

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E APPLICAZIONI



MOVIMENTI DI ISOTOPIA PER NODI
IN UN RETICOLO CUBICO

Tesi di Laurea
in Geometria

Relatore

Chiar.mo Prof. Riccardo Piergallini

Laureando

Alessio Capogrosso

Indice

Introduzione	1
1 Teoria dei nodi	4
1.1 Nodi e diagrammi	4
1.2 Nodi cubici	9
2 Movimenti per nodi cubici	15
2.1 Cilindro di isotopia	15
2.2 Teorema fondamentale	20
2.3 Dimostrazione del teorema fondamentale	21
Conclusione	50
Bibliografia	51

Introduzione

La topologia è una branca della matematica moderna che studia oggetti che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza strappi, sovrapposizioni e incollature. I nodi, che possiamo immaginare come tratti di corda aggrovigliati con le estremità incollate tra loro, sono tra gli oggetti di interesse primario della topologia, la teoria dei nodi infatti trova applicazioni anche in fisica, chimica e biologia. La questione principale di questa teoria è il problema dell'equivalenza, ovvero come fare a stabilire se due nodi sono equivalenti oppure no, dove con nodi equivalenti (o isotopi) intendiamo nodi che si possono deformare l'uno nell'altro senza tagli o incollature. Questo è un problema piuttosto difficile da risolvere e solo negli ultimi decenni sono state sviluppate tecniche, che non tratteremo in questa tesi, per risolvere la questione almeno dal punto di vista teorico. In questa tesi cercheremo di dare solo una parziale risposta a questo quesito, infatti lo scopo di questo elaborato è illustrare una particolare rappresentazione dei nodi in reticoli cubici, e dimostrare il teorema di rappresentazione delle isotopie attraverso dei movimenti dei nodi in questi reticoli.

Il primo capitolo è dedicato all'introduzione di alcuni concetti fondamen-

tali della teoria dei nodi: daremo le definizioni di nodo, diagramma, isotopia, tratteremo il problema dell'equivalenza ed enunceremo uno dei primi risultati importanti di questa teoria, ovvero il teorema di Reidemeister. Restringere-
mo poi l'attenzione ai nodi poligonali formati da spigoli di un reticolo cubico nello spazio euclideo, detti nodi cubici. Infine dimostreremo che è sempre possibile trasformare un nodo liscio in un nodo cubico mediante isotopie.

Nel secondo capitolo definiremo dei movimenti, detti movimenti cubici, che costituiscono l'analogo dei movimenti di Reidemeister per i nodi classici e dimostreremo il teorema fondamentale che ci permette di rappresentare le isotopie tra nodi cubici attraverso i movimenti cubici, in altre parole dimostreremo che due nodi cubici sono isotopi se e solo se esiste una sequenza finita di movimenti cubici che portano l'uno nell'altro o viceversa. Gran parte di questo lavoro è dedicato proprio alla dimostrazione del teorema fondamentale, in particolare alla condizione sufficiente. La strategia che adotteremo per la dimostrazione è la seguente:

- Dati i due nodi cubici isotopi K_1 e K_2 , per entrambi considereremo un particolare intorno tubolare, e sulla frontiera di questi intorni costruiremo due nodi cubici, K'_1 e K'_2 , isotopi rispettivamente ai nodi di partenza.
- Sia per $i = 1$ che per $i = 2$ costruiremo una superficie che abbia come frontiera l'unione di K_i e K'_i per poi dimostrare che esiste una sequenza finita di movimenti cubici che porta il nodo K_i in K'_i e viceversa.
- Per concludere la dimostrazione proveremo che K'_1 e K'_2 sono equivalenti a meno di movimenti cubici.

La dimostrazione del teorema fondamentale conclude il secondo capitolo. Infine vi è una conclusione nella quale daremo dei suggerimenti per possibili sviluppi futuri.

Capitolo 1

Teoria dei nodi

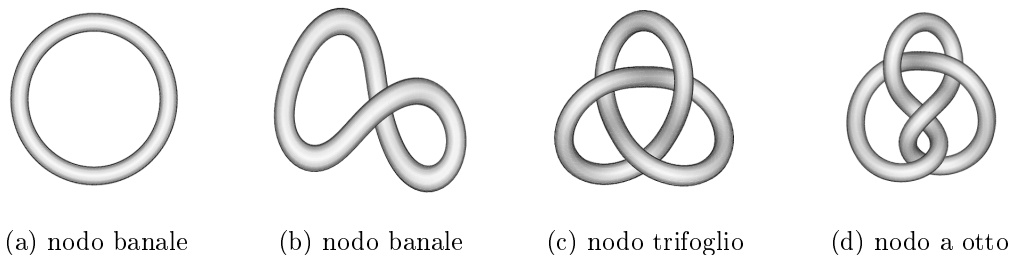
1.1 Nodi e diagrammi

La teoria dei nodi è una branca della topologia, a sua volta branca della geometria che studia i nodi e le loro proprietà. Di solito si pensa ad un nodo come un pezzo di corda intrecciato nello spazio tridimensionale con le estremità libere, dal punto di vista matematico invece:

Definizione 1.1. Si dice *nodo parametrizzato* un'immersione di \mathbb{S}^1 in \mathbb{R}^3 ovvero una funzione $k: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ continua e iniettiva. Se l'immersione è una funzione differenziabile e regolare, ovvero se $k \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ e $k'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{S}^1$, il nodo k si dice *liscio*.

Spesso un nodo parametrizzato viene identificato con la sua immagine, una curva chiusa semplice in \mathbb{R}^3 , che indichiamo con K e chiamiamo *nodo geometrico* o semplicemente *nodo*. Quindi da un punto di vista fisico, un *nodo* può essere considerato come un pezzo di corda nello spazio tridimensionale

con le estremità incollate tra loro. Possiamo vedere alcuni esempi nella figura 1.1.



(a) nodo banale

(b) nodo banale

(c) nodo trifoglio

(d) nodo a otto

Figura 1.1: Esempi di nodi.

Pur non avendo ancora definito una relazione di equivalenza tra questi oggetti matematici, guardando la figura 1.1 possiamo farci un'idea di quali nodi siano tra loro “equivalenti” e quali no, notiamo infatti che i nodi (a) e (b) non sono “intrecciati” (nodi di questo tipo sono detti *nodi banali*), è quindi possibile ottenere il nodo (b) deformando in modo continuo il nodo (a) e viceversa. I nodi (c) e (d) invece presentano degli incroci che non si possono “sciogliere”, non è possibile infatti ottenere il nodo banale dai nodi (c) e (d) deformandoli, a meno che non vengano effettuati dei tagli e degli incollamenti. Da notare che i nodi (c) e (d) non sono “equivalenti” nemmeno tra di loro, abbiamo infatti bisogno di tagliare, deformare e incollare uno dei due per ottenere l'altro. Non ci resta che formalizzare questo concetto di deformazione continua senza strappi e incollamenti per poi definire una relazione di equivalenza tra nodi.

Definizione 1.2. Siano X e Y due spazi topologici, un'*omotopia di X in Y* è una funzione $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua.

Un'omotopia H la possiamo pensare come una “famiglia” continua di funzioni continue $(h_t: X \rightarrow Y)_{t \in [0,1]}$ dove $h_t(x) = H(x, t)$.

Definizione 1.3. Siano $f, g: X \rightarrow Y$ due funzioni continue, diciamo che f e g sono *omotopicamente equivalenti* o *omotope* se $\exists H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ omotopia tale che $h_0 = f$ e $h_1 = g$.

Nella definizione precedente f e g sono due funzioni continue, nel caso in cui f e g siano anche iniettive e quindi immersioni, possiamo domandarci se possono essere “collegate” tra loro tramite immersioni. Questo dà origine al concetto di isotopia:

Definizione 1.4. Siano X, Y due spazi topologici, un'*isotopia di X in Y* è un'omotopia $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $h_t(x) = H(x, t)$ è un'immersione $\forall t \in [0, 1]$, e diciamo che $f, g: X \rightarrow Y$ sono due funzioni *isotopicamente equivalenti* o semplicemente *isotope* se $h_0 = f$ e $h_1 = g$.

Definizione 1.5. Un'*isotopia ambiente* di uno spazio topologico X è un'isotopia tra la funzione identità di X e un omeomorfismo $f: X \rightarrow X$.

Definizione 1.6. Due nodi $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ si dicono *isotopicamente equivalenti* o semplicemente *isotopi*, e li indichiamo in questo modo $K_1 \simeq K_2$, se esiste un'isotopia ambiente di \mathbb{R}^3 tra $id_{\mathbb{R}^3}$ e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ omeomorfismo tale che $f(K_1) = (K_2)$.

L'isotopia ambiente di \mathbb{R}^3 tra $id_{\mathbb{R}^3}$ e l'omeomorfismo f corrisponde proprio a una deformazione continua dello spazio tridimensionale che porta uno dei due nodi nell'altro senza operare tagli, incollamenti e senza far passare il nodo attraverso se stesso.

Ora che abbiamo definito una relazione di equivalenza tra nodi (si dimostra che \simeq è effettivamente una relazione di equivalenza) possiamo domandarci come fare a stabilire se due nodi sono isotopicamente equivalenti oppure no. Anche nella sua formulazione più semplice, ovvero capire se un nodo è banale oppure no, questo problema rimane molto difficile da risolvere. Ad esempio il nodo mostrato in figura 1.2, nonostante presenti diversi incroci, è isotopo al nodo banale, cosa non ovvia a prima vista.

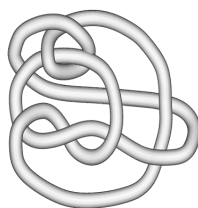


Figura 1.2: Nodo banale.

Una parziale risposta a questo quesito fu data dal matematico tedesco Kurt Reidemeister nel 1927. Prima di dimostrare il teorema che enunceremo in seguito, Reidemeister considerò il *diagramma* di un nodo, ovvero la sua proiezione ortogonale sul piano. A meno di isotopie è sempre possibile assumere:

- che la proiezione sia ovunque iniettiva, tranne al più in un numero finito di punti detti *incroci*,
- che ogni incrocio sia un punto doppio, cioè che ogni incrocio sia immagine di esattamente due punti distinti del nodo,
- che le proiezioni di due tratti di nodo non siano mai tangenti.

In ogni incrocio della proiezione ortogonale, per distinguere il tratto del nodo che passa “sopra” da quello che passa “sotto” si interrompe quest’ultimo.

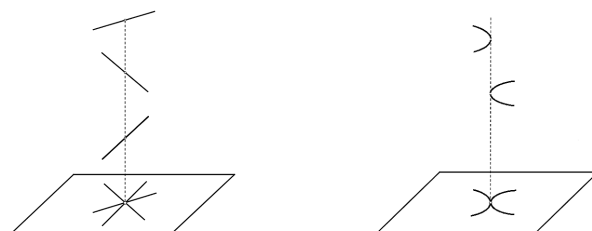
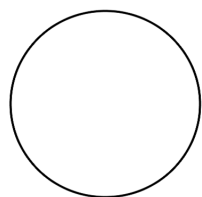
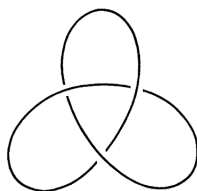


Figura 1.3: Esempi di incroci non ammissibili.

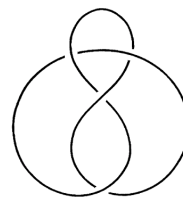
Quello di considerare un suo diagramma è sicuramente il modo più semplice e immediato per visualizzare un nodo, vediamo alcuni esempi in figura 1.4.



(a) diagramma del nodo banale



(b) diagramma del nodo trifoglio



(c) diagramma del nodo a otto

Figura 1.4: Esempi di diagrammi di nodi.

Teorema 1.7 (Teorema di Reidemeister). *Due nodi sono isotopicamente equivalenti se e solo se i loro diagrammi sono ottenibili uno dall’altro tramite isotopie piane e un numero finito di movimenti, detti movimenti di Reidemeister, descritti in figura 1.5.*

Possiamo quindi concludere che la rappresentazione attraverso un suo diagramma determina il nodo in modo univoco a meno di isotopie.

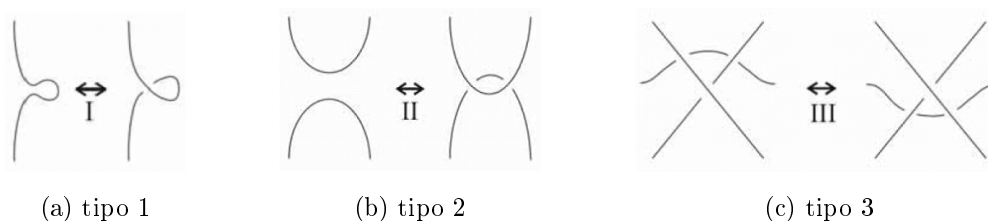


Figura 1.5: Movimenti di Reidemeister.

1.2 Nodi cubici

Introduciamo ora un particolare tipo di nodi, i *nodi cubici*. Immaginiamo di suddividere lo spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 in cubi unitari, cioè prendere quella che si chiama una tassellazione in cubi dello spazio; si viene così a formare un reticolo cubico composto dagli spigoli dei cubi della tassellazione. Un *nodo cubico*, come ci suggerisce il nome non è altro che un nodo, quindi una curva chiusa semplice, con la particolarità di essere una curva poligonale tale che ogni suo spigolo è uno spigolo del reticolo cubico. Formalmente possiamo dare queste definizioni:

Definizione 1.8. Si dice *tassellazione in cubi* di \mathbb{R}^{n+2} una decomposizione di \mathbb{R}^{n+2} in una collezione \mathcal{C} di ipercubi di dimensione $n + 2$, tali che

- o sono a due a due disgiunti,
- o condividono un ipercubo di dimensione $k \leq n + 1$.

Se ogni ipercubo di \mathcal{C} è immagine del cubo unitario $I^{n+2} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$ tramite traslazioni di vettori a coefficienti interi, allora \mathcal{C} si dice *tassellazione in cubi canonica* di \mathbb{R}^{n+2} .

Definizione 1.9. Si dice n -scheletro di \mathcal{C} , e lo indichiamo con \mathcal{S} , l'unione di tutti i cubi di dimensione n contenuti negli ipercubi di dimensione $n + 2$ di \mathcal{C} .

Definizione 1.10. Sia \mathcal{C} la tassellazione in cubi canonica di \mathbb{R}^{n+2} e $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, consideriamo l'omotetia $h_{\frac{1}{m}} : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ definita $h_{\frac{1}{m}}(x) = \frac{1}{m}x$. L'insieme $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}} := h_{\frac{1}{m}}(\mathcal{C})$ è detto *sottotassellazione* di \mathcal{C} .

Per i nostri scopi analizzeremo il caso in cui $n = 1$, e solo in parte il caso in cui $n = 2$. Se $n = 1$ la tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^3 è l'unione di tutti i cubi immagine del cubo unitario $I^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ tramite traslazioni di vettori a coefficienti interi e \mathcal{S} è l'unione di tutti gli spigoli dei cubi di \mathcal{C} . In questo caso chiamiamo \mathcal{S} *reticolo cubico* di \mathbb{R}^3 . Se $n = 2$, \mathcal{S} è l'unione di tutte le facce degli ipercubi 4-dimensionali della tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 .

Definizione 1.11 (Nodo cubico). Un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$ si dice *cubico* se è contenuto in \mathcal{S} , reticolo cubico di \mathbb{R}^3 .

Un esempio di nodo cubico è mostrato in figura 1.6.

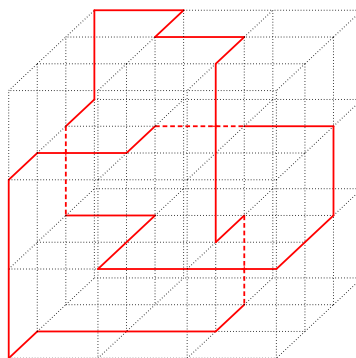


Figura 1.6: Un esempio di nodo (trifoglio) cubico.

Quello che vogliamo dimostrare è che ogni nodo liscio può essere deformato in un nodo cubico mediante isotopie.

Teorema 1.12. *Sia \mathcal{C} la tassellazione in cubi canonica di \mathbb{R}^3 e sia $K \subset \mathbb{R}^3$ un nodo liscio $\Rightarrow \exists \tilde{K} \in \mathcal{S}$ nodo cubico tale che $\tilde{K} \simeq K$.*

Dimostrazione. $K \subset \mathbb{R}^3$ nodo geometrico liscio \Rightarrow la sua parametrizzazione $k: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ è un'immersione differenziabile regolare $\Rightarrow k': \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione differenziabile, quindi è continua, e poiché \mathbb{S}^1 è compatto, è anche uniformemente continua \Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(t_0, t_1) < \delta \Rightarrow d(k'(t_0), k'(t_1)) < \varepsilon \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{S}^1.$$

Il fatto che $k: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sia un'immersione, cioè un'applicazione continua e iniettiva ci consente di dire che $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow K \subset \mathbb{R}^3$ è un omeomorfismo \Rightarrow anche la sua inversa $k^{-1}: K \rightarrow \mathbb{S}^1$ è un omeomorfismo $\Rightarrow k^{-1}$ è continua su K , che è un compatto, e quindi è uniformemente continua \Rightarrow

$$\forall \delta > 0 \exists \zeta > 0 : d(k(t_0), k(t_1)) < \zeta \Rightarrow d(t_0, t_1) < \delta \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{S}^1.$$

Da quanto detto finora segue che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \zeta > 0 : d(k(t_0), k(t_1)) < \zeta \Rightarrow d(k'(t_0), k'(t_1)) < \varepsilon \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{S}^1, \quad (1.1)$$

ovvero presi due punti $p_1, p_2 \in K \subset \mathbb{R}^3$ sufficientemente vicini è sempre possibile approssimare, a meno di isotopie, l'arco di curva contenuto in K che congiunge p_1 e p_2 con il segmento $\overline{p_1 p_2}$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\sqrt{3}}{\zeta} \in [m-1, m]$, consideriamo la sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$, e definiamo l'insieme

$$\mathcal{N}_K := \{Q \in \mathcal{C}_{\frac{1}{m}} \mid Q \cap K \neq \emptyset\}.$$

A meno di deformazioni isotope possiamo assumere che il nodo K intersechi ogni cubo di \mathcal{N}_K in un segmento che congiunge due punti interni a due facce distinte (figura 1.7), infatti il lato di un qualunque cubo Q in \mathcal{N}_K è pari a $\frac{1}{m}$ e quindi la distanza tra due punti distinti di Q è al massimo $\frac{\sqrt{3}}{m}$, ma essendo $m \geq \frac{\sqrt{3}}{\zeta}$, abbiamo che $\frac{\sqrt{3}}{m} \leq \zeta$, il resto segue dalla 1.1.

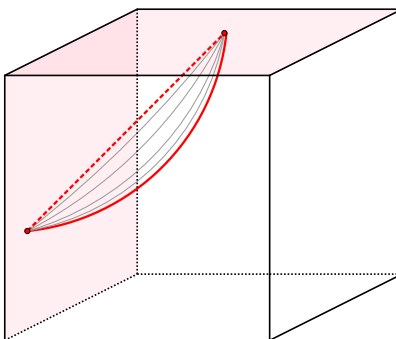


Figura 1.7: $Q \cap K$.

Osserviamo inoltre che \mathcal{N}_K è costituito da un numero finito di cubi, supponiamo $n \in \mathbb{N}$, possiamo quindi enumerarli in modo tale che due indici consecutivi siano assegnati a due cubi che intersecano K in due segmenti consecutivi. Consideriamo $Q_i \in \mathcal{N}_K$ e chiamiamo p_i, p_{i+1} i punti di intersezione tra K e ∂Q_i , da quanto detto precedentemente p_i e p_{i+1} appartengono all'interno di due facce distinte $F_i, F_{i+1} \subset Q_i$; consideriamo i loro baricentri, che chiamiamo rispettivamente b_i e b_{i+1} , e tramite un isotopia portiamo il segmento $\overline{p_i p_{i+1}}$ in $\overline{b_i b_{i+1}}$ (figura 1.8). Questo procedimento si può ripetere $\forall i = 1, \dots, n$. Il fatto che F_i e F_{i+1} siano facce distinte ci garantisce che due cubi con indici consecutivi Q_i, Q_{i+1} siano adiacenti e che l'oggetto ottenuto sia effettivamente una curva (poligonale) chiusa semplice, e quindi un nodo

\bar{K} , isotopo al nodo di partenza K .

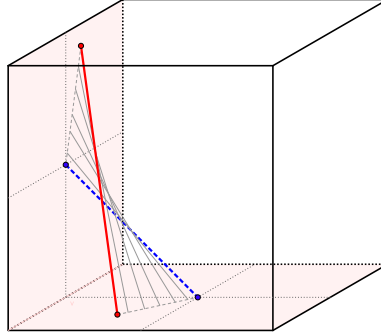


Figura 1.8: Isotopia che porta $\overline{p_i p_{i+1}}$ in $\overline{b_i b_{i+1}}$.

Quello che possiamo fare ora è considerare la sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{2m}}$ e notare che i baricentri delle facce di un qualunque cubo di $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ corrispondono a vertici di cubi di $\mathcal{C}_{\frac{1}{2m}}$ ($\mathcal{C}_{\frac{1}{2m}}$ è ottenuta da $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ dividendo ogni spigolo in due spigoli uguali e quindi ogni faccia in quattro facce uguali), quindi il nodo poligonale \bar{K} ha i vertici, che abbiamo chiamato b_1, \dots, b_n , corrispondenti a vertici di cubi di $\mathcal{C}_{\frac{1}{2m}}$. Prendiamo quindi $Q_i \in \mathcal{N}_K$ e facciamo la seguente osservazione:

- (a) Se b_i, b_{i+1} sono due baricentri di due facce opposte di Q_i , allora il segmento $\overline{b_i b_{i+1}}$ è contenuto in $\mathcal{S}_{\frac{1}{2m}}$ (figura 1.9a).
- (b) Se b_i, b_{i+1} sono due baricentri di due facce adiacenti di Q_i , allora il segmento $\overline{b_i b_{i+1}}$ è una diagonale di una faccia F di un cubo di $\mathcal{C}_{\frac{1}{2m}}$ contenuto in Q_i , quindi possiamo considerare i due archi, A e A' , contenuti in $\partial F \subset \mathcal{S}_{\frac{1}{2m}}$, che congiungono b_i e b_{i+1} . Osserviamo che uno dei due archi, supponiamo A , è interamente contenuto nella frontiera

di Q_i , mentre $A' \subset Q_i$ e $A' \cap \partial Q_i = \{b_i, b_{i+1}\}$. Tramite un isotopia portiamo il segmento $\overline{b_i b_{i+1}}$ in A' (figura 1.9b).

Ripetendo questa costruzione $\forall i = 1, \dots, n$ si ottiene un nodo $\hat{K} \subset \mathcal{S}_{\frac{1}{2m}}$ isotopo a \bar{K} e quindi a K . Da notare che al passo (b) il segmento $\overline{b_i b_{i+1}}$ è stato deformato isotopicamente in A' e non in A per garantire la semplicità della curva che si stava costruendo.

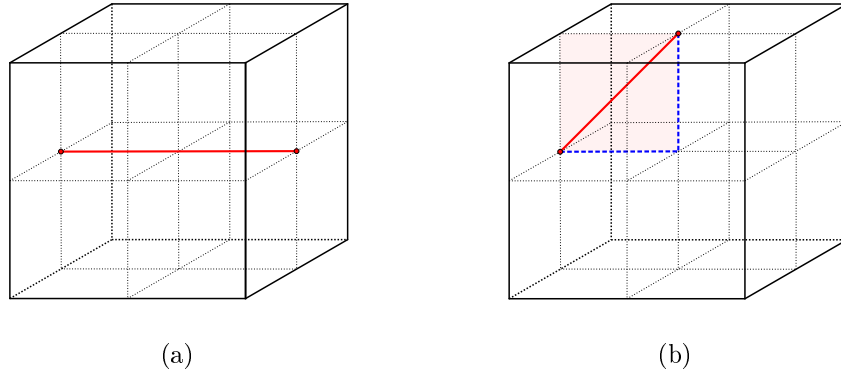


Figura 1.9

A questo punto non ci resta che applicare l'omotetia $h_{2m}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definita: $h_{2m}(x) = 2mx$ a \hat{K} per ottenere un nodo \tilde{K} contenuto in \mathcal{S} , reticolo cubico di \mathbb{R}^3 , isotopo al nodo di partenza K . \square

Capitolo 2

Movimenti per nodi cubici

2.1 Cilindro di isotopia

Ricordiamo che due nodi $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono *isotopi* se esiste un omeomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isotopo all'identità di \mathbb{R}^3 tale che $f(K_1) = K_2$.

Definizione 2.1. Due nodi lisci K_1 e K_2 si dicono *isotopi in modo liscio* se esiste un'isotopia $H: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ liscia, cioè differenziabile ($C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$) e regolare in tutto il suo dominio, tale che:

$$H(x, t) = \begin{cases} k_1(x) & \text{se } t \leq -1, \\ k_2(x) & \text{se } t \geq 1, \end{cases}$$

dove con k_1, k_2 indichiamo i nodi parametrizzati corrispondenti rispettivamente a K_1 e K_2 .

La definizione che abbiamo appena dato di nodi isotopi in modo liscio comprende la definizione di nodi isotopi, infatti è sempre possibile estendere

un'isotopia liscia come H ad una famiglia continua di diffeomorfismi $f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f_t(K_1) = K_2 \forall t \geq 1$ e $f_t = id_{\mathbb{R}^3} \forall t \leq -1$ (è dimostrato in [6]).

Definizione 2.2. Siano K_1, K_2 due nodi isotopi in modo liscio e $H: K_1 \simeq K_2$ la loro isotopia liscia, allora chiamiamo *cilindro di isotopia* tra K_1 e K_2 l'insieme

$$J = \{(H(x, t), t) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{S}^1, t \in \mathbb{R}\}.$$

Osservazione 2.3. J è una sottovarietà liscia di codimensione 2 di \mathbb{R}^4 , cioè è una superficie liscia immersa in \mathbb{R}^4 .

Dimostrazione. J è una superficie perché il dominio della sua parametrizzazione è $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ che ha dimensione 2. La differenziabilità deriva dal fatto che $x_4(t) = t$ è ovviamente differenziabile e H , essendo un isotopia liscia, è differenziabile. La regolarità segue semplicemente dal fatto che H è regolare. \square

Sia \mathcal{C} la tassellazione in cubi canonica di \mathbb{R}^4 e $p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sull'ultima coordinata.

Definizione 2.4. Sia M un sottoinsieme connesso di \mathbb{R}^4 tale che $p^{-1}(c) \cap M$ o $p|_M^{-1}(c)$ è un insieme connesso $\forall c \in \mathbb{R}$, allora diciamo che M ha *insiemi di livello connessi*.

Osserviamo che non c'è nessuna restrizione sulla dimensione di M .

Teorema 2.5. *Sia J il cilindro di isotopia tra K_1 e $K_2 \Rightarrow \exists J'$ copia isotopa di J contenuta nel 2-scheletro di \mathcal{C} . Inoltre J' può essere scelto con insiemi di livello connessi.*

Per dimostrare il teorema 2.5 abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Definizione 2.6. Siano X, Y due spazi topologici, allora diciamo che $f: X \rightarrow Y$ è una *funzione propria* se: $V \subset Y$ compatto $\Rightarrow U = f^{-1}(V) \subset X$ compatto.

Proposizione 2.7. Sia M un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^4 tale che:

- $p|_M$ è una funzione propria,
- $p|_M^{-1}(c) \neq \emptyset \quad \forall c \in \mathbb{R}$,
- M ha insiemi di livello connessi.

Sia \mathcal{Q} l'unione di tutti i cubi di \mathcal{C} che intersecano $M \Rightarrow \mathcal{Q}$ ha insiemi di livello connessi.

Dimostrazione. Sia $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tale che $c \in [n, n+1]$. Definiamo $A = p^{-1}([n, n+1]) \cap M$ e osserviamo che è compatto, infatti per ipotesi $p|_M$ è una funzione propria e l'intervallo $[n, n+1]$ è compatto. A è anche connesso. Supponiamo per assurdo che non lo sia $\Rightarrow \exists A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^4$ tali che A_1, A_2 sono compatti, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = A$. Per ipotesi p è una proiezione, ed essendo le proiezioni funzioni continue, anche $p(A_1), p(A_2)$ sono compatti, e abbiamo che $p(A_1) \cup p(A_2) = p(A_1 \cup A_2) = p(A) = [n, n+1]$ (l'ultima uguaglianza è garantita dal fatto che $p|_M^{-1}(c) \neq \emptyset \quad \forall c \in \mathbb{R}$). Possiamo inoltre osservare che $p(A_1) \cap p(A_2) = \emptyset$; infatti sia per assurdo $t \in [n, n+1]$ tale che $t \in p(A_1) \cap p(A_2)$, allora $p^{-1}(t) \subset \mathbb{R}^4$ ha intersezione non vuota sia con A_1 che con A_2 , ma questo è in contraddizione con il fatto che M ha insiemi di

livello connessi, cioè che $p^{-1}(t) \cap M$ è un insieme connesso $\forall t \in \mathbb{R}$. Abbiamo quindi scritto l'intervallo $[n, n+1]$ come unione di due insiemi compatti disgiunti entrambi non vuoti; questo è chiaramente un assurdo perchè $[n, n+1]$ è connesso.

Affermazione 1: $p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q}$ è connesso.

Supponiamo per assurdo che $p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q} = C_1 \cup C_2$, dove C_1, C_2 sono due insiemi chiusi, non vuoti e disgiunti. \mathcal{Q} è l'unione di tutti i cubi di \mathcal{C} che intersecano $M \Rightarrow M \subset \mathcal{Q} \Rightarrow A = p^{-1}([n, n+1]) \cap M \subset p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q}$. Ma per quanto dimostrato in precedenza A è connesso \Rightarrow o $A \subseteq C_1$ o $A \subseteq C_2$. Supponiamo senza perdita di generalità che $A \subseteq C_1$. M interseca tutti i cubi contenuti in $\mathcal{Q} \Rightarrow A = p^{-1}([n, n+1]) \cap M$ interseca tutti i cubi contenuti in $p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q}$, e i cubi sono insiemi connessi $\Rightarrow p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q} \subseteq C_1 \subset C_1 \cup C_2 = p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q}$, che è una contraddizione, pertanto $p^{-1}([n, n+1]) \cap \mathcal{Q}$ è connesso.

Affermazione 2: \mathcal{Q} ha insiemi di livello connessi, cioè $p^{-1}(c) \cap \mathcal{Q}$ è connesso $\forall c \in \mathbb{R}$.

\mathcal{C} è la tassellazione in cubi canonica di \mathbb{R}^4 , quindi i cubi contenuti in \mathcal{Q} che intersecano $p^{-1}(c)$ sono gli stessi cubi che intersecano $p^{-1}([n, n+1])$. Dall'affermazione 1 e dall'arbitrarietà di c segue la tesi. \square

Possiamo notare che nella proposizione 2.7 \mathcal{Q} è unione di cubi della tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 . Al posto di \mathcal{C} possiamo considerare una qualunque sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ e ripetere lo stesso ragionamento, per dimostrare che l'unione dei cubi di $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ che intersecano M ha insiemi di livello connessi; l'unica differenza sta nel considerare un intervallo che contiene c del tipo $[\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}]$ invece che un intervallo di lunghezza unitaria.

Lemma 2.8. *Il cilindro di isotopia J ha insiemi di livello connessi.*

Dimostrazione. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$, allora $p^{-1}(t_0) \cap J = \{(H(x, t_0), t_0) \in \mathbb{R}^4 \mid x \in \mathbb{S}^1\} = \{H(x, t_0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{S}^1\} \times \{t_0\} \cong \{H(x, t_0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{S}^1\}$ che è connesso perché immagine di un'immersione di \mathbb{S}^1 . Dall'arbitrarietà di t_0 abbiamo che $p^{-1}(t_0) \cap J$ è connesso $\forall t_0 \in \mathbb{R}$. \square

Lemma 2.9. *Sia \mathcal{Q}_J l'unione di tutti i cubi, di una qualunque sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$, che intersecano J . Allora \mathcal{Q}_J ha insiemi di livello connessi.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $p|_J$ è una funzione propria, il resto segue dal lemma 2.8 e dalla proposizione 2.7. Sia $C \subset \mathbb{R}$ un compatto $\Rightarrow p|_J^{-1}(C) = p^{-1}(C) \cap J = \{(H(x, t), t) \mid x \in \mathbb{S}^1, t \in C\}$, che è un compatto perché immagine tramite un'applicazione continua di un compatto ($\mathbb{S}^1 \times C$ è compatto in quanto prodotto di compatti). Dall'arbitrarietà di C abbiamo la tesi. \square

Dimostrazione del teorema 2.5. Bisogna provare che esiste una copia isotopa J' del cilindro di isotopia J , contenuta nel 2-scheletro di una sottotassellazione sufficientemente fine della tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} , ma questo è dimostrato in [1]. Se chiamiamo \mathcal{Q}_J l'unione dei cubi di tale sottotassellazione che intersecano J , a meno di deformazioni isotope possiamo assumere che J' sia contenuto proprio nella frontiera di \mathcal{Q}_J . Inoltre dal lemma 2.9 sappiamo che \mathcal{Q}_J ha insiemi di livello connessi, questo ci permette di scegliere J' con insiemi di livello connessi. A questo punto basta applicare a J' una dilatazione del giusto fattore per avere la tesi. \square

2.2 Teorema fondamentale

Il teorema che enunceremo in questa sezione ci consente di rappresentare le isotopie tra nodi cubici mediante dei movimenti cubici. Questi movimenti che andiamo a definire su un nodo cubico K sono l'analogo dei movimenti di Reidemeister per i nodi classici. A differenza dei tre movimenti di Reidemeister, che si effettuano sul diagramma del nodo preso in considerazione, i movimenti cubici possono essere effettuati direttamente sul nodo cubico K immerso nello spazio tridimensionale.

Prima di definire i movimenti cubici possiamo fare la seguente osservazione: per definizione un nodo cubico K è contenuto nel reticolo cubico \mathcal{S} di \mathbb{R}^3 . Sia $Q \in \mathcal{C}$ un cubo che incontra K in almeno uno spigolo, a meno di considerare una sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$, in modo tale da suddividere ogni cubo in m^3 cubi, possiamo sempre assumere che $K \cap Q$ sia o uno spigolo, o due o tre spigoli adiacenti tutti contenuti nella stessa faccia $F \subset Q$ (figura 2.1). Quest'osservazione ci permette di definire i movimenti cubici sulle facce dei cubi che incontrano il nodo K .

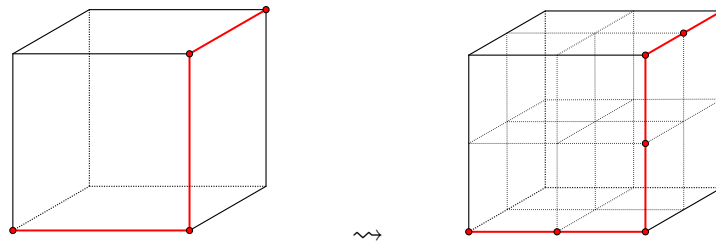


Figura 2.1: Sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

Definizione 2.10. Sia F una faccia di un cubo di \mathcal{C} che incontra il nodo K in un arco A composto o da uno spigolo o da due o tre spigoli adiacenti. I

movimenti cubici **M1** e **M2** consistono nel sostituire A con il suo complementare in ∂F . Un *movimento cubico* lo chiamiamo **M1** se A è unione di due spigoli adiacenti, **M2** altrimenti.

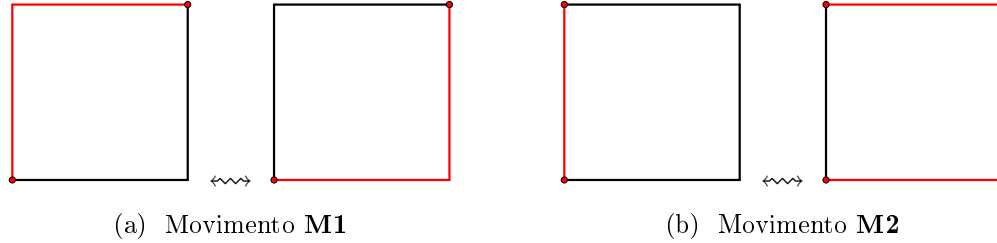


Figura 2.2: Movimenti cubici.

Definizione 2.11. Dati due nodi cubici $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$, diciamo che $K_1 \stackrel{M}{\sim} K_2$, cioè K_1 è *equivalente* a K_2 *mediante movimenti cubici* se possiamo trasformare K_1 in K_2 effettuando su K_1 un numero finito di movimenti cubici.

La definizione precedente è simmetrica cioè $K_1 \stackrel{M}{\sim} K_2 \iff K_2 \stackrel{M}{\sim} K_1$.

Teorema 2.12 (Teorema fondamentale). *Dati due nodi cubici $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ allora: K_1 è isotopo a $K_2 \iff K_1 \stackrel{M}{\sim} K_2$.*

2.3 Dimostrazione del teorema fondamentale

Le maggiori difficoltà nella dimostrazione si hanno nel mostrare la condizione sufficiente, cioè che $K_1 \simeq K_2 \Rightarrow K_1 \stackrel{M}{\sim} K_2$. La strategia della dimostrazione sarà la seguente:

- Preso un particolare intorno tubolare di K_i , con $i = 1, 2$, considereremo un nodo cubico K'_i sulla frontiera di tale intorno tale che $K_i \simeq K'_i$.

- Dimostreremo che $K_i \stackrel{\text{M}}{\simeq} K'_i$.
- Infine dimostreremo che $K'_1 \stackrel{\text{M}}{\simeq} K'_2$.

Dimostrazione del teorema fondamentale. (\Leftarrow) K_1 e K_2 sono equivalenti mediante movimenti cubici, quindi sono isotopi, infatti i movimenti cubici **M1** e **M2** si possono chiaramente estendere ad un'isotopia ambiente di \mathbb{R}^3 .

(\Rightarrow) Dati K_1 e K_2 nodi cubici isotopi, dobbiamo dimostrare che $K_1 \stackrel{\text{M}}{\simeq} K_2$. Sia $i = 1, 2$ e \mathcal{C} la tassellazione in cubi canonica di \mathbb{R}^3 , allora possiamo scegliere una sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ tale che l'insieme $N(K_i) = \bigcup_{Q \in \mathcal{N}_{K_i}} Q$, dove $\mathcal{N}_{K_i} = \{Q \in \mathcal{C}_{\frac{1}{m}} \mid Q \cap K_i \neq \emptyset\}$, è un intorno tubolare chiuso di K_i e per ogni cubo $Q \in \mathcal{N}_{K_i}$, $Q \cap K_i$ è o un vertice, o uno spigolo o due spigoli adiacenti. A questo punto possiamo "arrotondare" gli angoli nei vertici di K_i in un loro intorno arbitrariamente piccolo e ottenere un nodo liscio \tilde{K}_i , arbitrariamente "vicino" a K_i (è dimostrato in [3]), possiamo cioè assumere che $\tilde{K}_i \subset \text{Int}(N(K_i))$. Abbiamo così ottenuto due nodi lisci \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 isotopi a quelli di partenza, e quindi isotopi tra loro.

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \simeq & K_2 \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \tilde{K}_1 & \simeq & \tilde{K}_2 \end{array}$$

Ora consideriamo J il cilindro di isotopia tra \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 . Ricordiamo che J è una superficie liscia immersa in \mathbb{R}^4 . Se m è abbastanza grande, dal teorema 2.5 segue che esiste J' copia isotopa di J , contenuta nel 2-scheletro della sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ di \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 , e inoltre J' ha insiemi di livello connessi. Possiamo quindi assumere che esistano $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $p^{-1}(t) \cap J' = K'_1 \ \forall t \leq m_1$ e $p^{-1}(t) \cap J' = K'_2 \ \forall t \geq m_2$, dove K'_1 e K'_2 sono due nodi:

- cubici nella sottotassellazione $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$ di \mathcal{C} di \mathbb{R}^3 ,
- contenuti rispettivamente in $\partial N(K_1)$ e $\partial N(K_2)$,
- isotopi rispettivamente a \tilde{K}_1 e \tilde{K}_2 .

Ora useremo due risultati che dimostreremo successivamente:

Lemma 2.13. $K_i \stackrel{M}{\sim} K'_i$ con $i = 1, 2$, cioè esiste una sequenza finita di movimenti cubici che porta K_i in K'_i .

Teorema 2.14. Dati due nodi cubici K_1 e K_2 , si ottengono K'_1 e K'_2 come nell'osservazione precedente $\Rightarrow K'_1 \stackrel{M}{\sim} K'_2$, cioè esiste una sequenza finita di movimenti cubici che porta K'_1 in K'_2 .

Come conseguenza del lemma 2.13 e del teorema 2.14 abbiamo che

$$K_1 \stackrel{M}{\sim} K'_1 \stackrel{M}{\sim} K'_2 \stackrel{M}{\sim} K_2$$

$\Rightarrow K_1 \stackrel{M}{\sim} K_2$, cioè esiste una sequenza finita di movimenti cubici che porta K_1 in K_2 . \square

Dimostrazione del lemma 2.13. Dato che la dimostrazione è valida sia per $i = 1$ che per $i = 2$, per non appesantire troppo la notazione chiameremo i nodi K_i e K'_i semplicemente K e K' . Ricordiamo che $\mathcal{N}_K = \{Q \in \mathcal{C}_{\frac{1}{m}} \mid Q \cap K \neq \emptyset\}$ e osserviamo che K e K' sono due nodi isotopi contenuti entrambi nell'1-scheletro di \mathcal{N}_K . Il primo passo della dimostrazione consiste nel costruire un anello A contenuto nel 2-scheletro di \mathcal{N}_K (l'insieme di tutte le facce dei cubi di \mathcal{N}_K) tale che la sua frontiera sia l'unione di due componenti connesse; vedremo che queste componenti connesse sono proprio K e K' . Sia

$$B = \{Q \in \mathcal{N}_K \mid Q \cap K' \neq \emptyset\}.$$

Notiamo che B è costituito da un numero finito di cubi, diciamo $n > 0$. Possiamo quindi enumerarli in modo tale che due indici consecutivi siano assegnati a cubi adiacenti (cubi che hanno una faccia in comune), e che l' n -esimo cubo sia adiacente al primo. Per costruire l'anello A considereremo ogni cubo $Q_j \in B$, e a seconda dei casi, sceglieremo A_j che sarà composto o da una faccia, o da due facce adiacenti, o da una faccia unione uno spigolo di Q_j . L'unione di questi A_j sarà il nostro anello A , la cui frontiera è proprio $K \cup K'$.

Affermazione 1: Sia $Q_j \in B$. Se $Q_j \cap K$ è un vertice e $Q_j \cap K'$ è o un vertice o uno spigolo, allora $K \cup K' \subset \bigcup_{Q_i \in B \setminus \{Q_j\}} Q_i$. In altre parole Q_j è superfluo.

Dimostrazione affermazione 1. Ci sono vari casi da considerare:

- (a) $Q_j \cap K$ e $Q_j \cap K'$ sono due vertici v e v' .
1. Se i vertici appartengono ad una faccia $F \subset Q_j$ (figura 2.3a) allora il cubo che condivide con Q_j la faccia F contiene v e v' e di sicuro è un cubo di B infatti interseca sia K che K' .
 2. I due vertici sono opposti (figura 2.3b). Se la sottotassellazione è abbastanza fine questo caso non può verificarsi, infatti dal vertice v' uscirebbero due spigoli di K' che appartengono a cubi adiacenti a Q_j che non intersecano K , ma per come abbiamo costruito K' questo non può accadere.
- (b) $Q_j \cap K$ è un vertice v , $Q_j \cap K'$ è uno spigolo l .

1. Se v e l sono contenuti in una faccia $F \subset Q_j$ (figura 2.3c) allora il cubo che condivide con Q_j la faccia F contiene sia v che l , ed è un cubo di B poiché interseca entrambi i nodi.
2. v e l non appartengono alla stessa faccia (figura 2.3d). Questo implica che uno degli estremi dello spigolo l è opposto al vertice v e da questo estremo esce uno spigolo di K' che appartiene ad cubo adiacente a Q_j che, se la sottotassellazione è abbastanza fine, non interseca K . Quindi anche questo caso, per le condizioni imposte a K' , non può verificarsi.

Pertanto segue la tesi.

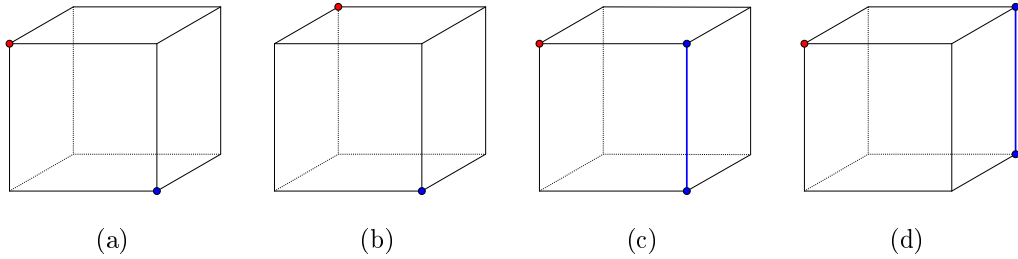


Figura 2.3: In questi casi il cubo Q_j è superfluo.

□

Possiamo quindi assumere che B non contenga cubi superflui.

Affermazione 2: Sia $Q_j \in B$, allora $K' \cap Q_j$ può essere ridotto, tramite i movimenti cubici **M1** e **M2**, a un cammino di al massimo tre spigoli.

Dimostrazione affermazione 2. Considereremo tutti i possibili casi in cui $K' \cap Q_j$ è unione di almeno quattro spigoli.

Caso 1. $K \cap Q_j$ è un vertice v . Poiché $K \cap K' = \emptyset$ segue che $K' \cap Q_j$ può essere contenuto in una, due o al massimo tre facce di Q_j e queste facce non contengono v . Da un semplice calcolo combinatorio abbiamo che $K' \cap Q_j$ può essere al massimo unione di sei spigoli.

- (a) $K' \cap Q_j$ è unione di sei spigoli. Tre spigoli sono contenuti in una faccia F_1 , due nella faccia adiacente F_2 , e uno nella faccia rimanente F_3 . In questo caso possiamo applicare due volte il movimento **M2**, prima alla faccia F_1 e poi alla faccia F_2 , per ridurre $K' \cap Q_j$ ad un cammino di soli due spigoli (figura 2.4).

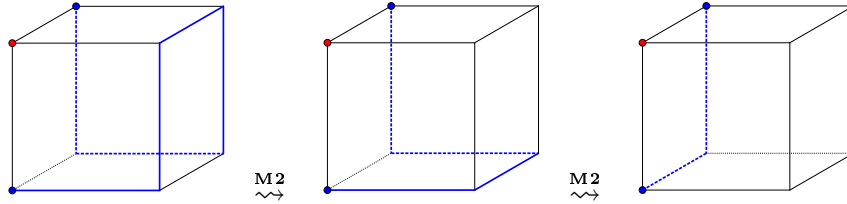


Figura 2.4: $K' \cap Q_j$ è unione di sei spigoli.

- (b) $K' \cap Q_j$ è unione di cinque spigoli. In questo caso tre spigoli sono contenuti in una faccia F_1 , e gli altri due in una faccia adiacente F_2 . Possiamo applicare il movimento **M2** alla faccia F_1 e ottenere un cammino di tre spigoli (figura 2.5).

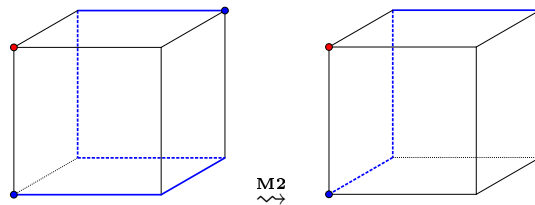


Figura 2.5: $K' \cap Q_j$ è unione di cinque spigoli.

- (c) $K' \cap Q_j$ è unione di quattro spigoli. Se tre spigoli sono contenuti in una faccia F_1 e l'altro è contenuto in una faccia adiacente F_2 possiamo ridurre $K' \cap Q_j$ ad un cammino di due spigoli applicando **M2** alla faccia F_1 (figura 2.6). Se 2 spigoli appartengono a F_1 e gli altri due appartengono alla faccia adiacente F_2 , applicando **M1** ad una delle due facce possiamo ricondurci al caso precedente (figura 2.7).

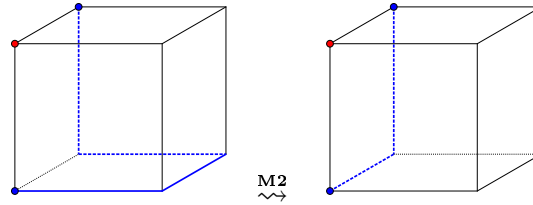


Figura 2.6: $K' \cap Q_j$ è unione di quattro spigoli.

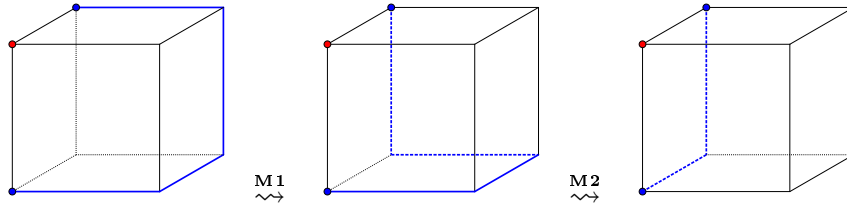


Figura 2.7: $K' \cap Q_j$ è unione di quattro spigoli.

Caso 2. $K \cap Q_j$ è uno spigolo. Allora $K' \cap Q_j$ può essere contenuto in una o due facce.

- (a) $K' \cap Q_j$ è unione di cinque spigoli. Se tre spigoli di $K' \cap Q_j$ sono contenuti in una faccia F_1 e due in una faccia adiacente F_2 , allora applicando **M2** alla faccia F_1 , possiamo ridurre $K' \cap Q_j$

ad un cammino di tre spigoli (figura 2.8). Se i tre spigoli sono contenuti nella stessa faccia possiamo applicare di nuovo **M2** e ridurre $K' \cap Q_j$ ad un cammino di un solo spigolo (figura 2.9).

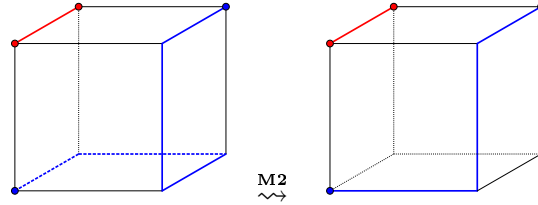


Figura 2.8: $K' \cap Q_j$ è unione di cinque spigoli.

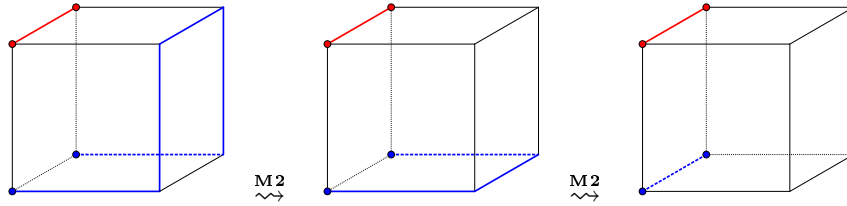


Figura 2.9: $K' \cap Q_j$ è unione di cinque spigoli.

- (b) $K' \cap Q_j$ è unione di quattro spigoli. Se tre di questi spigoli sono contenuti in una faccia F_1 e uno in una faccia adiacente F_2 basta applicare **M2** a F_1 per ridurre $K' \cap Q_j$ ad un cammino di due spigoli. Se due spigoli appartengono alla faccia F_1 e due ad una faccia adiacente F_2 , applicando **M1** a una delle due facce ci possiamo ricondurre sempre al caso precedente (figura 2.10).

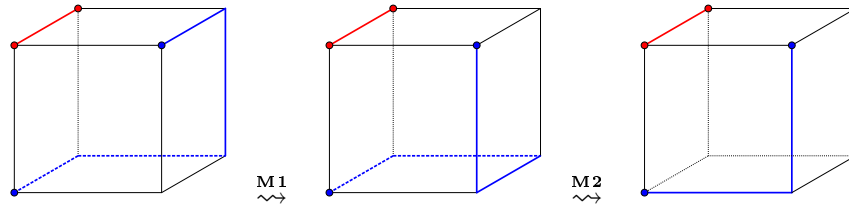


Figura 2.10: $K' \cap Q_j$ è unione di quattro spigoli.

Caso 3. $K \cap Q_j$ è l'unione di due spigoli adiacenti. In questo caso $K' \cap Q_j$ può essere unione al massimo di quattro spigoli. Necessariamente tre di questi devono essere contenuti in una faccia F_1 e il rimanente in una faccia adiacente F_2 . Applicando **M2** a F_1 otteniamo che $K' \cap Q_j$ è unione di due spigoli (figura 2.11).

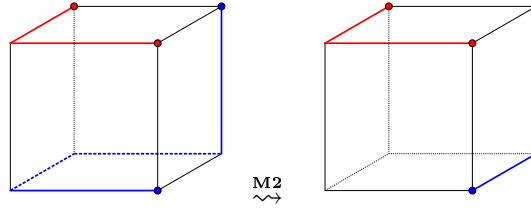


Figura 2.11: $K' \cap Q_j$ è unione di quattro spigoli.

Questo dimostra l'affermazione 2. □

Possiamo assumere che $K' \cap Q_j$ sia unione al massimo di tre spigoli. Ricordiamo inoltre che $K \cap Q_j$ può essere unione al massimo di due spigoli adiacenti. Andiamo ora a costruire il nostro anello A , scegliendo gli A_j in base al cubo corrispondente $Q_j \in B$.

Caso 1. $K \cap Q_j$ è un vertice v . Dalle affermazioni 1 e 2 sappiamo che $K' \cap Q_j$ può essere un cammino di due o tre spigoli.

- (a) $K' \cap Q_j$ è unione di tre spigoli. In questo caso a meno di applicare il movimento **M1** possiamo sempre assumere che v e due spigoli adiacenti di $K' \cap Q_j$ siano contenuti nella stessa faccia F . Quindi come A_j possiamo prendere l'unione di F e il rimanente spigolo di $K' \cap Q_j$ (figura 2.12).

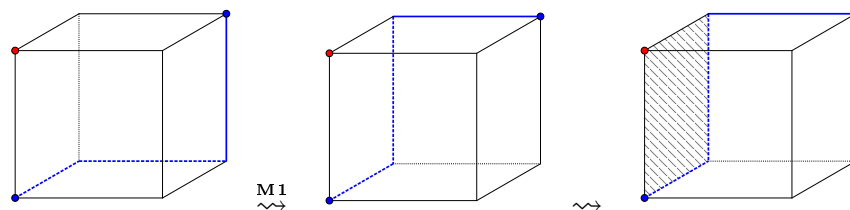


Figura 2.12: $K \cap Q_j$ è uno spigolo.

- (b) $K' \cap Q_j$ è unione di due spigoli. Abbiamo tre possibili casi:

1. $K' \cap Q_j$ e v sono contenuti nella stessa faccia $F \subset Q_j \Rightarrow A_j = F$ (figura 2.13).

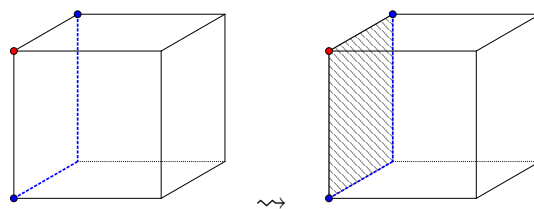


Figura 2.13: $K' \cap Q_j$ e v appartengono alla stessa faccia F .

2. $K' \cap Q_j$ e v giacciono su facce opposte. In questo caso abbiamo due possibili disposizioni di $K' \cap Q_j$ che sono equivalenti a meno di **M1** (figura 2.14).

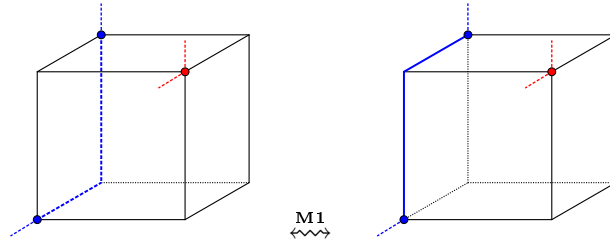


Figura 2.14: $K' \cap Q_j$ e v appartengono a facce distinte.

Se la sottotassellazione è abbastanza fine, dalle condizioni imposte a B abbiamo che la disposizione dei nodi K che K' nei cubi adiacenti a Q_j è necessariamente quella mostrata in figura 2.15. Applicando uno dei due movimenti cubici nei cubi adiacenti a Q_j osserviamo che non è necessario prendere nessun A_j , in altre parole $A_j = \emptyset$.

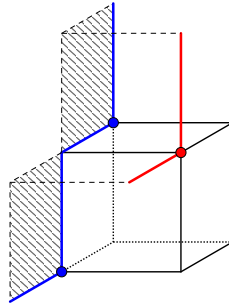


Figura 2.15: $A_j = \emptyset$.

3. L'ultima configurazione è mostrata in figura 2.16. Notiamo che questa configurazione non è possibile, infatti dal vertice di $K' \cap Q_j$ opposto a v esce uno spigolo di K' che è contenuto in un cubo adiacente a Q_j che non interseca K , ma per come abbiamo costruito K' questo non può accadere.

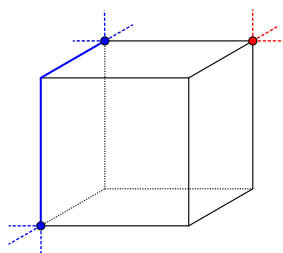


Figura 2.16: Questa configurazione non è possibile.

Caso 2. $K \cap Q_j$ è uno spigolo e . Dall'affermazione 2 possiamo assumere che $K' \cap Q_j$ sia o uno spigolo, o due, o tre spigoli adiacenti.

- (a) $K' \cap Q_j$ è unione di tre spigoli. Dato che $K \cap K' = \emptyset$, $K' \cap Q_j$ deve essere contenuto in due facce di Q_j che non intersecano lo spigolo e . Possiamo assumere che le due facce siano distinte, infatti se $K' \cap Q_j$ è contenuto in una sola faccia, applicando **M2**, possiamo ridurre $K' \cap Q_j$ a un solo spigolo. Applicando **M1** possiamo assumere che uno degli spigoli di $K' \cap Q_j$ sia contenuto in una delle facce che contiene e . La situazione è mostrata in figura 2.17. A questo punto come A_j possiamo prendere l'unione delle due facce che intersecano entrambi i nodi.

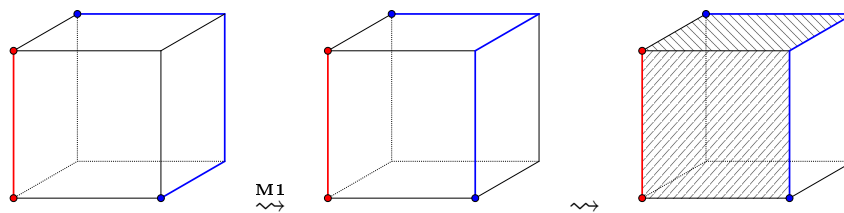


Figura 2.17: $K' \cap Q_j$ è unione di tre spigoli.

- (b) $K' \cap Q_j$ è unione di due spigoli.

1. Quattro vertici giacciono su una faccia $F \subset Q_j$ e il vertice rimanente è collegato a F da uno spigolo l che può essere $K \cap Q_j$ (figura 2.18a) oppure appartenere a $K' \cap Q_j$ (figura 2.18b). Quindi poniamo $A_j = F \cup l$.

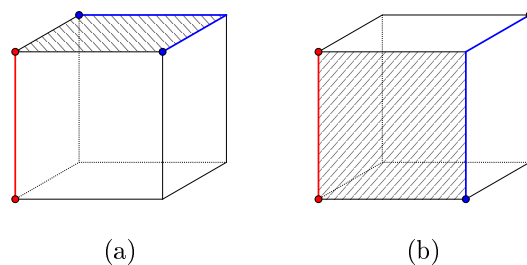


Figura 2.18: quattro vertici sono contenuti in una faccia $F \subset Q_j$.

2. L'ultima configurazione possibile è descritta in figura 2.19, e applicando **M1** possiamo ricondurci al caso precedente.

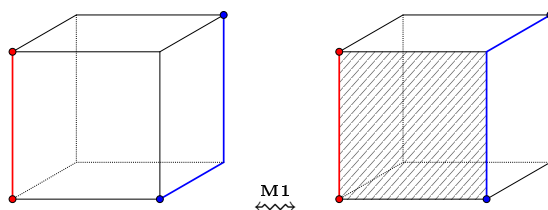


Figura 2.19: Configurazioni equivalenti.

(c) $K' \cap Q_j$ è uno spigolo.

1. $K' \cap Q_j$ e $K \cap Q_j$ sono contenuti nella stessa faccia $F \subset Q_j \Rightarrow A_j = F$ (figura 2.20).

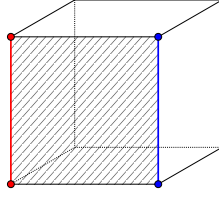


Figura 2.20: $K' \cap Q_j$ e $K \cap Q_j$ sono contenuti nella stessa faccia.

2. $K' \cap Q_j$ e $K \cap Q_j$ sono spigoli opposti \Rightarrow i vertici $w_1, w_2 \in K$ e i vertici $v_1, v_2 \in K'$ sono tali che v_1, w_1 sono contenuti in una faccia $F_1 \subset Q_j$ e v_2, w_2 nella faccia opposta $F_2 \subset Q_j$ (figura 2.21).

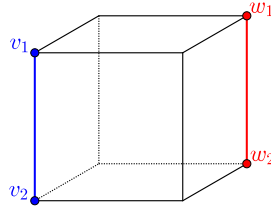


Figura 2.21: $K' \cap Q_j$ e $K \cap Q_j$ sono spigoli opposti.

Possiamo osservare che esiste una sequenza finita di cubi adiacenti $Q_{i+1}, \dots, Q_j, \dots, Q_{r-1}$ in cui si ripresenta la stessa situazione che si ha in Q_j , questa cambia in Q_i e Q_r in modo tale che sia $K' \cap Q_i$ che $K' \cap Q_r$ siano due spigoli adiacenti. Possiamo assumere, procedendo per induzione se necessario, che questo accada proprio nei cubi adiacenti a Q_j , cioè che $i = j - 1$ e $r = j + 1$. Chiamiamo ora $F_1 = Q_{j-1} \cap Q_j$ e

$F_2 = Q_{j+1} \cap Q_j$. Consideriamo il cubo Q_{j-1} , abbiamo due casi:

(i) Supponiamo che i vertici w_1, w_3, v_1, v_3, z_3 soddisfino le seguenti condizioni: $w_1, w_3 \in K$, $v_1, v_3, z_3 \in K'$, lo spigolo $\overline{v_1v_3}$ è opposto allo spigolo $\overline{w_1w_3}$ e i vertici v_3, z_3, w_3 appartengono a F'_2 , faccia opposta a F_1 (figura 2.22). Possiamo notare come nel cubo Q_{j-1} si verifica la stessa disposizione descritta nel caso 2(b)1, possiamo quindi applicare **M1** a Q_{j-1} per sostituire $\overline{z_3v_3} \cup \overline{v_1v_3}$ con $\overline{z_3z_1} \cup \overline{v_1z_1}$ e ottenere A_{j-1} come nel caso 2(b)1. A questo punto anche nel cubo Q_j abbiamo la stessa disposizione del caso 2(b)1, quindi possiamo applicare **M1** e ottenere A_j .

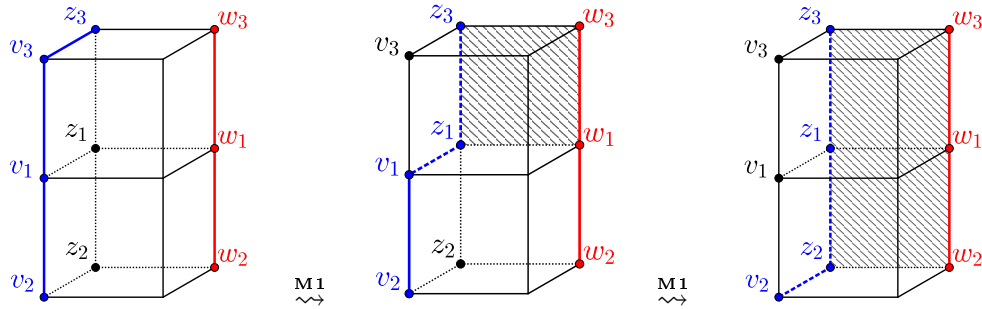


Figura 2.22: Caso *i*.

(ii) Supponiamo che $K \cap Q_{j-1} = w_1$. Come in precedenza applichiamo **M1** a Q_{j-1} in modo da rimpiazzare $\overline{z_3v_3} \cup \overline{v_1v_3}$ con $\overline{z_3z_1} \cup \overline{v_1z_1}$. Notiamo che esiste un cubo $Q \in B$ adiacente a Q_{j-1} tale che $z_3, z_1, w_1 \in Q \cap Q_{j-1} \Rightarrow Q_{j-1}$ è superfluo $\Rightarrow A_{j-1} = \emptyset$. A questo punto nel cubo Q_j

abbiamo la stessa situazione descritta nel caso 2(b)1 e quindi applicando **M1** otteniamo A_j (figura 2.23).

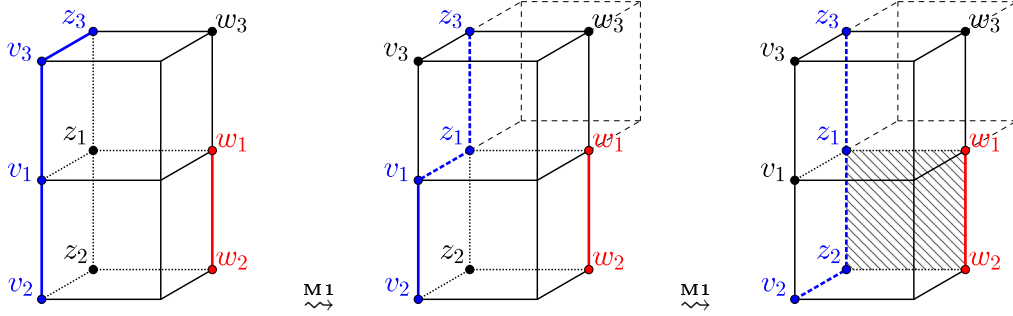


Figura 2.23: Caso *ii*.

3. L'ultima possibile configurazione è mostrata in figura 2.24, è molto simile al caso 1(b)3, per gli stessi motivi $A_j = \emptyset$.

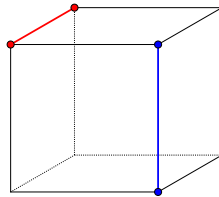


Figura 2.24: $A_j = \emptyset$

Caso 3. $K \cap Q_j$ è unione di due spigoli consecutivi contenuti nella faccia F .

- (a) $K' \cap Q_j$ è un cammino di tre spigoli. Dato che $K \cap K' = \emptyset$, i tre spigoli possono essere contenuti tutti in una faccia F' opposta a F , ma in tal caso basta applicare **M2** a F' per ridurre $K' \cap Q_j$ ad un cammino di un solo spigolo; oppure due spigoli l_1 e l_2 sono contenuti in F' e il terzo, che chiamiamo l , in una faccia

adiacente. Applicando **M1** se necessario, possiamo assumere che l e l_1 appartengano ad una faccia F_1 , e che l_2 e uno degli spigoli di $K \cap Q_j$ appartengano alla faccia adiacente F_2 (figura 2.25). Possiamo prendere $A_j = F_1 \cup F_2$.

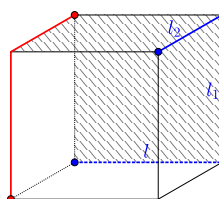


Figura 2.25: $K' \cap Q_j$ è unione di tre spigoli.

(b) $K' \cap Q_j$ è un cammino di due spigoli.

1. $K \cap Q_j$ e $K' \cap Q_j$ sono contenuti in due facce adiacenti di Q_j . Come A_j possiamo prendere l'unione di queste due facce (figura 2.26).

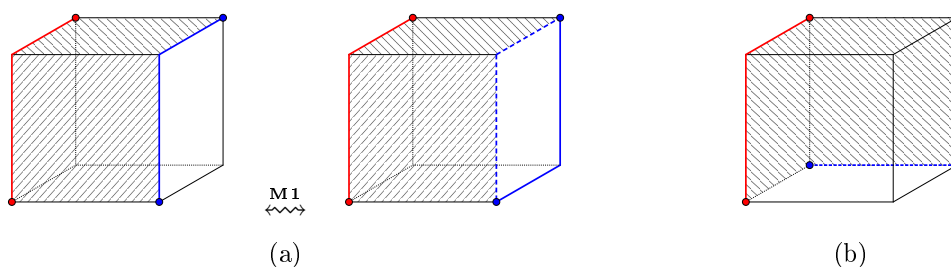


Figura 2.26: $K \cap Q_j$ e $K' \cap Q_j$ sono contenuti in due facce adiacenti.

2. $K \cap Q_j$ e $K' \cap Q_j$ sono contenuti in facce opposte. Notiamo che c'è una sola faccia F_1 che interseca sia K che K' in uno spigolo, rispettivamente (figura 2.27). Poniamo $A_j = F_1$.

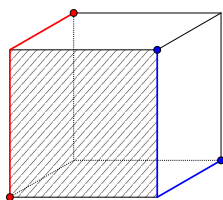


Figura 2.27: $K \cap Q_j$ e $K' \cap Q_j$ sono contenuti in facce opposte.

(c) $K' \cap Q_j$ è uno spigolo.

1. Quattro vertici giacciono su una faccia $F_1 \subset Q_j$ e il rimanente vertice è collegato a F_1 da uno spigolo l che può essere $K' \cap Q_j$ (figura 2.28a) oppure appartenere a $K \cap Q_j$ (figura 2.28b). Come nel caso 2(b)1 poniamo $A_j = F_1 \cup l$.

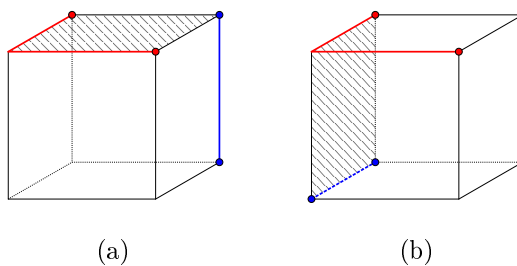


Figura 2.28: Quattro vertici sono contenuti in una faccia $F_1 \subset Q_j$.

2. L'ultimo caso rimanente è mostrato in figura 2.29. $K \cap Q_j$ e $K' \cap Q_j$ sono contenuti in due facce adiacenti; come A_j possiamo prendere l'unione di queste due facce.

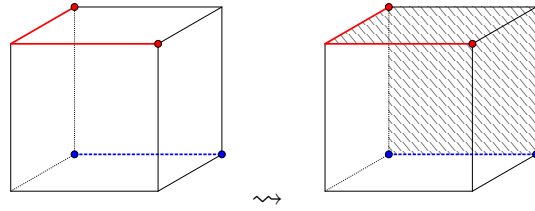


Figura 2.29: $K \cap Q_j$ e $K' \cap Q_j$ sono contenuti in due facce adiacenti.

Sia $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Per costruzione ogni A_j può essere o una faccia, o l'unione di due facce adiacenti, o l'unione di una faccia e uno spigolo l . Notiamo che l è contenuto in qualche altra faccia A_i , infatti, se $l \subset K$ allora esiste un altro cubo Q_i contenente l , e per come è stato costruito, K' deve intersecare Q_i in almeno un altro spigolo, quindi $l \subset A_i$. Se $l \subset K'$ allora esiste un cubo Q_r adiacente a Q_j tale che $l \subset Q_r$ e $Q_r \cap K \neq \emptyset$, quindi $l \subset A_r$. Questo dimostra che A è unione di facce contenute nel 2-scheletro di \mathcal{N}_K . Per come è stato costruito, la frontiera dell'anello A è composta da spigoli appartenenti o a K o a K' , infatti se due spigoli l_j, l'_j non appartengono né a K né a K' , A_j è stato scelto in modo tale che $A_j \cap A_{j+1}$ è proprio uno dei due spigoli l_j, l'_j . Da queste due osservazioni segue che A è un anello, contenuto nel 2-scheletro di \mathcal{N}_K , la cui frontiera è composta da due componenti connesse, K e K' (figura 2.30).

Per costruzione A è l'unione di un numero finito di quadrati, supponiamo p , a due a due adiacenti; questi quadrati li possiamo numerare in questo modo: il quadrato F_1 deve intersecare i nodi K e K' in due spigoli opposti. $\forall i = 1, \dots, p-1$ il quadrato F_{i+1} è adiacente a F_i . Di conseguenza, poiché A è un anello, il quadrato F_p sarà adiacente a F_1 . A questo punto possiamo portare il nodo K in K' . Applichiamo il movimento cubico **M2** a F_1 in

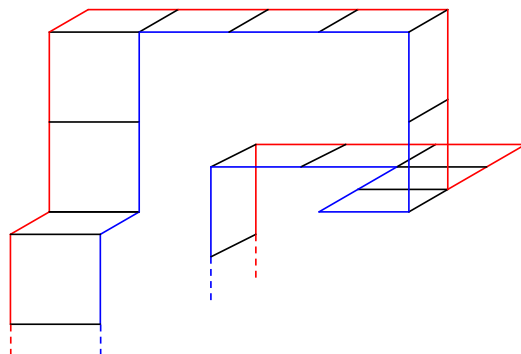


Figura 2.30: Esempio di una sezione dell'anello A .

modo da sostituire lo spigolo di K con gli altri tre, uno di questi sarà uno spigolo di K' , gli altri due, che chiamiamo l_1 e l_2 , saranno spigoli che F_1 ha in comune rispettivamente con F_n e F_2 . Al passo successivo, a seconda dei casi, possiamo applicare o **M1** o **M2** a F_2 in modo da sostituire gli spigoli di K con gli altri. Continuiamo ad applicare uno dei due movimenti cubici a K su ogni quadrato F_i . Notiamo che al passo $j + 1$ lo spigolo l_j , che appartiene al nodo K ma non a K' , viene sostituito applicando sul quadrato F_{j+1} uno dei due movimenti. Alla fine del procedimento avremo quindi portato il nodo K nel nodo K' con una sequenza finita di movimenti cubici $\Rightarrow K \stackrel{\mathbf{M}}{\approx} K'$. \square

Ci rimane da dimostrare che K'_1 e K'_2 sono equivalenti mediante movimenti cubici. Prima di procedere con la dimostrazione abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Sia $p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sull'ultima coordinata. Osserviamo innanzitutto che l'insieme $p^{-1}(t) = \{(x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$, che indichiamo in questo modo \mathbb{R}_t^3 , è un iperpiano affine parallelo allo spazio

$\mathbb{R}^3 \times \{0\}$.

Lemma 2.15. \mathbb{R}_t^3 ha una tassellazione in cubi canonica $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. \mathbb{R}_t^3 è un iperpiano affine parallelo allo spazio $P = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$. P ha una tassellazione in cubi canonica \mathcal{C}_P data dalla restrizione della tassellazione in cubi \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 , quindi \mathcal{C}_P è una decomposizione in cubi che sono immagine del cubo unitario $I^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \mid 0 \leq x_i \leq 1\}$ tramite traslazioni di vettori a coefficienti interi. Per ottenere la tassellazione in cubi canonica di \mathbb{R}_t^3 basta traslare \mathcal{C}_P per il vettore $(0, 0, 0, t)$. \square

Definizione 2.16. Una faccia F della tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 (cioè un cubo 2-dimensionale contenuto in un cubo di \mathcal{C}) è chiamata:

- *orizzontale* se $p(F) = n \in \mathbb{N}$.
- *verticale* se $p(F) = [n, n + 1]$ con $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.17. Sia S una superficie cubica (contenuta in \mathcal{S} , 2-scheletro della tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^4), e sia P un iperpiano affine in \mathbb{R}^4 . Diciamo che P e S si *intersecano trasversalmente*, e li indichiamo in questo modo $P \pitchfork S$, se $P \cap S$ è una curva poligonale.

Lemma 2.18. Sia \mathbb{R}_t^3 con $t \notin \mathbb{Z}$, un iperpiano affine di \mathbb{R}^4 . Allora \mathbb{R}_t^3 interseca J' trasversalmente.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}_t^3 \cap J'$. Poiché J' è una superficie cubica, $x \in F_i$ dove F_i è una faccia della tassellazione \mathcal{C} . Osserviamo che F_i è una faccia verticale infatti $t \notin \mathbb{Z}$, abbiamo quindi due possibilità: o $x \in \text{Int}(F_i)$ o $x \in \partial F_i$.

- Se $x \in \text{Int}(F_i)$ allora $\mathbb{R}_t^3 \cap F_i$ è un segmento parallelo a uno spigolo.
- Se $x \in \partial F_i$ allora x appartiene a uno spigolo di F_i , quindi esiste un'altra faccia verticale F_j adiacente a F_i , tale che $x \in F_i \cap F_j$. Inoltre $\mathbb{R}_t^3 \cap F_i$ e $\mathbb{R}_t^3 \cap F_j$ sono due segmenti l_i e l_j , paralleli rispettivamente a uno spigolo di F_i e a uno di F_j , tali che $x \in l_i \cap l_j$.

In ogni caso x o appartiene ad un segmento o è un vertice comune a due segmenti adiacenti, e dato che $\mathbb{R}_t^3 \cap J'$ è un insieme connesso (dal teorema 2.5), segue la tesi. \square

Corollario 2.19. *Per $t \notin \mathbb{Z}$ l'insieme $p^{-1}(t) \cap J'$ è un nodo.*

Dimostrazione. Per il lemma 2.18 l'insieme $p^{-1}(t) \cap J'$ è una curva poligonale connessa. Per come è stato definito il cilindro di isotopia J la curva è anche chiusa e semplice perché J' è una copia isotopa di J . \square

Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$K_{-\frac{1}{2}}(n) = p^{-1}\left(n - \frac{1}{2}\right) \cap J'$$

e

$$K_{\frac{1}{2}}(n) = p^{-1}\left(n + \frac{1}{2}\right) \cap J'.$$

Per il corollario 2.19 $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ e $K_{\frac{1}{2}}(n)$ sono nodi cubici, e sono contenuti rispettivamente in $\mathbb{R}^3 \times \{n - \frac{1}{2}\}$ e $\mathbb{R}^3 \times \{n + \frac{1}{2}\}$.

Nel capitolo precedente abbiamo indicato con \mathcal{S} il 2-scheletro della tassellazione in cubi canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^4 , cioè l'insieme di tutte le facce contenute in cubi di \mathcal{C} . Consideriamo gli spazi:

$$B_{-\frac{1}{2}}(n) = \bigcup \{F \in \mathcal{S} \mid F \cap K_{-\frac{1}{2}}(n) \neq \emptyset\}$$

e

$$B_{\frac{1}{2}}(n) = \bigcup \{F \in \mathcal{S} \mid F \cap K_{\frac{1}{2}}(n) \neq \emptyset\}.$$

Poiché tutte le facce di \mathcal{S} che incontrano i due nodi sono facce verticali e di lato unitario possiamo osservare che:

$$B_{-\frac{1}{2}}(n) = K_{-\frac{1}{2}}(n) \times [n-1, n]$$

e

$$B_{\frac{1}{2}}(n) = K_{\frac{1}{2}}(n) \times [n, n+1],$$

dove con $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ e $K_{\frac{1}{2}}(n)$, abusando della notazione, non indichiamo i nodi contenuti rispettivamente in $\mathbb{R}^3 \times \{n - \frac{1}{2}\}$ e $\mathbb{R}^3 \times \{n + \frac{1}{2}\}$ ma delle loro copie in \mathbb{R}^3 , ottenute eliminando la 4^a coordinata. Infine chiamiamo $F_0(n) = p^{-1}(n) \cap J'$ e definiamo lo spazio $B = B_{-\frac{1}{2}}(n) \cup F_0(n) \cup B_{\frac{1}{2}}(n)$.

Lemma 2.20. $B \cong \mathbb{S}^1 \times I$, cioè lo spazio B è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times I$.

Dimostrazione. Notiamo che $B = p^{-1}([n-1, n+1]) \cap J'$. Nelle dimostrazioni della proposizione 2.7 e del lemma 2.9 abbiamo visto che $p^{-1}([n, n+1]) \cap J$ è un insieme compatto e connesso, ma dato che J' è una copia isotopa di J anche $B = p^{-1}([n-1, n+1]) \cap J'$ è compatto e connesso; inoltre per lo stesso motivo J' è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Ora basta osservare che $J' - B$ ha due componenti connesse per dedurre che B è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times I$. \square

Lemma 2.21. B si deforma in $F_0(n)$.

Dimostrazione. $B = B_{-\frac{1}{2}}(n) \cup F_0(n) \cup B_{\frac{1}{2}}(n)$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times I$. Ricordiamo inoltre che $B_{-\frac{1}{2}}(n) = K_{-\frac{1}{2}}(n) \times [n-1, n]$ e $B_{\frac{1}{2}}(n) = K_{\frac{1}{2}}(n) \times [n, n+1]$. Dato che gli intervalli $[n-1, n]$ e $[n, n+1]$ si deformano entrambi in $\{n\}$,

abbiamo che $B_{-\frac{1}{2}}(n) = K_{-\frac{1}{2}}(n) \times [n-1, n]$ si deforma in $K_{-\frac{1}{2}}(n) \times \{n\}$ e analogamente $B_{\frac{1}{2}}(n) = K_{\frac{1}{2}}(n) \times [n, n+1]$ si deforma in $K_{\frac{1}{2}}(n) \times \{n\}$. Osserviamo inoltre che $\partial F_0(n) = K_{-\frac{1}{2}}(n) \times \{n\} \cup K_{\frac{1}{2}}(n) \times \{n\}$, quindi B si deforma in $F_0(n) \cup \partial F_0(n) = F_0(n)$. L'ultima uguaglianza è vera perché $F_0(n)$ è chiuso in quanto unione di un numero finito di spigoli e di facce che sono insiemi chiusi. \square

Da quanto appena detto abbiamo delle copie di $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ e $K_{\frac{1}{2}}(n)$ contenute in $\partial F_0(n)$. D'ora in avanti con $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ e $K_{\frac{1}{2}}(n)$ indicheremo proprio queste copie.

Lemma 2.22. $F_0(n)$ ha lo stesso tipo di omotopia di \mathbb{S}^1 .

Dimostrazione. Il lemma 2.20 ci dice che B è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times I$ ma $\mathbb{S}^1 \times I$ si deforma in $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \cong \mathbb{S}^1$. Dal lemma 2.21 sappiamo che B si deforma in $F_0(n)$, quindi esiste uno spazio che a meno di omeomorfismi si deforma sia in \mathbb{S}^1 che in $F_0(n)$, questo implica che \mathbb{S}^1 e $F_0(n)$ hanno lo stesso tipo di omotopia. \square

Come corollario immediato del lemma 2.22 abbiamo che:

Corollario 2.23. $\pi_1(F_0(n)) \cong \mathbb{Z}$, cioè il gruppo fondamentale di $F_0(n)$ è isomorfo al gruppo additivo dei numeri interi $(\mathbb{Z}, +)$.

Andiamo ora a descrivere il sottoinsieme $F_0(n)$. Osserviamo che gli spigoli contenuti in $F_0(n)$ possono essere di quattro tipi, che chiameremo T_1, T_2, T_3 e T_4 .

- Uno spigolo $l \subset F_0(n)$ è del tipo T_1 se $l \subset B_{-\frac{1}{2}}(n)$ ma $l \not\subset B_{\frac{1}{2}}(n)$.

- Uno spigolo $l \subset F_0(n)$ è del tipo T_2 se $l \subset B_{\frac{1}{2}}(n)$ ma $l \not\subset B_{-\frac{1}{2}}(n)$.
- Uno spigolo $l \subset F_0(n)$ è del tipo T_3 se $l \subset B_{-\frac{1}{2}}(n) \cap B_{\frac{1}{2}}(n)$.
- Uno spigolo $l \subset F_0(n)$ è del tipo T_4 se $l \not\subset B_{-\frac{1}{2}}(n)$ e $l \not\subset B_{\frac{1}{2}}(n)$.

Lemma 2.24. $K_{-\frac{1}{2}}(n) \stackrel{M}{\sim} K_{\frac{1}{2}}(n)$, cioè esiste una sequenza finita di movimenti cubici che porta il nodo $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ nel nodo $K_{\frac{1}{2}}(n)$.

Dimostrazione. Notiamo che $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ è unione di spigoli del tipo T_1 e T_3 , mentre $K_{\frac{1}{2}}(n)$ è unione di spigoli del tipo T_2 e T_3 . Ci sono quattro possibili casi.

Caso 1. $K_{-\frac{1}{2}}(n) = K_{\frac{1}{2}}(n)$. Il risultato è ovvio.

Caso 2. $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n) = \emptyset$ (figura 2.31). In altre parole in $F_0(n)$ non ci sono spigoli del tipo T_3 . Ricordiamo che $F_0(n)$ è una superficie cubica compatta che ha lo stesso tipo di omotopia di \mathbb{S}^1 (lemma 2.22), quindi $\partial F_0(n)$ ha due componenti connesse, $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ e $K_{\frac{1}{2}}(n)$, la cui intersezione è vuota. Questo significa che $F_0(n)$ è unione di facce contenute nel 2-scheletro di \mathcal{C} i cui spigoli sono del tipo T_1, T_2 e T_4 . Per portare il nodo $K_{-\frac{1}{2}}(n)$ in $K_{\frac{1}{2}}(n)$ dovremmo portare gli spigoli del tipo T_1 in spigoli del tipo T_2 , detto diversamente dobbiamo trasformare spigoli T_2 in spigoli T_3 . Sia F una faccia contenuta in $F_0(n)$, a meno di considerare una sottotassellazione abbastanza fine, possiamo assumere che se uno spigolo $l \subset F$ è del tipo T_1 , allora $F \cap K_{\frac{1}{2}}(n) = \emptyset$ e $F \cap K_{-\frac{1}{2}}(n)$ è composto o da uno spigolo o da due spigoli adiacenti. Analogamente se $l \subset F$ è del tipo T_2 , allora $F \cap K_{-\frac{1}{2}}(n) = \emptyset$ e $F \cap K_{\frac{1}{2}}(n)$ è o uno

spigolo o due spigoli adiacenti. $F_0(n)$ è unione di un numero finito di facce, diciamo m . Le enumeriamo nel seguente modo:

- La prima faccia F_1 contiene uno spigolo del tipo T_1 .
- Data la faccia F_j , la faccia F_{j+1} condivide con F_j uno spigolo l_j , e quando è possibile scegliamo F_{j+1} in modo tale che l_j sia parallelo a l_{j-1} .

Consideriamo F_1 . Applicando il movimento cubico **M2** sul quadrato F_1 rimpiazziamo gli spigoli del tipo T_4 con spigoli del tipo T_1 . Consideriamo F_2 e osserviamo che F_1 e F_2 ora hanno in comune uno spigolo del tipo T_1 . Applichiamo di nuovo o **M1** o **M2**, a seconda dei casi, a F_2 in modo da rimpiazzare spigoli T_4 con spigoli T_1 , ed eventualmente spigoli T_2 con spigoli T_3 . Possiamo iterare questo procedimento per ogni faccia F_i . Notiamo che se uno spigolo $l \subset F_0(n)$ è del tipo T_2 allora $l \subset \partial F_0(n)$, quindi l non è uno spigolo comune a due facce $F_i, F_j \subset F_0(n)$. Questo significa che se nel corso del procedimento l è diventato uno spigolo di tipo T_3 , questa disposizione non verrà modificata nei passi successivi. Quindi abbiamo la tesi.

Caso 3. L'intersezione $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n)$ è composta da un numero finito di punti (figura 2.32). In questo caso la superficie $F_0(n)$ è unione di componenti connesse C_i con $i = 1, \dots, r$ tali che ogni C_i è a sua volta unione di facce F_{i_1}, \dots, F_{i_s} di cubi di \mathcal{C} , inoltre per ogni $i \neq j$ abbiamo che $C_i \cap C_j$ è o l'insieme vuoto o un punto appartenente a $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n)$. Per dimostrare la tesi basta numerare le facce F_{i_1}, \dots, F_{i_s} come nel **caso 2**,

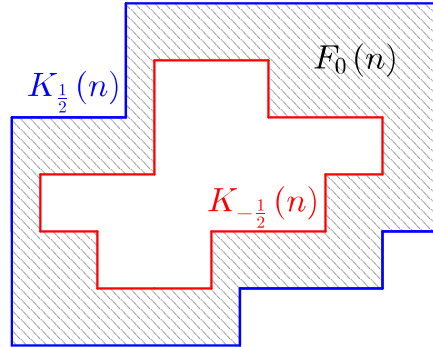


Figura 2.31: $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n) = \emptyset$.

applicare a seconda dei casi uno dei due movimenti cubici ad ogni faccia, e ripetere questo argomento per ogni componente C_i .

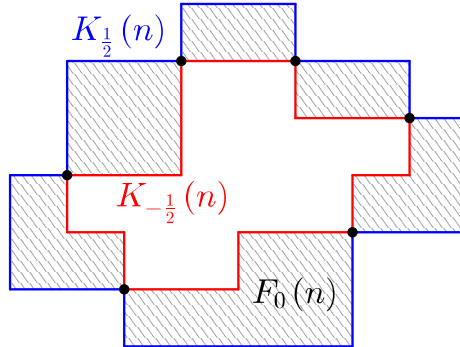


Figura 2.32: L'intersezione $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n)$ è composta da un numero finito di punti.

Caso 4. $F_0(n)$ contiene almeno uno spigolo del tipo T_3 , cioè l'intersezione $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n)$ contiene almeno uno spigolo (figura 2.33). In questo caso $F_0(n)$ è unione di componenti connesse C_i con $i = 1, \dots, r$ (come nel caso precedente ogni C_i è a sua volta unione di facce F_{i_1}, \dots, F_{i_s} di cubi di \mathcal{C}) e di archi γ_{ij} (che

possono essere o unione di spigoli adiacenti o in alcuni casi solamente vertici), che congiungono C_i con C_j . Possiamo osservare che $\gamma_{ij} \subset K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n)$, infatti γ_{ij} è unione di spigoli del tipo T_3 . Inoltre $K_{-\frac{1}{2}}(n) \cap K_{\frac{1}{2}}(n) = \bigcup \gamma_{ij}$ e $\partial F_0(n) = K_{-\frac{1}{2}}(n) \cup K_{\frac{1}{2}}(n)$. Poiché il gruppo fondamentale di $F_0(n)$ è isomorfo a \mathbb{Z} , ogni componente connessa C_i può avere lo stesso tipo di omotopia o di \mathbb{S}^1 o del disco D^2 . Osserviamo però che se C_i avesse lo stesso tipo di omotopia di \mathbb{S}^1 in $F_0(n)$ non ci sarebbe nessuno spigolo di tipo T_3 , quindi ci troveremo in uno dei casi precedenti. Perciò C_i ha lo stesso tipo di omotopia del disco D^2 . Questo implica che ∂C_i è omeomorfa a \mathbb{S}^1 ed è composta da spigoli del tipo T_1 e spigoli del tipo T_2 . Chiamiamo A_1 e A_2 l'unione degli spigoli rispettivamente del tipo T_1 e T_2 , a questo punto ci basta numerare le facce che compongono C_i come abbiamo fatto nel **caso 2** e applicare ad ogni faccia uno dei movimenti cubici per portare l'arco A_1 nell'arco A_2 . Ripetendo l'argomento per ogni componente C_i , poiché sono un numero finito, abbiamo la tesi.

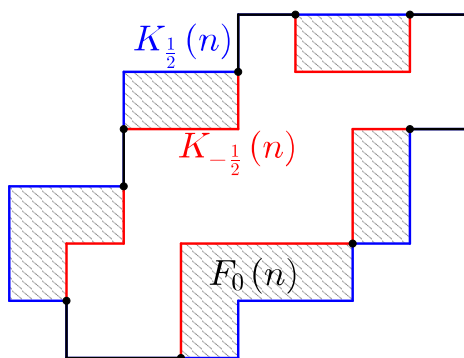


Figura 2.33: $F_0(n)$ contiene almeno uno spigolo del tipo T_3 .

□

Dimostrazione del teorema 2.14. Ricordiamo che esistono due numeri interi m_1 e m_2 tali che $p^{-1}(t) \cap J' = K'_1$ per ogni $t \leq m_1$ e $p^{-1}(t) \cap J' = K'_2$ per ogni $t \geq m_2$. Consideriamo l'intero m_1 e osserviamo che $K_{-\frac{1}{2}}(m_1) \cong K'_1$. Il lemma 2.24 implica che esiste una sequenza finita di movimenti elementari che porta il nodo K'_1 in $K_{\frac{1}{2}}(m_1)$. Analogamente, se consideriamo m_2 possiamo notare che $K_{\frac{1}{2}}(m_2) \cong K'_2$ e dal lemma 2.24 abbiamo che i nodi $K_{-\frac{1}{2}}(m_2)$ e K'_2 sono equivalenti mediante movimenti cubici. Poiché nell'intervallo $[m_1, m_2]$ ci sono un numero finito di numeri interi, esiste una sequenza finita di movimenti cubici che porta il nodo K'_1 nel nodo K'_2 . \square

Conclusione

In sintesi siamo riusciti a raggiungere gli obiettivi preposti, ovvero illustrare la corrispondenza tra nodi lisci e nodi cubici e dimostrare il teorema di rappresentazione delle isotopie per i nodi cubici. Questo risultato sembra apparentemente rispondere al problema dell'equivalenza tra nodi cubici, ma non fornisce in verità un vero e proprio algoritmo per determinare l'equivalenza fra due nodi distinti: non essendo noto a priori il numero di movimenti necessari per trasformare un nodo nell'altro, non è possibile sapere con certezza in un tempo finito se i due nodi non sono equivalenti. In [5] ci vengono forniti dei suggerimenti per risolvere questo problema che potrebbero essere oggetto di sviluppi futuri.

Infatti, essendo un nodo cubico K un nodo poligonale i cui vertici sono punti di \mathbb{Z}^3 , possiamo descrivere il nodo K con una sequenza ciclica (a_1, a_2, \dots, a_n) di elementi di \mathbb{Z}^3 . A questo punto potremmo studiare alcune proprietà e alcuni invarianti, che non abbiamo potuto trattare in questa tesi come ad esempio il polinomio di Alexander, le superfici di Seifert e il gruppo fondamentale, in termini di questa sequenza ciclica.

Bibliografia

- [1] Boege M., Hinojosa H., Verjovskiy A., *Any smooth knot $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ is isotopic to a cubic knot contained in the canonical scaffolding of \mathbb{R}^{n+2}* , Rev. Mat Complutense, Vol. 24 no. 1 pp. 1-13, 2011.
- [2] Crowell R. H., Fox R. H., *Introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 57, Springer-Verlag, New York-Berlino-Heidelberg, 1977 (ristampa dell'edizione originale del 1963).
- [3] Douady A., *Arrondissement des arêtes*, Séminaire Henry Cartan, Exp. 3 pp. 25, Secrétariat mathématique, Parigi, 1961-1962.
- [4] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] Hinojosa H., Verjovskiy A., Verjovskiy Marcotte C., *Cubulated moves and discrete knots*, Preprint arXiv:1302.2133v2, 2013.
- [6] Hirsch M. W., *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 33, Springer-Verlag, New York-Berlino-Heidelberg, 1976.

-
- [7] Lickorish W. B. R., *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 175, Springer-Verlag, New York-Berlino-Heidelberg, 1997.
- [8] Manturov V. O., *Knot theory*, CRC press, Londra, 2004.
- [9] Prasolov V. V., Sossinsky A. B., *Knots, links, braids and 4-manifolds. An introduction to the new invariants in low-dimensional topology*, Translations of mathematical monographs, Vol 154, American mathematical society, Providence, 1996.
- [10] Sernesi E., *Geometria 2*, Programma di matematica fisica elettronica, Bollati Boringhieri, 1994.
- [11] Sossinsky A. B., *Knots, mathematics with a twist*, Harward university press, Londra, 2002.