definizione di strategia mista:

Definizione 2.2 (Strategia mista)**.** Una strategia mista x_i per il giocatore i è una combinazione convessa delle sue strategie pure: $x_i = \sum_{h=1}^{m_i} x_{i,h}s_{i,h}$, con

$\sum_{h=1}^{m_i} x_{i,h} = 1$ e $x_{i,h} \in [0,1]$ per ogni $h = 1, 2, ..., m_i$.

Quindi l'insieme delle possibili strategie miste per il giocatore i è il simplesso unitario $(m_i - 1)$-dimensionale

$$\Delta^{m_i - 1} = \{(x_{i,1}, ..., x_{i,m_i - 1}) \in [0,1]^{m_i - 1} \mid \sum x_{i,h} = 1\},$$

dove $m_i = |\sigma(i)|$ indica il numero di strategie pure per il giocatore i. I vertici di $\Delta^{m_i - 1}$ sono le strategie pure, o particolari strategie miste che hanno un solo coefficiente $x_{i,k} = 1$ e tutti gli altri nulli.

Osservazione 2.3. Una particolare interpretazione delle strategie miste, che sarà quella su cui si baseranno i prossimi capitoli, definisce la strategia mista x_i del giocatore i come distribuzione di probabilità sul suo insieme di strategie pure $S(i)$. In altre parole, ogni strategia mista del giocatore i può essere rappresentata come un vettore $x_i = (x_{i,1}, ..., x_{i,m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}$, dove la componente $x_{i,h} \in \mathbb{R}$ è la probabilità con cui il giocatore i gioca la h-esima strategia pura.

A questo punto il prodotto dei simplessi sarà contenuto nello spazio vettoriale prodotto generato da tutte le strategie pure di tutti i giocatori, cioè

$$\Delta^{m_1 - 1} \times \Delta^{m_2 - 1} \times ... \times \Delta^{m_n - 1} \subset S_1 \times S_2 \times ... \times S_n.$$

La dimensione del prodotto di questi simplessi è $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + ... + (m_n - 1)$, per cui non è un simplesso all'interno del prodotto vettoriale considerato.
Indicando con x_i la strategia mista del giocatore i, per $i = 1, ..., n$, la n-upla $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ di strategie miste sarà un punto appartenente al prodotto dato dai simplessi $\Delta^{m_i - 1}$. La funzione di payoff ha quindi un'estensione unica alle n-uple di strategie miste, la quale è lineare nella strategia mista di ogni giocatore e denotiamo tale estensione sempre con p_i, scrivendo $p_i(\bar{x}) = p_i\,(x_1, ..., x_n)$.

Osservazione 2.4. Può succedere che un giocatore decida di cambiare strategia mista, sostituendo quella presente nella n-upla originale con un'altra tra quelle a sua disposizione. Per convenzione introduciamo una notazione che permette di rappresentare questo tipo di modifica: indichiamo con $(\bar{x};\, y_i)$ la n-upla $(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$, ovvero la n-upla di strategie miste in cui l'i-esimo giocatore ha sostituito x_i con un'altra sua strategia mista y_i. Se seguono altre sostituzioni le indicheremo con $(\bar{x};\, y_i,\, r_j)$ e così via. In particolare, nella definizione che segue, la scrittura $p_i(\bar{x};\, r_i)$ indicherà la payoff del giocatore i in cui ha sostituito la strategia x_i con un'altra sua strategia mista r_i.

Definizione 2.5 (Punto di equilibrio)**.** Una n-upla $\bar{x}$ è un punto di equilibrio se e solo se per ogni i

$$p_i(\bar{x}) = max_{r_i}\left[p_i(\bar{x};\, r_i)\right].$$

Quindi, un punto di equilibrio è una n-upla $\bar{x}$ tale per cui la strategia mista di ogni giocatore massimizza la propria payoff se le strategie degli altri vengono mantenute fisse; il che vuol dire che la strategia di ogni giocatore è una risposta ottima contro quelle degli altri.

Lemma 2.6. Diremo che la strategia x_i *usa* la strategia pura $s_{i,h}$ se $x_i = \sum_k x_{i,k}s_{i,k}$ e $x_{i,h} > 0$. Se $\bar{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n)$ e x_i usa $s_{i,h}$, allora diremo che $\bar{x}$ *usa* $s_{i,h}$.

Proposizione 2.7. Definendo $p_{i,h}(\bar{x}) = max_h\left[p_{i,h}(\bar{x})\right]$, la seguente condizione risulta essere sufficiente e necessaria affinchè $\bar{x}$ sia un punto di equilibrio:

$$p_i(\bar{x}) = max_h p_{i,h}(\bar{x}).$$

Dimostrazione. Dal lemma 2.6 e grazie alla linearità della funzione payoff $p_i\left(x_1,\, x_2,\, \ldots\,,\, x_n\right)$ in x_i possiamo scrivere

$$max_{r_i}\left[p_i(\bar{x};\, r_i)\right] = max_h\left[p_i(\bar{x}; s_{i,h})\right]. \tag{2.1}$$

Per ipotesi definiamo $p_{i,h}(\bar{x}) = max_h\left[p_{i,h}(\bar{x})\right]$, quindi, andando a sostituire nella definizione 2.5, otteniamo

$$p_i(\bar{x}) = max_{r_i}\left[p_i(\bar{x};\, r_i)\right] = max_h p_{i,h}(\bar{x}),$$

che implica che $\bar{x}$ sia un punto di equilibrio per il gioco. □

2.1.1 Esistenza del punto di equilibrio

Nella dimostrazione del teorema che segue si procede, in linea generale, costruendo una trasformazione continua T nello spazio delle n-uple tale per cui i punti fissi per T sono punti di equilibrio del gioco.

Teorema 2.8. *Ogni gioco finito ha un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Siano $\bar{x}$ una n-upla di strategie miste, $p_i(\bar{x})$ la payoff corrispondente al giocatore i, e $p_{i,h}(\bar{x})$ la payoff dei giocatore i se il giocatore passa alla sua h-esima strategia pura $s_{i,h}$ e gli altri continuano ad usare le loro rispettive strategie miste già presenti in $\bar{x}$.
Definiamo ora l'insieme di funzioni continue di $\bar{x}$

$$\varphi_{i,h}(\bar{x}) = max\,(0,\, p_{i,h}(\bar{x}) - p_i(\bar{x}))$$

e per ogni componente x_i di $\bar{x}$ definiamo una modifica $x_i{}'$ per

$$x_i{}' = \frac{x_i + \sum_h \varphi_{i,h}(\bar{x}) s_{i,h}}{1 + \sum_h \varphi_{i,h}(\bar{x})}$$

chiamando $\bar{x}'$ la n-upla $(x_1{}',\, x_2{}',\, x_3{}',\, ...\,, x_n{}')$.
Dobbiamo ora provare che i punti fissi della mappa $T : \bar{x} \mapsto \bar{x}'$ sono i punti di equilibrio.
Primo, consideriamo una qualsiasi n-upla $\bar{x}$, quindi esistono almeno due strategie pure di cui $\bar{x}$ ne è combinazione convessa. Supponiamo per assurdo che nessuna delle strategie pure $s_{i,h}$ sia tale per cui $p_{i,h}(\bar{x}) \leq p_i(\bar{x})$, allora sarà $p_{i,h}(\bar{x}) > p_i(\bar{x})\,\forall\, h$. Quindi si otterrebbe

$$p_i(\bar{x}) = \sum_h x_{i,h} p_i(\bar{x}) < \sum_h x_{i,h} p_{i,h}(\bar{x}) = p_i(\bar{x}),$$

il che è assurdo. Quindi esiste almeno una strategia pura, chiamiamola $s_{i,h}$, tale per cui $p_{i,h}(\bar{x}) \leq p_i(\bar{x})$. Allora sarà $\varphi_{i,h}(\bar{x}) = 0$.
Ora se questa n-upla $\bar{x}$ è un punto fisso per T, deve valere l'uguaglianza $x_i{}' = x_i$. Quindi, per ogni k, $\varphi_{i,k}(\bar{x})$ deve essere zero per impedire al denominatore dell'espressione che definisce $x_i{}'$ di superare 1.
Cioè, se $\bar{x}$ è fissata sotto T, per ogni i e k, $\varphi_{i,k}(\bar{x}) = 0$. Questo significa che nessun giocatore può migliorare la propria payoff muovendosi su una strategia pura $s_{i,k}$. Ma questo non è altro che la condizione (2.1) sufficiente e necessaria affinché $\bar{x}$ sia un punto di equilibrio.
Al contrario, se $\bar{x}$ è un punto di equilibrio, è immediato notare che tutte le φ scompaiano, facendo sì che $\bar{x}$ sia un punto fisso per T. □

Osservazione 2.9. Il teorema appena enunciato può essere ottenuto in maniera più semplice come applicazione diretta del teorema di Kakutani; come è già stato

anticipato, la difficoltà sta nella dimostrazione per il teorema del punto fisso di Kakutani, che risulta più complicata rispetto a quella necessaria per il teorema del punto fisso di Brouwer.
In linea generale, comunque, si procede definendo la funzione

$$f : \Delta_1^{m_1-1} \times \Delta_2^{m_2-1} \times ... \times \Delta_n^{m_n-1} \to C\left(\Delta_1^{m_1-1}\right) \times C\left(\Delta_2^{m_2-1}\right) \times ... \times C\left(\Delta_n^{m_n-1}\right),$$

alla quale viene applicato il teorema del punto fisso di Kakutani, la funzione

$$g : C\left(\Delta_1^{m_1-1}\right) \times C\left(\Delta_2^{m_2-1}\right) \times ... \times C\left(\Delta_n^{m_n-1}\right) \to C\left(\Delta_1^{m_1-1} \times \Delta_2^{m_2-1} \times ... \times \Delta_n^{m_n-1}\right),$$

che manda il prodotto di convessi nel convesso del loro prodotto, e la loro composizione

$$h = g \circ f : \Delta_1^{m_1-1} \times \Delta_2^{m_2-1} \times ... \times \Delta_n^{m_n-1} \to C\left(\Delta_1^{m_1-1} \times \Delta_2^{m_2-1} \times ... \times \Delta_n^{m_n-1}\right)$$

definita

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (h_1(x_2, x_3, ..., x_n), h_2(x_1, x_3, ..., x_n), ..., h_n(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Ogni $f_i : \Delta_1^{m_1-1} \times ... \times \Delta_{i-1}^{m_{i-1}-1} \times \Delta_{i+1}^{m_{i+1}-1} \times ... \times \Delta_n^{m_n-1} \to C\left(\Delta_i^{m_i-1}\right)$
è tale che

$$f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) =$$
$$= \{x_i \in \Delta_i^{m_i-1} \,|\, p_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geq p_i(x_1, ..., x_{i-1}, s_i, x_{i+1}, ..., x_n) =$$
$$= p_i(\bar{x}; s_i) \,\forall\, s_i \in \Delta_i^{m_i-1}\},$$

cioè considerata la n-upla $\bar{x} \in f(\bar{x})$, si ha che per ogni $i = 1, ..., n$, x_i è risposta ottima per qualunque x_j con $j \neq i$, $j = 1, ..., n$. Ne deriva che $\bar{x}$ è un punto di equilibrio per il gioco.

Proposizione 2.10. Un equilibrio di Nash stretto è necessariamente una coppia di strategie pure.

Dimostrazione. Dato $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ sia un equilibrio si Nash stretto, abbiamo che entrambe le disuguaglianze della definizione 2.5 sono soddisfatte. Supponiamo, per assurdo, che $\bar{x}$ sia nelle strategie miste, cioè almeno una delle sue componenti deve essere una strategia mista.
Si ha

$$p_i(\bar{x}) = \sum_h x_{i,h} p_{i,h}(\bar{x}) < \sum_h x_{i,h} p_i(\bar{x}) = p_i(\bar{x}),$$

dove la disuguaglianza stretta è data dall'ipotesi di equilibrio di Nash stretto e $\sum_h x_{i,h} = 1$, arrivando così ad una contraddizione. $\square$

Osserivamo che non tutti i giochi hanno equilibri nelle strategie pure.

Esempio 2.1.1. Consideriamo un gioco in cui due bambini, ciascuno con due monete, devono mostrarle contemporaneamante, decidendo se tenere in alto la testa (T) o la croce (C). Se entrambi mostrano la stessa faccia vince il primo bambino, altrimenti vince il secondo.
Le payoff possono essere riassunte nella seguente tabella:

Strategie	**T**	**C**
T	(1, -1)	(-1, 1)
C	(-1, 1)	(1, -1)

Chiaramente non esistono equilibri di Nash nelle strategie pure.
Infatti, consideriamo la prima casella $(1, -1)$ della tabella, questa corrisponde al caso in cui entrambi i bambini giocano la stessa faccia, per la precisione testa, quindi la coppia di strategie pure risulta essere (T, T). Il primo bambino ha payoff $p_1(T, T) = 1$ ed il secondo ha payoff $p_2(T, T) = -1$. Affinchè (T, T) sia un equilibrio nelle strategia pure, dalla definizione 2.5, dovrebbero essere soddisfatte entrambe le disugualianze:

$$p_1(T, T) \geq p_1(C, T)$$

$$p_2(T, T) \geq p_1(T, C),$$

ma nella seconda si ha $-1 \geq 1$. Lo stesso ragionamento va applicato ad ogni casella della tabella.
Tuttavia, il teorema 2.8 assicura l'esistenza di un equilibrio di Nash, che sarà nelle strategie miste. Dati i vettori $x = [x_1; 1 - x_1]^T$ e $y = [y_1; 1 - y_1]^T$, le rispettive payoff risultano essere

$$p_1(x, y) = x^T Ay = 2(2y_1 - 1)x_1 - 2y_1 + 1$$

$$p_2(x, y) = x^T By = -2(2x_1 - 1)y_1 + 2x_1 - 1.$$

Calcolando le derivate parziali $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial p_2}{\partial y_1}$ e ponendole uguali a 0 otteniamo la soluzione $(x^*, y^*) = \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$, che rappresenta l'equilibrio misto del gioco.

2.1.2 Giochi simmetrici

Nel prossimo capitolo si parlerà di teoria evolutiva dei giochi. In molti casi questa riguarda popolazioni di giocatori considerati indistinguibili tra loro, il che porta alla trattazione di giochi simmetrici.
Formalizzando, una simmetria, o un automorfismo, di un gioco sarà una permutazione φ delle strategie pure dei giocatori che induce una permutazione ψ dei giocatori caratterizzata da quanto segue.
Se due strategie appartengono ad un singolo giocatore, esse devono andare in due strategie appartenenti ad un singolo giocatore. Quindi se φ è la permutazione delle strategie pure, essa è tale per cui l'insieme delle strategie pure $S(i)$ del giocatore i viene messo in corrispondenza con se stesso o con l'insieme $S(j)$ del giocatore j solo se $|S(i)| = |S(j)|$. Una n-upla di strategie pure viene perciò permutata in un'altra n-upla di strategie pure; indichiamo la permutazione tra le n-uple con χ.
Dati un gioco e le permutazioni ψ e φ rispettivamente sui giocatori e sulle corrispondenti strategie pure, affinché il gioco sia simmetrico, dobbiamo richiedere che anche le payoff si corrispondano, quindi formalmente:

Definizione 2.11 (Gioco simmetrico)**.** Sia $j = i^{\psi}$, allora $p_j\left(\xi^{\chi}\right) = p_i\left(\xi\right)$, dove ξ è una n-upla di strategie pure, $p_i(\xi)$ la payoff corrisponde al giocatore i e ξ^{φ} la n-upla permutata tramite la trasformazione φ.

La permutazione φ ha un'estensione lineare unica alle strategie miste. Se $x_i = \sum_h x_{i,h} s_{i,h}$ definiamo $(x_i)^{\varphi} = \sum_h x_{i,h}\left(s_{i,h}\right)^{\varphi}$.
L'estensione di φ alle strategie miste genera a sua volta un'estensione di χ alle n-uple di strategie miste, che possiamo continuare ad indicare con χ.

Definizione 2.12. Definiamo simmetrica una n-upla $\bar{x}$ di strategie miste di un gioco se $\bar{x}^{\chi} = \bar{x}$.

Osservazione 2.13. Esplicitando la definizione appena data, una n-upla $\bar{x}$ è simmetrica solamente se $(x_1, x_2, ..., x_n)^{\chi} = ((x_1)^{\varphi}, (x_2)^{\varphi}, ..., (x_n)^{\varphi})$, dove ogni $(x_i) = (x_{\psi^{-1}(i)})^{\varphi}$ per $i, j = 1, ..., n$. Sostituendo i con $\psi(i)$, si ottiene $x_{\psi(i)} = x_j = (x_i)^{\varphi}$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$, che è la condizione affinché la n-upla $\bar{x}$ di strategie pure sia simmetrica.

Teorema 2.14. *Ogni gioco finito χ-simmetrico ha un punto di equilibrio χ-simmetrico.*

Dimostrazione. Consideriamo il baricentro del simplesso construito sull strategie miste x_i del giocatore i, esso sarà definito come $x_{i,0} = \frac{\sum_h s_{i,h}}{\sum_h 1}$ ed è tale per cui $(x_{i,0})^\varphi = x_{j,0}$ dove $j = i^\psi$, cosicché la n-upla $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ è fissata sotto ogni χ; così ogni gioco ha almeno una n-upla simmetrica.
Se $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sono simmetriche, allora per $t \in [0, 1]$ anche

$$t\bar{x} + (1-t)\bar{y} = (tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2, \ldots, tx_n + (1-t)y_n)$$

è simmetrica perchè $\bar{x}^\chi = \bar{x} \leftrightarrow x_j = (x_i)^\varphi$, dove $j = i^\psi$, perciò

$$tx_j + (1-t)y_j = t(x_i)^\varphi + (1-t)(y_i)^\varphi = (tx_i + (1-t)y_i)^\varphi,$$

dove l'ultima uguaglianza è data dalla multilinearità di φ. Otteniamo

$$(t\bar{x} + (1-t)\bar{y})^\chi = (t\bar{x} + (1-y)\bar{y}).$$

Questo mostra che l'insieme delle n-uple simmetriche è un sottoinsieme convesso dello spazio delle n-uple in quanto è ovviamente chiuso.
Ora osserviamo che qui è definito lo stesso il mapping $T : \bar{x} \mapsto \bar{x}'$ usato nella dimostrazione del teorema di esistenza. Inoltre, se $\bar{x}_2 = T(\bar{x}_1)$ e χ deriva da un automorfismo del gioco avremo $(\bar{x}_2)^\chi = T((\bar{x}_1)^\chi)$. Se $\bar{x}_1$ è simmetrico avremo $(\bar{x}_1)^\chi = \bar{x}_1$ ed inoltre $(\bar{x}_2)^\chi = T((\bar{x}_1)^\chi) = T(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$. Conseguentemente questa funzione mappa l'insieme delle n-uple simmetriche in sé stesso.
Siccome questo insieme è un cella ci deve essere un punto fisso simmetrico $\bar{x}$ il quale deve essere un punto di equilibrio simmetrico. □

2.2 Caso particolare a due giocatori

Nei capitoli successivi verranno trattati giochi non cooperativi discreti normali a due giocatori, il che vuol dire che considereremo $n = 2$, con i rispettivi insiemi di strategie pure $S(i)$, per $i = 1, 2$, finiti. La raffigurazione in forma normale, ovvero quella in cui le strategie e le payoff dei giocatori vengono rappresentati tramite matrice, risulta particolarmente comoda per il caso a due giocatori, per cui definiamo, quindi da ora in poi le possibili strategie dei giocatori e i relativi payoff associati ad ogni combinazione di strategie vengono rappresentati in una bimatrice in cui le strategie del giocatore 1 sono associate alle righe e le strategie del giocatore 2 alle colonne e le celle della bimatrice indicano gli esiti, o payoff, dati in un preciso ordine: il primo valore rappresenta il payoff dell'agente sulla riga, il secondo valore rappresenta il payoff dell'agente sulla colonna. Se volessimo "separare" la bimatrice per analizzare singolarmente i due giocatori, i rispettivi payoff verrebbero rappresentati dalle matrici $A = (a_{h,k})$ per il primo giocatore e $B = (b_{h,k})$ pe il secondo, dove $a_{h,k} = p_1(h,k)$ e $b_{h,k} = p_2(h,k)$. Considerando ad esempio il caso in cui $|S(1)| = |S(2)| = 2$, la bimatrice sarebbe

$$\begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1(1,1), p_2(1,1)) & (p_1(1,2)p_2(1,2)) \\ (p_1(2,1), p_2(2,1)) & (p_1(2,2), p_2(2,2)) \end{bmatrix}.$$

Indichiamo con A e B le matrici dei payoff rispettivamente dei due giocatori; se il primo gioca la strategia mista x ed il secondo la strategia mista y, il guadagno atteso dal primo giocatore sarà

$$p_1(x,y) = \sum_i x_i \sum_j a_{i,j} y_j = x^T A y$$

e per il secondo

$$p_2(x,y) = \sum_i x_i \sum_j b_{i,j} y_j = x^T B y$$

dove il primo giocatore gioca le righe della matrice A mentre il secondo gioca le colonne della matrice B, ma, a priori, non c'è nessun legame tra le due matrici dei payoff.

Osservazione 2.15. Considerando la definizione di punto di equilibrio 2.5, nel caso $n = 2$ diciamo che una coppia di strategie $(x_1, x_2) \in S(1) \times S(2)$ è un equilibrio di Nash se

$$p_1(y_1, x_2) \leq p_1(x_1, x_2)\, \forall y_1 \in \sigma(1)\, y_1 \neq x_1$$

$$p_2(x_1, y_2) \leq p_2(x_1, x_2)\, \forall y_2 \in \sigma(2)\, y_2 \neq x_2.$$

Si dice che l'equilibio è stretto se valgono strettamente entrambe le disuguaglianze.

La coppia di strategie (x, y) è un equilibrio misto (o nelle strategie miste) di Nash per un gioco a due giocatori se (x, y) è un equilibrio di Nash per l'estensione mista del gioco.

Osservazione 2.16. Tenendo conto della definizione 2.11, un gioco discreto a due giocatori si dice simmetrico se $S(1) = S(2)$ e $p_1(s_i, s_j) = p_2(s_j, s_i)\ \forall s_i, s_j \in S(1)$.

Osservazione 2.17. Un equilibrio di Nash (x, y) si dice simmetrico se $x = y$, cioè se i due giocatori usano la stessa strategia (pura o mista). Questo significa che x è una risposta ottima a sé stessa. Nel trattare popolazioni di giocatori indistinguibili, ci interesseremo solo ad equilibri di Nash simmetrici.

Un gioco simmetrico, dunque, coinvolge due giocatori con lo stesso insieme di strategie pure e richiede l'equivalenza delle rispettive funzioni di payoff. Quindi, chiamandole A e B, avremo entrambe le matrici dei payoff quadrate e tali per cui $B = A^T$. Il dilemma del prigioniero è un esempio di gioco simmetrico.

Esempio 2.2.1 (Dilemma del prigioniero)**.** Il dilemma del prigioniero può essere descritto come segue. Due criminali vengono accusati di aver commesso un reato e vengono arrestati entrambi. Gli investigatori li chiudono in due celle separate, impedendo loro di comunicare e ad entrambi vengono date due scelte: collaborare confessando, oppure non collaborare.
Viene inoltre spiegato loro che:

- se solo uno dei due collabora accusando l'altro, chi ha collaborato evita la pena e l'altro viene condannato a 7 anni di carcere;
- se entrambi accusano l'altro, fanno 6 anni di carcere ciascuno;
- se nessuno dei due collabora, entrambi vengono condannati a 1 anno.

Il gioco può essere quindi schematizzato con la bimatrice

$$\begin{bmatrix} (6,6) & (0,7) \\ (7,0) & (1,1) \end{bmatrix},$$

dove $A = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ è la matrice dei payoff del primo giocatore, mentre $B = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é la matrice corrispondente al secondo giocatore.
Nell'estensione mista del gioco si ha $p_1(x, y) = x^T A y$, $p_2(x, y) = x^T A^T y$, dove $A = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Capitolo 3

Teoria evolutiva dei giochi

La teoria dei giochi classica studia interazioni che solitamente avvengono una sola volta tra individui razionali; quindi consci delle regole del gioco ed in grado di comportarsi di conseguenza.
Al contrario, nella teoria evolutiva dei giochi, gli individui vengono scelti a caso in una popolazione sufficientemente vasta per partecipare ad un gioco che si ripete continuamente nel tempo. Questi giocatori sono "programmati" per agire in un determinato modo, ovvero usare una certa strategia, ed i payoff sono stabiliti dalla fitness darwiniana, che definisce il successo riproduttivo di un individuo.
Una nozione importante all'interno della teoria evolutiva dei giochi è quella di strategia volutivamente stabile (ESS): questa non spiega come una certa popolazione è arrivata ad adottare tale strategia, ma è in grado di definire se una certa strategia risulta robusta rispetto a pressioni evolutive da parte di altre.
Una ESS può essere quindi equiparata all'equilibrio di Nash, limitandosi a dare una visione statica della teoria evolutiva dei giochi.
Nella logica della teoria evolutiva dei giochi, tuttavia, l'approccio statico non è sufficiente perchè non coinvolge l'elemento tempo, concetto chiave nel campo dell'evoluzione. Si è accennato il concetto di strategia evolutivamente "stabile" infatti, il che non è sinonimo si "statica", per cui verrà naturale e risulterà anche utile "dinamizzare" il modello preso in esame mediante sistemi di equazioni differenziali. In particolare, dopo aver introdotto i principali concetti "statici"

nella teoria evolutiva dei giochi, si parlerà di giochi dinamici, concentrandosi principalmente sulle equazioni di replicazione (replicator equations), che misurano il tasso di aumento delle strategie possibili all'interno della popolazione in funzione del tempo.

3.1 Strategie evolutivamente stabili

Per strategia evolutivamente stabile si intende una strategia resistente alla cosiddetta pressione evolutiva in un senso ben preciso.
Supponiamo di considerare una popolazione sufficientemente vasta dalla quale vengono ripetutamente presi due individui per fare un gioco simmetrico (a due giocatori) e che tutti gli individui siano inizialmente "programmati" per agire secondo una certa strategia p, pura o mista. Introduciamo quindi una piccola popolazione di individui "programmati" per usare una strategia diversa da p che viene chiamata strategia mutante. La strategia p è detta evolutivamente stabile se, per ogni strategia mutante, esiste una soglia di invasione tale che, se la popolazione che usa la strategia mutante ha una popolosità inferiore alla soglia, allora la strategia p è preferibile rispetto alla strategia mutante.
Come è già stato anticipato, parliamo di giochi non cooperativi discreti simmetrici a due giocatori. Per essere più precisi, si tratta di due "tipi" di giocatori, i quali hanno a disposizione rispettivamente un insieme finito di strategie pure. In particolare, indichiamo con $S(1) = \{s_{1,1}, s_{1,2}, ..., s_{1,n}\}$ l'insieme delle strategie pure del primo "tipo" di giocatori e con $S(2) = \{s_{2,1}, s_{2,2}, ..., s_{2,n}\}$ quello del secondo "tipo". Inoltre, essendo il gioco simmetrico, esistono una permutazione ψ che manda il primo "tipo" nel secondo e viceversa, ed una permutazione φ delle loro strategie pure tale che $\varphi(s_{1,j}) = s_{2,j}$ e $\varphi(s_{2,j}) = s_{1,j}$; le strategie miste per entrambi i "tipi" di giocatori sono punti del simplesso Δ^{n-1}. Indichiamo con A la matrice dei payoff.
Possiamo consideriamo, quindi, una popolazione in cui una certa porzione ϵ di individui usa la strategia q e la restante parte di popolazione $1-\epsilon$ usa la strategia p, se scegliamo un individuo che usa la strategia p e lo facciamo giocare contro un altro individuo a caso, il suo guadagno atteso sarà $p^T A\,(\epsilon q + (1-\epsilon)p)$.
Possiamo formalizzare il concetto di stabilità evolutiva.

Definizione 3.1 (Strategia evolutivaemente stabile)**.** Una strategia $p \in \Delta^{n-1}$ è detta evolutivamente stabile (ESS) se, per ogni $q \neq p \in \Delta^{n-1}$ vale

$$q^T A\left(\epsilon q + (1-\epsilon)p\right) < p^T A\left(\epsilon q + (1-\epsilon)p\right) \tag{3.1}$$

per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, ovvero minore di una certa soglia $\bar{\epsilon}(q)$.

Proposizione 3.2. $p \in \Delta^{n-1}$ è una ESS se e solo se

$$q^T Ap \leq p^T Ap \; \forall q \in \Delta^{n-1} \tag{3.2}$$

$$q^T Ap = p^T Ap \Rightarrow q^T Aq < p^T Aq \; \forall q \neq p \in \Delta^{n-1}. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Definiamo $\bar{\epsilon}(q)$ come una funzione continua nel seguente modo

$$\bar{\epsilon}(q) = \begin{cases} \frac{(p-q)^T Ap}{(p-q)^T A(p-q)} & se\ (p-q)^T Aq < 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$

Il teorema di Weierstrass ci assicura che esiste $\bar{\epsilon} := min\{\bar{\epsilon}(q) |\, q \in \Delta^{n-1}\}$. Riscriviamo la (3.1) come

$$(1-\epsilon)\left(p^T Ap - q^T Ap\right) + \epsilon\left(p^T Aq - q^T Aq\right) > 0.$$

Ora, se $p \in \Delta^{n-1}$ è una ESS, questa disuguaglianza deve essere soddisfatta per ogni $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$. Per come abbiamo definito $\bar{\epsilon}$, il termine $\epsilon\left(p^T Aq - q^T Aq\right)$ risulta trascurabile nel caso in cui $q^T Ap < p^T Ap \;\forall\, q \in \Delta^{n-1}$; altrimenti, se vale $q^T Ap = p^T Ap$, deve per forza essere $q^T Aq < p^T Aq \;\forall\, q \neq p \in \Delta^{n-1}$.
Al contrario, se valgono le condizioni (3.2) e (3.3), è facile osservare che tale disuguaglianza è verificata. □

Osservazione 3.3. La (3.2) è chiamata *condizione di equilibrio*, in quanto non è altro che la definizione di equilibrio simmetrico di Nash. Tuttavia da sola non assicura l'impossibilità della strategia p di essere invasa da una qualsiasi altra strategia q, la quale potrebbe essere un'altra risposta ottima a p. Per cui è necessaria la (3.3), detta *condizione di stabilità*, in grado di garantire che contro la strategia q si comporta meglio p di q.

Proposizione 3.4. Ogni equilibrio di Nash stretto è una ESS. Ogni ESS è un equilibrio di Nash.

Dimostrazione. Un equilibrio di Nash è stretto se vale

$$q^T Ap < p^T Ap \ \forall q \in \Delta^{n-1},$$

cioè se vale la (3.2) strettamente.
Al contrario, la (3.2) esprime esattamente il fatto che (p,p) è un equilibrio di Nash simmetrico. □

Osservazione 3.5. E' importante notare che il contrario della prima affermazione, ovvero che una ESS è un equilibrio di Nash stretto, non è vero: niente vieta di pensare ad una ESS nelle strategie miste; in questo caso, essa non potrebbe più essere un equilibrio di Nash stretto, dal momento che quest'ultimo è necessariamente nelle strategie pure.

Proposizione 3.6. Se $p \in int\left(\Delta^{n-1}\right)$ è una ESS, allora è l'unica ESS.

Dimostrazione. Ponendo $q = e_i$ nella (3.3) si ha

$$(Ap)_i \leq p^T Ap \tag{3.4}$$

per $i = 1, ..., n$. Moltiplicando $(Ap)_i$ per p^T e utilizzando la defnizione di prodotto scalare

$$p^T Ap = \sum_{p_i>0} p_i \,(Ap)_i \leq \left(\sum_{p_i>0} p_i\right) p^T Ap = p^T Ap.$$

Quindi, per gli indici tali che $p_i > 0$ deve valere l'uguaglianza nella (3.4). Dal momento che $p^T Ap$ è una costante a priori incognita e che possiamo quindi indicarla con c, si ottiene che $(Ap)_i \leq c \ \forall\, i$ tale che $p_i > 0$. Se $p \in int\left(\Delta^{n-1}\right)$ le sue componenti sono tutte non nulle, allora p soddisfa il sistema

$$\begin{cases} (Ap)_1 = ... = (Ap)_n = c \\ p_1 + ... + p_n = 1. \end{cases}$$

Infine, $\forall q \in \Delta^{n-1}$ tale che $q^T Ap = p^T Ap$, deve necessariamente valere la condizione di stabilità (3.3) per ogni $q \neq p$. Il che significa che non c'è nessun'altra strategia candidata ad essere una ESS. □

Teorema 3.7. *$p \in int\left(\Delta^{n-1}\right)$ è una ESS se e solo se*

$$p^T Ax > x^T Ax \tag{3.5}$$

per ogni $x \neq p$ in qualche intorno di p.

Dimostrazione. Supponiamo che p sia evolutivamente stabile. Possiamo rappresentare i punti x vicini a p nella forma $x = \epsilon q + (1-\epsilon)p$ per un appropiato ϵ e scegliendo oppropriatamente q, ad esempio all'interno del compatto $C := \{q \in \Delta^{n-1} |\, q_i = 0\, per\, qualche\, i \in supp(p)\}$, che è l'unione delle facce del simplesso Δ^{n-1} che non contengono p. Dal momento che $q \in C$ e, per ipotesi, $p \in int\left(\Delta^{n-1}\right)$ è una ESS, vale la (3.1) per ogni $\epsilon < \bar{\epsilon}(q)$. Definiamo $\bar{\epsilon}(q)$ come nella dimostrazione della proposizione 3.2 e, utilizzando anche qui teorema di Weierstrass, si può concludere che esiste $\bar{\epsilon} := min\{\bar{\epsilon}(q) |\, q \in C\}$.
Se poniamo $x = \epsilon q + (1-\epsilon)p$, moltiplicando la (3.1) per $\epsilon < \bar{\epsilon}$ ed aggiungendo $(1-\epsilon)p^T A\,(\epsilon q + (1-\epsilon)p)$ ad entrambi i membri, la (3.1) e la (3.5) risultano equivalenti.
In particolare, facendo variare $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, si ottiene la (3.5) su tutto un intorno di p.
Per l'implicazione inversa il ragionamento è simile: per ogni $q \in \Delta^{n-1}$ basta scegliere un x vicino a p che sia combinazione convessa di p e q, per un opportuno ϵ.
A questo punto, per quanto visto sopra, la (3.1) e la (3.5) sono equivalenti. □

3.1.1 Hawks and Doves

I combattimenti intraspecifici (ovvero tra individui di una stessa specie) forniscono un primo esempio di cambiamenti all'interno di una popolazione che dipendono dalla frequenza di un tratto e che possono essere analizzati grazie alla teoria evolutiva dei giochi.
Accade spesso che due individui si scotrino, ad esempio per una preda, per una femmina o per il dominio territoriale; per questo, uno dei primi giochi affrontati dai biologi teorici nel contesto dei conflitti tra animali è quello degli "Hawks and Doves" (Falchi e Colombe).
Supponiamo che due animali siano impegnati in una gara per una risorsa che vale $+V$ per il vincitore. Un animale può mostrarsi aggressivo e ferire gravemente il suo avversario, oppure può ritirarsi, lasciando vincere l'altro. Lesioni gravi riducono la forma fisica di $-W$ e costringono l'animale a ritirarsi.
Quindi le due strategie possibili sono le seguenti:

- Hawk: aggressivo, combatte fino a che non è ferito o fino a quando l'avversario non si ritira;

- Dove: pacifico, si ritira quando l'avversario si "intensifica", evitando ogni tipo di infortunio.

Uno scontro tra due Hawks consiste in un combattimento all'ultimo sangue, che si conclude con la sconfitta del più debole. Il guadagno atteso medio, quindi, sarà $\frac{V-W}{2}$, che assumiamo negativo (quindi $V < W$). Un Dove che incontra un Hawk fugge e non ottiene niente, mentre l'Hawk guadagna tutta la risorsa V. Infine, in uno scontro tra due Doves, questi si gonfiano, mostrando la loro capacità di combattere, fino a che quello che capisce di essere inferiore non si ritira; per cui il guadagno atteso medio è dato da $\frac{V}{2}$.
La matrice dai payoff, pertanto, sarà

$$\begin{bmatrix} \frac{V-W}{2} & V \\ 0 & \frac{V}{2} \end{bmatrix}.$$

Se, all'interno della popolazione, la frequenza degli Hawks è x_1 e quella dei Doves é $1 - x_1$, allora il guadagno atteso di un Hawk sarà

$${e_1}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = x_1 \frac{V-W}{2} + (1 - x_1)V \,,$$

mentre quello di un Dove

$${e_2}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = (1 - x_1)\frac{V}{2} \,.$$

I due guadagni attesi risultano ugali solamente per $x_1 = \frac{V}{W}$. Se la frequenza degli Hawks è minore, quindi si ha $x_1 < \frac{V}{W}$, questi ottengono un guadagno maggiore, quindi tendono ad aumentare; al contrario, se la frequenza è maggiore, cioè per $x_1 > \frac{V}{W}$, il guadagno è minore e loro diminuiscono.
Quindi, in una popolazioni in cui la maggioranza sono Doves, si diffonderebbe l'aggressività degli Hawks, perchè la probabilità di incontrare un Dove e guadagnare $+V$ è alta; al contrario, con una predominanza di Hawks si diffonderebbe la strategia dei Doves. Per cui nessuna delle due strategie è migliore dell'altra.
L'evoluzione dovrebbe portare ad una situazione di equilibrio stabile in cui la frequenza degli Hawks è $x_1 = \frac{V}{W}$, il che è in accordo con il concetto di strategia evolutivamente stabile dato in precedenza; infatti la strategia $p = \left(\frac{V}{W}, \frac{W-V}{W}\right)$ è una ESS:

$$p^T Ax - x^T Ax = \frac{(V - Wx_1)^2}{2W}$$

è strettamente positiva per tutti gli $x_1 \neq \frac{V}{W}$, così la (3.5) è soddisfatta. Dato che $p \in intS_n$, è anche l'unica ESS.
Un'ulteriore conferma del fatto che nessuna delle due strategie pure $H = (1, 0)$ e $D = (0, 1)$ è una ESS si ha applicando la condizione di equilibrio (3.2):

$$p_1(H, H) < p_1(D, H),$$

$$p_2(D, D) < p_1(H, D).$$

3.2 Dinamica del gioco

Come si è già accennato, la teoria dei giochi classica è principalmente statica, al contrario di un processo evolutivo che, generalemnte, è dato dalla combinazione di due elementi: un meccanismo di mutazione che introduce varietà e un meccanismo di selezione che predilige certe varietà ad altre. Il criterio di stabilità evolutiva affrontato finora ha a che fare con il ruolo delle mutazioni. La dinamica studiata dalla teoria evolutiva dei giochi viene modellata da equazioni differenziali sul simplesso generato dalle strategie pure ed è legata al processo di selezione.

3.2.1 Richiami sulla teoria dei sistemi dinamici

Prima di definire le equazioni della replicazione, è utile richiamare alcuni concetti appartenenti alla teoria dei sistemi dinamici e sulle equazioni differenziali che risulteranno utili in seguito.

Definizione 3.8. Dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, un punto di equilibrio z è un punto tale che $f(z) = 0$.

Definizione 3.9. Dato un punto di equilibrio z di un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, diciamo che z è

- stabile, se per ogni intorno U di z, esiste un altro intorno W, tale che ogni soluzione che parte in W rimane dentro U;
- attrattivo, se esiste un intorno W di z, tale che ogni soluzione che parte in W converge verso z;

- asintoticamente stabile, se è stabile e attrattivo;
- globalmente stabile, se tutte le soluzioni che partono nell'insieme di definizione del sistema convergono a z.

Definizione 3.10. Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico con un punto di equilibrio z. Sia J la matrice Jacobiana di f calcolata in z. Le parti reali degli autovalori di J si chiamano esponenti di Lyapunov.

Il calcolo degli esponenti di Lyapunov in corrispondenza di un punto di equilibrio permette di ottenere informazioni sulla sua stabilità.

Teorema 3.11. *Il punto di equilibrio z é:*

- *asintoticamente stabile se tutti gli esponenti di Lyapunov sono negativi (pozzo);*
- *instabile se tutti gli esponenti di Lyapunov sono positivi (sorgente) o se sono uno positivo e l'altro negativo (sella).*

Definizione 3.12. Siano $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico, z un punto di equilibrio ed A la matrice Jacobiana di f calcolata in z. Le parti reali degli autovalori di A si chiamano esponenti di Lyapunov.

Definizione 3.13. Una funzione V definita e di classe C^1 in un intorno U di un punto di equilibrio z si dice funzione di Lyapunov per z se valgono le due seguenti codizioni:

- $\dot{V} = \frac{d}{dt} V\left(x\left(t\right)\right) \geq 0$;
- $V(z) = 0$ e $V(x) < 0 \; \forall x \neq z \in U$.

Se vale la disuguaglianza stretta nella prima condizione, V è detta funzione di Lyapunov stretta.

Ricordiamo, senza dimostrarlo, qualche importante risultato.

Teorema 3.14 (di Lyapunov)**.** *Sia z un punto di equilibrio per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$. Se esiste una funzione di Lyapunov V per z, allora z è un punto di equilibrio stabile. Se V è una funzione di Lyapunov stretta, allora z è asintoticamente stabile.*

Lemma 3.15 (di Gronwall)**.** Sia $[a, b)$ un intervallo, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Siano β e u due funzioni continue su $[a, b)$. Se u è derivabile all'interno di $[a, b)$ e soddisfa la disuguaglianza

$$\dot{u}(t) \geq \beta(t)u(t) \quad \forall t \in [a, b) \ ,$$

allora u è limitata inferiormente dalla soluzione della corrispondente equazione differenziale $\dot{y} = \beta y$:

$$u(t) \geq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)\, ds} \quad \forall t \in [a, b) \, .$$

Vediamo adesso una versione del teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un sistema dinamico:

Teorema 3.16. *Sia $X \subset \mathbb{R}^k$ un aperto e sia $f : X \to \mathbb{R}^k$ una funzione lipschitziana, allora per ogni $x^0 \in X$, esiste un δ tale che il sistema dinamico*

$$\dot{x} = f(x)$$

ha un'unica soluzione $\Phi\left(\cdot, x^0\right) : [-\delta, \delta] \to X$ tale che $\Phi\left(0, x^0\right) = x^0$. Inoltre la soluzione $\Phi\left(t, x^0\right)$ e la sua derivata rispetto al tempo sono continue in t.

L'applicazione Φ che, ad un assegnato $x^0 \in X$, associa la soluzione del sistema dinamico $\Phi\left(t, x^0\right)$ viene detta flusso integrale. Si può dimostrare che tale applicazione è continua in x^0, nel senso che, se $\Phi\left(t, y^0\right)$ e $\Phi\left(t, z^0\right)$ sono le soluzioni passanti rispettivamente per y^0 e z^o al tempo 0, allora

$$|\Phi\left(t, y^0\right) - \Phi\left(t, z^0\right)| \leq |y^0 - z^o| e^{Lt} \, ,$$

ove L è la costante di Lipschitz della funzione f.

Definizione 3.17. Chiamiamo l'insieme $\{x \,|\, \exists t \in \mathbb{R}\, x = \Phi\left(t, x^0\right)\}$ orbita passante per x^0.

3.2.2 Equazioni della Replicazione

Consideriamo una popolazione che dispone di n strategie $E_1, ..., E_n$, pure o miste, distribuite con le rispettive frequenze $x_1, ..., x_n$. Non specificando quante strategie pure consideriamo, indichiamo con Δ_n il simplesso in cui vivono le strategie $E_1, ..., E_n$, per cui n utilizzato come pedice non indica la dimensione del simplesso, ma si riferisce alle strategie che esso contiene. Sicuramente $dim(\Delta_n) \leq n-1$, per cui $\Delta_n \in \mathbb{R}^n$. Se la popolazione è sufficientemente vasta e le generazioni si mescolano continuamente l'una all'altra, possiamo assumere che lo stato della popolazione $x = (x_1, ..., x_n)$ si evolva nel simplesso Δ_n come una funzione differenziabile del tempo.

Il tasso di aumento $\dot{x}_i/x_i$ della strategia E_i è una misura del suo successo evolutivo e può essere espresso come la differenza del guadagno $f_i(x)$ della strategia E_i con il guadagno medio della popolazione $\bar{f}(x) = \sum x_i f_i(x)$, dove assumiamo ogni $f_i(x)$ Lipschitziana. Otteniamo

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = guadagno\, di\, E_i \,-\, guadagno\, medio\,,$$

che conduce al sistema di equazioni

$$\dot{x}_i = x_i \left(f_i(x) - \bar{f}(x)\right) \qquad i = 1, ..., n \tag{3.6}$$

che vengono chiamate equazioni della replicazione (replicator equation), termine coniato dal biologo Richard Dawkins.

Osservazione 3.18. Se allo stato iniziale una certa $\dot{x}_i$ è nulla, vuol dire che la frequenza x_i della strategia a cui corrisponde è un valore costante, che continuerà ad avere derivata nulla. Per cui la frequenza della strategia E_i non verrà modificata con l'aumentare del tempo.

Proposizione 3.19. Il simplesso Δ_n, il suo interno $int(\Delta_n)$ ed il suo bordo $\partial(\Delta_n)$ sono invarianti rispetto alle equazioni della replicazione (3.6).

Dimostrazione.

- Invarianza di Δ_n: per prima cosa osserviamo che $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 1\}$ è invariante. Infatti, se $x \in H$,

  $$\frac{d}{dt}\sum x_i = \sum \dot{x}_i = \sum x_i f_i(x) - \left(\sum x_i\right) \sum x_j f_j(x) = 0$$

  perché $\sum x_i = 1$ e $\sum x_j f_j(x) = \bar{f}(x)$.

  Notiamo inoltre che $\Delta_n = H \cap (\mathbb{R}_+)^n$. Vogliamo quindi dimostrare che ogni soluzione che parte dal simplesso Δ_n non ne esce: se per assurdo non fosse vero esisterebbero ξ ed un tempo $\bar{t}$ tali che la soluzione $\Phi(\bar{t}, \xi) \notin S_n$ (ma $\Phi(\bar{t}, \xi) \in H$ dal momento che H è invariante). Questa soluzione dovrebbe quindi attraversare il bordo di Δ_n. Sappiamo che f è lipschitziana, possiamo quindi applicare il teorema di esistenza ed unicità, il quale garantisce che Φ sia soluzione unica delle equazioni della replicazione e che sia continua in t. Per continuità, dunque, dovrebbero esistere un tempo $\bar{s} < \bar{t}$ ed una strategia i tali che $\Phi_i(\bar{s}, \xi) = 0$ e $\Phi_i(\bar{t}, \xi) < 0$. Ciò è assurdo in virtù del fatto che abbiamo ottenuto una soluzione $\Phi(t, \xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ passante per $\Phi_i(\bar{s}, \xi)$, distinta da quella con la i-esima coordinata costante pari a 0, violando l'unicità.

- Invarianza di $int(\Delta_n)$: con ragionamento analogo al punto precedente, è immediato notare che un punto che parte all'interno del simplesso non può raggiungere il bordo, altrimenti si avrebbero anche qui due soluzioni distinte passanti per uno stesso punto del bordo, violando l'unicità.
- Invarianza di $\partial(\Delta_n)$: $\partial(\Delta_n)$ è dato dall'insieme $\{x \in \Delta_n \,|\, \exists i, x_i = 0\}$; se $\exists t$ tale che $x_i(t) = 0$, allora $x_i = 0 \,\forall\, t$ in base alle (3.6).

□

Grazie alla proposizione appena dimostrata, possiamo considerare solo la restrizione delle (3.6) al simplesso Δ_n.

Per prima cosa verifichiamo che il concetto di strategia evolutivamente stabile dato in un contesto statico concordi con la dinamica della replicazione.
Consideriamo quindi un gioco discreto con n strategie (pure o miste) e con matrice di payoff U. Supponiamo che all'interno della popolazione siano presenti solamente due strategie $p, q \in \Delta_n$, con le rispettive frequenze x_1 e x_2 tali che $x_2 = 1 - x_2$. I payoff saranno dati da

$$f_1(x) = q^T U (x_1 q + x_2 p) \qquad\qquad f_2(x) = p^T U (x_1 q + x_2 p) \,.$$

Per come è definita x_2, sarà sufficiente studiare x_1 per analizzare l'evoluzione dello stato della popolazione. Seguendo le equazioni della replicazione otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1 \left(f_1(x) - \bar{f}(x) \right) \\ &= x_1 (1 - x_1) (f_1(x) - f_2(x)) \\ &= x_1 (1 - x_1) \left[x_1 \left(p^T U p - q^T U p + q^T U q - p^T U q \right) - \left(p^T U p - q^T U p \right) \right] . \end{aligned}$$

I punti di equilibrio $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$ corrispondono all'una o all'altra strategia. Dire che p non può essere invasa dalla strategia q equivale a dire che il punto di equilibrio $x_1 = 0$ è asintoticamente stabile, il che significa che la frequenza x_1 della strategia q decresce se è sufficientemente piccola.
Questo si verica se vale una delle due condizioni

1. $q^T Up < p^T Up$
2. $q^T Up = p^T Up \quad e \quad q^T Uq < p^T Uq$.

Si è già visto che le condizioni sopra elencate assicurano che la strategia p non venga invasa dalla strategia q entro una certa soglia.

Consideriamo ora un gioco G in cui una popolazione dispone di N strategie pure $R_1, ..., R_N$ vertici del simplesso Δ^{N-1} e supponiamo di scegliere alcune strategie (pure e miste) tra tutte quelle possibili per la popolazione, che chiamiamo $E_1, ..., E_n \in \Delta^{N-1}$, dove $N \leq n$. Indichiamo con $U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ la matrice dei payoff e con $x = (x_1 ..., x_n) \in \Delta^{n-1}$, lo stato della popolazione del gioco G, cioè una distribuzione sulle strategie $E_1, ..., E_n$. Indichiamo con $a_{i,j}$ il payoff che ottiene la strategie E_i contro la strategia E_j, quindi $a_{i,j} = {E_i}^T U E_j$; sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice costituita da tutti gli elementi $a_{i,j}$ al variare di i e j.
Possiamo considerare un nuovo gioco $\tilde{G}$ nel quale A è la matrice dei payoff e per il quale $E_1, ..., E_n$ rappresentano le strategie pure, mentre le componenti dello stato della popolazione $x = (x_1 ..., x_n)$ di G diventano le strategie miste per $\tilde{G}$.
Osserviamo inoltre che

$$f_i(x) = {E_i}^T U \sum_j x_j E_j = \sum_j {E_i}^T U E_j x_j = \sum_j a_{i,j} x_j = (Ax)_i \, .$$

Con queste notazioni, quindi, le equazioni della replicazione diventano

$$\dot{x}_i = x_i \left((Ax)_i - x^T Ax \right), \tag{3.7}$$

i cui punti di equilibrio saranno quei punti $z = (z_1, ..., z_n) \in S_n$ tali che $(az)_i = z^T Az = c$ per ogni $z_i > 0$.

Osservazione 3.20. Ricapitolando, vi è un parallelismo tra le strategie pure $R_1, ..., R_N$, punti del simplesso Δ^{N-1} e la matrice dei payoff U di dimensione $N \times N$, con le strategie pure $E_1, ..., E_n$, punti del simplesso Δ^{n-1} e la matrice dei payoff A di dimensione $n \times n$.

Approfondiamo il concetto di stato: dato il gioco G e scelte n strategie $E_1, ..., E_n \in \Delta^{N-1}$, pure o miste, di G, lo stato x è una distribuzione di queste strategie e può essere espresso come loro combinazione convessa, per cui $x \in \Delta^{N-1}$. E' importante osservare che lo stesso punto in Δ^{N-1} può essere espresso in modi diversi e questo da luogo a stati diversi, ecco perchè abbiamo bisogno della definizione che segue:

Definizione 3.21. Sia $p \in \Delta^{n-1}$, allora p è uno stato evolutivamente stabile per il gioco G se è una strategia evolutivamente stabile per il gioco $\tilde{G}$.

Infatti, analogamente a quanto visto nella proposizione 3.2, si ha che $p \in \Delta^{n-1}$ è uno stato evolutivamente stabile se valgono

$$q^T Ap \leq p^T Ap \; \forall q \in \Delta^{n-1}$$

$$q^T Ap = p^T Ap \Rightarrow q^T Aq < p^T Aq \; \forall q \neq p \in \Delta^{n-1}.$$

Esempio 3.2.1. Riprendiamo il problema degli "Hawks and Doves": abbiamo due strategie pure, per comodità indichiamole con $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$, con le rispettive frequenze x_1 e $x_2 = 1 - x_1$ e la matrice di payoff

$$\begin{bmatrix} \frac{V-W}{2} & V \\ 0 & \frac{V}{2} \end{bmatrix}.$$

Dal momento che per questo gioco $n = 2$, il sistema della replicazione si traduce ad una sola equazione per x_1:

$$\dot{x_1} = x_1 (1 - x_1) ((Ax)_1 - (Ax)_2)$$

e ponendo $x_1 = x$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} x (1 - x) (V - Wx).$$

Come abbiamo già visto, la strategia $\left(\frac{V}{W}, \frac{W-V}{W}\right)$ è una ESS per il gioco.
Supponiamo ora di aggiungere una terza razza, i "Retaliators": questi si comportano come Hawks quando si scontrano con un Hawk e come Doves se incontrano un Dove. Nel caso in cui un Retaliator si scontra con un individuo della sua stessa razza, si comporteranno entambi come Doves.
Costruiamo quindi la matrice dei payoff A:

$$\begin{bmatrix} \frac{V-W}{2} & V & \frac{V-W}{2} \\ 0 & \frac{V}{2} & \frac{V}{2} \\ \frac{V-W}{2} & \frac{V}{2} & \frac{V}{2} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo quindi che E_3 è una ESS nel gioco originale, per questo non può essere invasa da E_1 e E_2; tuttavia lo stato $e_3 = (0, 0, 1)$, ottenuto estendendo il gioco alla terza strategia e considerandola quindi una strategia pura per quello che sarebbe $\tilde{G}$, non è evolutivamente stabile.

Il seguente teorema definisce alcune relazioni che valgono tra gli equilibri di Nash per il gioco $\tilde{G}$ e i punti di equilibrio del sistema dinamico (3.7):

Teorema 3.22 (Folk theorem of evolutionary game theory)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se z è un equilibrio di Nash per $\tilde{G}$, allora è un punto di equilibrio per il sistema* (3.7)*;*
2. *se z è un punto di equilibrio stabile per il sistema* (3.7)*, allora è un equilibrio di Nash per $\tilde{G}$;*
3. *se z è un punto limite di un'orbita interna per il sistema* (3.7) *(cioè $\exists \xi \neq z \in int(\Delta_n)$ tale che $lim_{t\to\infty} \Phi(t, \xi) = z$), allora è un equilibrio di Nash per $\tilde{G}$;*
4. *se z è uno stato evolutivamente stabile per G (ovvero una ESS per $\tilde{G}$), allora è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per* (3.7)*.*

Dimostrazione.

1. Se z è un equilibrio di Nash, allora verifica $(Az)_j = z^T Az \,\forall j$ tale che $z_j > 0$, quindi annulla la parte destra di (3.7), ovvero è un punto di equilibrio del sistema.

2. Supponiamo per assurdo che z sia un punto di equilibrio stabile per (3.7), ma non un equilibrio di Nash per $\tilde{G}$.
   Essendo un punto di equilibrio per il sistema, z soddisfa $(Az)_j = z^T Az \,\forall j$ tale che $z_j > 0$, ma, non essendo un equilibrio di Nash, deve necessariamente esistere un indice i tale che $z_i = 0$ e $(Az)_i > z^T Az$. Per continuità, esistono un $\delta > 0$ ed un intorno U di z tali che, per ogni $y \in U$, si ha $(Ay)_i - y^T Ay \geq \delta$. Una qualsiasi soluzione $y(t)$ del sistema (3.7), con $y(0) \in U$, allora soddisfa

$$\dot{y}_i(t) = y_i \left((Ay)_i - y^T Ay \right) \geq y_i \delta \quad \forall t > 0 \quad t.c. \quad y(t) \in U.$$

Quindi, applicando il lemma di Gronwall con $v(t) = \delta$ otteniamo

$$y_i(t) \geq y_i(0)e^{\delta t} \quad \forall t > 0 \quad t.c. \quad y(t) \in U;$$

ovvero qualsiasi soluzione del sistema che parta in U si allontana da z con velocità esponenziale, in contraddizione con la nozione di equilibrio stabile.

3. Analogamente al punto precedente, procediamo per assurdo: supponiamo $\exists \xi \neq z \in int(\Delta_n)$ tale che $lim_{t\to\infty} \Phi(t,\xi) = z$, ma che $\exists i$ tale che $z_i = 0$ e $(Az)_i > z^T Az$, cioè che z non sia un equilibrio di Nash. Allora per continuità devono esistere un $\delta > 0$ ed una strategia i tali che $(Az)_i - z^T Az > \delta$. Dal momento che per ipotesi $\Phi(t,\xi) \to z$, esiste un certo tempo $\tilde{t}$ tale che

$$(A\Phi)_i - \Phi^T A\Phi > \delta \quad \forall t \geq \tilde{t},$$

cioè

$$\dot{\Phi}_i(t,\xi) > \Phi_i(t,\xi)\,\delta \quad \forall t \geq \tilde{t}.$$

Applicando il lemma i Gronwall con $v(t) = \delta$, risulta

$$\Phi(t,\xi) > \Phi\left(\tilde{t},\xi\right) e^{\delta\left(t-\tilde{t}\right)},$$

ma, dal momento che $\Phi\left(\tilde{t},\xi\right) > 0$, si avrebbe $\Phi(t,\xi) \to \infty$, in contraddizione con l'ipotesi di partenza su z.

4. Supponendo che z sia uno stato evolutivamente stabile, si può usare il teorema di Lyapunov per dimosgtrare che è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. La funzione

$$V(x) = \prod_{z_i>0} {x_i}^{z_i} - \prod_{z_i>0} {z_i}^{z_i}$$

risulta infatti essere una funzione di Lyapunov per z: chiaramente $V(z) = 0$, inoltre $V(z) < 0$ per $x \neq z$ in quanto

$$log\left(\prod_{z_i>0} {x_i}^{z_i}\right) \leq log\left(\prod_{z_i>0} {z_i}^{z_i}\right),$$

che sarebbe a dire

$$\sum_{z_i>0} z_i log\frac{x_i}{z_i} \leq 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza può essere dimostrata sfruttando la stretta concavità del logaritmo e usando la disuguaglianza di Jensen, per cui

$$\sum_{z_i>0} z_i log\frac{x_i}{z_i} \leq log\left(\sum_{z_i>0} z_i\frac{x_i}{z_i}\right) = log1 = 0$$

e l'uguaglianza vale solo nel caso in cui $x_i = z_i$ per $i = 1, ..., n$.
Ora rimane da dimostrare che $\dot{V}(x) > 0 \,\forall\, x \neq z$ in un certo intorno di z: è sufficiente dimostrare che $\dot{P}(x) > 0$ in un intorno di z, dove

$$P := V + \prod_{z_i>0} {z_i}^{z_i},$$

poichè il termine $\prod_{z_i>0} {z_i}^{z_i}$ è costante rispetto a x. Notiamo che P è una funzione non negativa, per cui limitiamo lo studio del segno della derivata agli $x \in \{x \,|\, x_i > 0 \,\forall i\, t.c.\, z_i > 0\}$:

$$\dot{P}(x) = P\frac{d}{dt}logP = P\frac{d}{dt}\sum_{z_i>0} z_i log x_i = P\sum_{z_i>0} z_i\frac{\dot{x}_i}{x_i} =$$

$$P\sum_{z_i>0} z_i\left((Ax)_i - x^TAx\right) = P\left(z^TAx - x^TAx\right).$$

Dal momento che z per ipotesi è uno stato evolutivamente stabile , per ogni $x \neq z$ questa quantità risulta strettamente positiva (dalla relazione (3.5)); applicando quindi il teorema di Lyapunov, z risulta essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

□

Osservazione 3.23. Generalmente, nessuna delle quattro affermazioni del teorema precedente può essere invertita.
Dalla prima condizione otteniamo l'implicazione inversa solamente se $z \in \Delta_n$. In quel caso $z_i \neq 0$ per ogni i ed essendo z un punto di equilibrio, $(Az)_1 = ... = (Az)_n$ e quindi z risulta un equilibrio di Nash. Invece, se $z \in \partial(\Delta_n)$, esiste un indice i tale che $z_i = 0$, ma il fatto che z sia un punto di equilibrio, non esclude che possa verificarsi $(Az)_i > z^TAz$, quindi z potrebbe non essere un equilibrio di Nash.
Inoltre, con i due esempi che seguono, mostriamo che le implicazioni inverse del teorema non sono valide.

Esempio 3.2.2 (sasso-carta-forbice)**.** Consideriamo, al variare di $a \in \mathbb{R}$, un gioco con matrice di payoff

$$\begin{bmatrix} 0 & 1+a & -1 \\ -1 & 0 & 1+a \\ 1+a & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

Questa matrice rappresenta la generalizzazione del gioco *sasso-carta-forbice*, la versione originale si ottiene per $a = 0$.

Per ogni a il gioco ha un equilibrio simmetrico di Nash interno a Δ^3: $\bar{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Per calcolarlo si può procedere come nell'esempio 2.1.1, la differenza sta nel fatto che qui ogni giocatore ha a disposizione tre strategie, per cui i vettori che rappresentano gli stati saranno $x = (x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2)^T$ per il primo giocatore e $y = (y_1, y_2, 1-y_1-y_2)^T$ per il secondo. Una volta determinate le due funzioni payoff, si calcolano le quattro derivate parziali $\frac{\partial p_1(x,y)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial p_1(x,y)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial p_2(x,y)}{\partial y_1}$ e $\frac{\partial p_2(x,y)}{\partial y_2}$ e si pongono uguali a 0, ottenendo così l'equilibrio di Nash.

Vogliamo capire ora per quali valori di a, l'equilibrio $\bar{x}$ è stabile o instabile nel distema delle replicazioni; per far questo consideriamo la funzione $f(x) = x_1x_2x_3 - \frac{1}{27}$ e vediamo dove cresce, decresce o è costante.

Come prima cosa osserviamo che il sistema della replicazione è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[x_2(1+a) - x_3 - x^TAx\right] x_1 \\ \dot{x}_2 = \left[x_3(1+a) - x_1 - x^TAx\right] x_2 \\ \dot{x}_3 = \left[x_1(1+a) - x_2 - x^TAx\right] x_3 \end{cases}.$$

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo di $f(x)$:

$$\dot{f} = \dot{x_1}x_2x_3 + x_1\dot{x_2}x_3 + x_1x_2\dot{x_3} =$$

$$= x_1x_2x_3\left[(1+a)(x_1+x_2+x_3) - (x_1+x_2+x_3) - 3x^TAx\right] =$$

$$= x_1x_2x_3(a - 3x^TAx).$$

Ricordando che

$$1 = (x_1+x_2+x_3)^2 = ||x||^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3),$$

otteniamo, per il payoff medio x^TAx, l'espressione

$$x^TAx =$$

$$(x_2(1+a) - x_3, -x_1 + x_3(1+a), x_1(1+a) - x_2)\, x =$$

$$= (1+a)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) =$$

$$= a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \frac{a}{2}\left(1 - ||x||^2\right);$$

ne segue che

$$\dot{f}(x) = x_1x_2x_3\frac{a}{2}\left(3||x||^2 - 1\right).$$

La funzione $||x||^2$, su Δ^3, raggiunge il massimo nei tre vertici, dove vale 1; e raggiunge il minimo per $\bar{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$, dove vale 1/3. Per cui il fattore $\left(3||x||^2 - 1\right)$ vale 0 per $x = \bar{x}$ ed altrove è positivo.
Ora distinguiamo i tre casi per $a = 0$, $a > 0$ e $a < 0$:

- per $a = 0$, $\dot{f} = 0$, per cui f è una funzione costante sulle soluzioni; quindi per ogni stato (punto) iniziale $x^0 \in int(\Delta^3)$, la soluzione del sistema $\Phi(t, x^0)$ della replicazione si muove lungo la curva chiusa $x_1^0x_2^0x_3^0 = \gamma$, cioè le soluzioni sono periodiche. Se $x^0 = \bar{x}$, la curva coincide con il punto. Inoltre f rappresenta una funzione di Lyapunov per $\bar{x}$, ma non stretta, quindi il teorema 3.14 ci assicura che $\bar{x}$ è un punto di equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile;

- per $a > 0$, f rappresenta una funzione di Lyapunov per $\bar{x}$ stretta, quindi grazie al teorema 3.14, sappiamo che $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile;

- per $a < 0$, la funzione f è decrescente lungo le soluzioni, per cui queste sono delle curve spiraleggianti che si allontanano da $\bar{x}$, il quale è un punto di equilibrio instabile.

L'ultimo caso mostra che il viceversa delle prime due affermazioni del teorema 3.22 non è valido. Infatti i punti di equilibrio del problema sono quattro: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ e $\bar{x}$, ma solamente l'ultimo è un equilibrio di Nash ed è un equilibrio instabile per il sistema della replicazione.
Con il primo invece confermiamo l'impossibilità di invertire la terza affermazione dello stesso teorema: $\bar{x}$ risulta essere un punto di equilibrio stabile, ma non asintoticamente, per cui non è attrattivo; di conseguenza non può essere un punto limite di alcuna soluzione.

Con il prossimo esempio, invece, diamo una prova del fatto che neanche la quarta affermazione del 3.22 può essere invertita.

Esempio 3.2.3. Per verificare che la stabilità asintotica non implica la stabilità evolutiva, consideriamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

Per questo gioco, vi sono due equilibri di Nash (simmetrici): $e_1 = (1, 0, 0)$ e $m = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Ricordando che $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, le equazioni della replicazione sono

$$\dot{x}_1 = x_1(-5x_1^2 + 8x_2^2 + 9x_1 + 2x_2 - 4)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-5x_1^2 + 8x_2^2 - 3x_1 - 13x_2 + 5).$$

Il punto m è di equilibrio per il sistema della replicazione; inoltre gli esponenti di Lyapunov del sistema risultano avere parte reale negativa: $-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$. Ne segue che m è un pozzo e quindi è asintoticamente stabile.
Tuttavia è immediato verificare che e_1 è ESS; ciò esclude la possibilità che lo sia anche m dal momento che $m \in int(\Delta^3)$ e quindi, se fosse ESS, sarebbe l'unica.

Con l'ultimo esempio abbiamo dato una prova del fatto che la stabilità asintotica non garantisce la stabilità evolutiva; con alcune modifiche, tuttavia, è possibile ottenere un risultato di equivalenza.
Ricordiamo che ad uno stato $z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta^{n-1}$ nel gioco $\tilde{G}$ corrisponde una strategia $\tilde{z} = \sum_i z_i E_i \in \Delta^{N-1}$, nel gioco originale. Scegliendo diverse strategie possibili $W_1, ..., W_m \in \Delta^{n-1}$, avremo un nuovo gioco H, in cui se $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{m} a_j W_j$, z sarà rappresentata dallo stato $(a_1, ..., a_m)$.

Definizione 3.24. Diciamo che $z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta^{n-1}$ è fortemente stabile se, per ogni scelta di $W_1, ..., W_m \in \Delta^{n-1}$, lo stato $(a_1, ..., a_m)$ che rappresenta z è asintoticamente stabile nel gioco H, ottenuto considerando $W_1, ..., W_m$ come possibili strategie iniziali.

Teorema 3.25. *Uno stato $z \in \Delta^{n-1}$ è evolutivamente stabile se e solo se è fortemente stabile.*

Dimostrazione. Sia $z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta^{n-1}$ uno stato evolutivamente stabile; scegliamo quindi $W_1, ..., W_m \in \Delta^{n-1}$ e consideriamo il gioco H indotto da queste strategie. Allora ogni combinazione convessa di $W_1, ..., W_m$ è una combinaione convessa anche di $E_1, ..., E_n$, per cui $z = (a_1, ..., a_m)$ è uno stato evolutivamente stabile anche per il gioco H. Dall'arbitrarietà di $W_1, ..., W_m$ segue che z è fortemente stabile.
Supponiamo ora z fortemente stabile; prendiamo $q \in \Delta^{n-1}$ e consideriamo il gioco H ottenuto a partire dalle sole z e q come possibili strategie iniziali: siccome z è asintoticamente stabile, allora

$$\tilde{q}^T U \tilde{z} < \tilde{z}^T U \tilde{z}$$

oppure

$$\tilde{q}^T U \tilde{z} = \tilde{z}^T U \tilde{z} \quad e \quad \tilde{q}^T U \tilde{q} < \tilde{z}^T U \tilde{q},$$

dove $\tilde{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i E_i$ e U è la matrice dei payoff del gioco originale. Da tutto ciò si deduce che per ogni $q \in S_n$ si ha

$$q^T A z < z^T A z$$

oppure

$$q^T A z = z^T A z \quad e \quad q^T A q < z^T A q,$$

cioè z è uno stato evolutivamente stabile. □

3.3 Giochi asimmetrici

Finora si è parlato di giochi simmetrici, quindi abbiamo considerato conflitti tra individui che risultano indistinguibili.
Molte volte, però, questi conflitti avvengono tra maschi e femmine, o tra individui di specie diverse, quindi si presentano in una forma di gioco che viene definita asimmetrica, in cui i profitti differiscono a seconda della specie di appartenenza.
Restringiamoci a giochi solamente tra due specie diverse, chiamiamole X e Y, e supponiamo che gli individui che si scontrano appartengono sempre uno ad X e l'altro ad Y, per cui, prendendo in prestito termini biologici, possiamo dire che tratteremo conflitti interspecifici, e mai intraspecifici. Inoltre continuiamo a

mantenere l'ipotesi secondo la quale l'insieme delle strategie possibili sia finito; quindi indichiamo con $E_1, ..., E_n$ le strategie possibili per la popolazione X e con $F_1, ..., F_m$ quelle per la popolazione Y, con x_i la frequenza della strategia E_i all'interno della popolazione X e con y_j la frequenza di F_j all'interno di Y. Quindi lo stato x della popolazione X sarà un punto in Δ_n e lo stato y della popolazione Y sarà un punto in Δ_m.
Se un individuo che usa la strategia E_i gioca contro un individuo che usa la strategia F_j, chiamiamo a_{ij} il payoff per il primo giocatore e b_{ji} il payoff per il secondo, allora il gioco può essere descritto dalle matrici di payoff $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ji})$. Le espressioni $x^T Ay$ e $y^T Bx$ rappresentano rispettivamente i payoff medi per le popolazioni X e Y.
Ora, assumiamo che la strategia E_i sia evolutivamente stabile contro uno stato y della popolazione Y, allora sicuramente non deve essere peggiore di tutte le altre strategie pure, cioè deve valere

$$(Ay)_i \geq (Ay)_k \quad \forall\, k \neq i;$$

nel caso in cui valesse l'uguaglianza, non c'è nessuna ragionevole condizione che assicura che E_i non possa essere invasa. Questo ci porta ad osservare che la condizione di stabilità evolutiva nei giochi asimmetrici è decisamente più limitante rispetto al caso simmetrico. Arriviamo così alla seguente

Definizione 3.26. Una coppia di strategie (p, q) si dice evolutivamente stabile per un gioco asimmetrico a due specie se

$$p^T Aq > x^T Aq \quad \forall x \neq p \in \Delta_n$$

$$q^T Bp > y^T Bp \quad \forall y \neq q \in \Delta_m.$$

Quindi, una coppia (p, q) è una strategia evolutivamente stabile se è un equilibrio di Nash stretto per il gioco a due giocatori, con matrici di payoff A e B. Inoltre abbiamo già visto nella proposizione 2.10 che un equilibrio di Nash stretto è necessariamente nelle strategie pure, ne deriva la seguente

Proposizione 3.27. Una coppia di strategie evolutivamente stabile è necessariamente nelle strategie pure.

Esempio 3.3.1 (Battaglia dei sessi)**.** Questo esempio rappresenta un gioco asimmetrico nel quale è presente un equilibrio di Nash nelle strategie miste,

quindi non stretto. Non essendoci nessun equilibrio di strategie pure, per quanto detto nella proposizione precedente, il gioco non avrà strategie evolutivamente stabili.
Consideriamo una popolazione di maschi e femmine, in cui le femmine si prendono sempre cura dei loro figli. Supponiamo che tra le femmine ci siano quelle timide, che prima di accoppiarsi si fanno fare la corte per lungo tempo, e quelle che, al contrario, si accoppiano appena ne hanno l'occasione; analogamente, tra i maschi ci siano quelli strafottenti, che abbandonano la compagna dopo l'accoppiamento e non sono disposti a farle la corte, e quelli fedeli, che sono disposti ad una lunga corte ed a prendersi cura dei figli.
Entrambi i genitori hanno un guadagno G dalla nascita di un figlio; prendersi cura dei figli comporta un dispendio di tempo ed energia $-C$, che risulta a carico della sola femmina nel caso in cui il maschio sia strafottente, è invece da dividersi a metà se il maschio risulta fedele; infine una lunga corte provoca un dispendio $-E$ per entrambi i partner. Assumiamo $0 < E < G < C < 2(G-E)$.
Se un maschio fedele si accoppia con una femmina timida, il payoff è $G - \frac{C}{2} - E$ per entrambi; un maschio fedele e una femmina facile guadagnano entrambi $G - \frac{C}{2}$; un maschio strafottente che si accoppia con una femmina facile guadagna G, mentre la femmina guadagna $G - C$; infine un maschio strafottente e una femmina timida non si accoppiano, quindi il payoff è 0 per entrambi.
Le matrici dei payoff, allora, sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G - \frac{C}{2} - E & G - \frac{C}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & G - \frac{C}{2} - E \\ G - C & G - \frac{C}{2} \end{bmatrix}.$$

C'è un unico equilibrio di Nash, dato da $x^* = \frac{E}{C-G+E}$, $y^* = \frac{C}{2(G-E)}$, che, essendo misto, non può essere stretto. Come si era anticipato, questo gioco non prevede coppie di strategie evolutivamente stabili.

3.3.1 Dinamica asimmetrica

Analogamente al caso simmetrico, possiamo associare un sistema di equazioni differenziali al gioco , assumendo che il tasso di crescita $\frac{\dot{x}_i}{x_i}$ della frequenza della strategia E_i sia uguale alla differenza tra il payoff $(Ay)_i$ e il payoff medio $x^T Ay$. Analogamente, viene definito il tasso di crescita $\frac{\dot{y}_i}{y_i}$ della frequenza della strategia

F_j. Si arriva così al sistema della replicazione

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i((Ay)_i - x^T Ay) & i = 1, ...n \\ \dot{y}_j = y_j((Bx)_j - y^T Bx) & j = 1, ...m \end{cases} \tag{3.8}$$

sullo spazio $\Delta_n \times \Delta_m$ di tutti gli stati per X e Y.
Inoltre vale il seguente risultato, simile alla proposizione 3.19 per il caso simmetrico:

Proposizione 3.28. Gli insiemi $\Delta_n \times \Delta_m$, $int\,(\Delta_n \times \Delta_m)$ e $\partial(\Delta_n \times \Delta_m)$ sono invarianti rispetto alla dinamica della replicazione.

Osservazione 3.29. Analogamente a quanto è stato fatto nella dimostrazione della proposizione 3.6, in cui si è definito il sistema che ha come punto di equilibrio la strategia $p \in int(\Delta_n)$, anche qui possiamo osservare che i punti di equilibrio del sistema (3.8) interni a $\Delta_n \times \Delta_m$ sono le soluzioni (x, y), strettamente positive, del sistema di equazioni

$$\begin{cases} (Ay)_1 = ... = (Ay)_n & \sum y_j = 1 \\ (Bx)_1 = ... = (Bx)_m & \sum x_i = 1 \end{cases} . \tag{3.9}$$

Se $n \neq m$ non ci sono soluzioni al sistema (3.9), oppure le soluzioni formano un sottospazio affine di dimensione almeno $|n - m|$. L'insieme dei punti di equilibrio in $int(\Delta_n \times \Delta_m)$, perciò, o è vuoto, o interseca un sottospazio $|n-m|$-dimensionale; può esserci un punto di equilibrio isolato solo se $n = m$; se tale punto esiste, è unico.

Anche riguardo alle relazioni tra equilibri di Nash e punti di equilibrio della dinamica della replicazione, valgono risultati analoghi a quelli ottenuti per i giochi simmetrici.

Lemma 3.30. Un punto $(z, w) \in \Delta_n \times \Delta_m$ è asintoticamente stabile se esiste un intorno U di (z, w) tale che per ogni $(x, y) \in U$ si ha

$$z^T Ay - x^T Ay + w^T Bx - y^T Bx > 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$V(x, y) = \prod_{z_i > 0} x_i^{z_i} \prod_{w_j > 0} y_j^{w_j} - \prod_{z_i > 0} z_i^{z_i} \prod_{w_j > 0} w_j^{w_j}$$

e dimostriamo che la funzione V è una funzione di Lyapunov per il punto (z, w) procedendo in maniera analoga alla dimostrazione dell'ultima implicazione del teorema 3.22. Per prima cosa notiamo che $V(z, w) = 0$; poi, utilizzando la disuguaglianza di Jensen, mostriamo che $V(x, y) < 0$ per $(x, y) \neq (z, w)$. Infine, posto

$$P := V + \prod_{z_i>0} z_i^{z_i} \prod_{w_j>0} w_j^{w_j}$$

si dimostra che $\dot{V} > 0$ facendo vedere che $\dot{P} > 0$:

$$\dot{P}(x,y) = P\frac{d}{dt}logP = P\frac{d}{dt}\left(\sum_{z_i>0} z_i log x_i + \sum_{w_j>0} w_j log y_j\right) =$$

$$= P\left(\sum_{z_i>0} z_i \frac{\dot{x}_i}{x_i} + \sum_{w_j>0} w_j \frac{\dot{y}_j}{y_j}\right) =$$

$$= P\left(\sum_{z_i>0} z_i \left((Ay)_i - x^T Ay\right) + \sum_{w_j>0} w_j \left((Bx)_j - y^T Bx\right)\right) =$$

$$= P\left(z^T Ay - x^T Ay + w^T Bx - y^T Bx\right) > 0$$

se consideriamo $(x, y) \in U \cap M \neq \emptyset$, con $M = \{(x, y) \,|\, x_i > 0 \, se \, z_i > 0 \, e \, y_j > 0 \, se \, w_j > 0\}$ l'insieme su cui $P > 0$. Concludiamo che (z, w) è asintoticamente stabile. □

Teorema 3.31. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se (z, w) è un equilibrio di Nash, allora è un punto di equilibrio per il sistema* (3.8)*;*

2. *se (z, w) è un punto di equilibrio stabile per il sistema* (3.8)*, allora è un equilibrio di Nash;*

3. *se (z, w) è un punto limite di un'orbita interna per il sistema* (3.8) *(cioè $\exists(\xi, \zeta) \neq (z, w) \in int(\Delta_n \times \Delta_m) \, tale \, che \, lim_{t\to\infty} \Phi\left(t, (\xi, \zeta)\right) = (z, w)$), allora è un equilibrio di Nash;*

4. *se (z, w) è uno stato evolutivamente stabile, allora è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per* (3.8)*.*

Dimostrazione. La dimostrazione presentata riprende quella fatta per il Folk Theorem nel caso simmetrico, ovviamente con le opportune modifiche.

1. Se (z,w) è un equilibrio di Nash, allora verifica $(Aw)_i = z^T Aw \, \forall i$ tale che $z_i > 0$ e $(Bz)_j = w^T Bz \, \forall j$ tale che $w_j > 0$, quindi annulla la parte destra di (3.8), ovvero è un punto di equilibrio del sistema.

2. Supponiamo per assurdo che (z,w) sia un punto di equilibrio stabile per (3.8), ma non un equilibrio di Nash.
Essendo un punto di equilibrio per il sistema, (z,w) soddisfa $(Aw)_i = z^T Aw \, \forall i$ tale che $z_i > 0$ (e $(Bz)_j = w^T Bz \, \forall j$ tale che $w_j > 0$), ma, non essendo un equilibrio di Nash, deve necessariamente esistere un indice i tale che $z_i = 0$ e $(Aw)_i > z^T Aw$ (analogamente, possiamo prendere un indice j tale per cui $w_j = 0$ e $(Bz)_j > w^T Bz$). Per continuità, esistono un $\delta > 0$ ed un intorno U di (z,w) tali che, per ogni $(x,y) \in U$, si ha $(Ay)_i - x^T Ay \geq \delta$. Una qualsiasi soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema (3.8), con $(x(0), y(0)) \in U$, allora soddisfa
$$\dot{x}_i(t) = x_i \left((Ay)_i - x^T Ay \right) \geq x_i \delta \quad \forall t > 0 \quad t.c. \quad (x(t), y(t)) \in U.$$
Quindi, applicando il lemma di Gronwall con $v(t) = \delta$ otteniamo
$$x_i(t) \geq x_i(0) e^{\delta t} \quad \forall t > 0 \quad t.c. \quad (x(t), y(t)) \in U;$$
ovvero qualsiasi soluzione del sistema che parta in U si allontana da (z,w) con velocità esponenziale, in contraddizione con la nozione di equilibrio stabile.

3. Analogamente al punto precedente, procediamo per assurdo: supponiamo $\exists (\xi, \zeta) \neq (z,w) \in int(\Delta_n \times \Delta_m)$ tale che $lim_{t \to \infty} \Phi(t, (\xi, \zeta)) = (z,w)$, ma che esiste i tale che $z_i = 0$ e $(Aw)_i > z^T Aw$ (o, analogamente, che esiste j tale che $w_j = 0$ e $(Bz)_j > w^T Bz$), cioè che (z,w) non sia un equilibrio di Nash. Denotiamo con $(\varphi, \psi) := \Phi$ il flusso integrale, separando le sue componenti su Δ_n da quelle su Δ_m; per ipotesi $\Phi(t, (\xi, \zeta)) \to (z,w)$, allora per continuità devono esistere un $\delta > 0$ ed un certo tempo $\tilde{t}$ tale che
$$(A\psi)_i - \varphi^T A\psi > \delta \quad \forall t \geq \tilde{t},$$
cioè
$$\dot{\varphi}_i(t, (\xi, \zeta)) > \Phi_i(t, (\xi, \zeta)) \, \delta \quad \forall t \geq \tilde{t}.$$

Applicando il lemma i Gronwall con $v(t) = \delta$, risulta

$$\Phi\left(t, (\xi, \zeta)\right) > \Phi\left(\tilde{t}, (\xi, \zeta)\right) e^{\delta\left(t - \tilde{t}\right)},$$

ma, dal momento che $\Phi\left(\tilde{t}, (\xi, \zeta)\right) > 0$, si avrebbe $\varphi\left(t, (\xi, \zeta)\right) \to \infty$, in contraddizione con l'ipotesi di partenza su (z, w).

4. Per ipotesi si ha che

$$z^T A w > x^T A w \quad \forall\, x \neq z \quad e \quad w^T B z > y^T B z \quad \forall\, y \neq w.$$

Per continuità esiste un intorno U di (z, w) tale che per ogni $(x, y) \in U$ vale

$$z^T A y - x^T A y + w^T B x - y^T B x > 0,$$

quindi siamo nelle ipotesi della proposizione precedente e possiamo concludere che (z, w) è asintoticamente stabile.

$\square$

Bibliografia

[1] I.M. Bomze, *Non-cooperative two-person games in biology: a classification*, Int. J. of Game Theory, Vol. 15, (1986), 31-57.

[2] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Londra, Pearson College Div, (1974).

[3] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary game dynamics*, Bulletin of the Amer Math. Society, Vol. 40, No. 4 (2003), 479-519.

[4] Shizuo Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. Vol. 8, No. 3, (1941), 457-459.

[5] John Nash, *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics, Vol. 54, No. 2, (1951), 286-295.

[6] Edoardo Sernesi, *Geometria I*, Torino, Bollati Boringhieri, (1989).

[7] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, American Scientist, Vol. 64, No. 1 (1976), 41-45.