

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAMERINO

SCUOLA DI SCIENZE E TECNOLOGIE
LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA E APPLICAZIONI

Il contributo di Battaglini
alla geometria iperbolica



Elaborato Finale in Geometria

Candidato:

Filippo Ciavattini

Relatore:

Prof. Riccardo Piergallini

Riccardo Piergallini

ANNO ACCADEMICO 2022 / 2023

Indice

Introduzione	1
1 Lobačevskij e la fondazione della geometria iperbolica	3
2 L'articolo di Battaglini sulla geometria iperbolica	33
3 Beltrami e il primo modello di geometria iperbolica	45
4 Considerazioni finali	59
A Conoscenze preliminari sulle superfici riemanniane	61
Bibliografia	65

INDICE

Introduzione

Euclide basa i suoi Elementi su cinque assiomi:

1. dati due punti, esiste ed è unica la linea retta passante per essi;
2. è possibile prolungare indefinitamente una linea retta;
3. è possibile tracciare circonferenze con qualsiasi centro e qualsiasi raggio;
4. tutti gli angoli retti sono congruenti fra loro;
5. per ogni retta e per ogni punto esterno ad essa, esiste ed è unica la parallela alla retta uscente dal punto.

Tra i cinque assiomi, l'ultimo è l'unico che sembra artificioso e non auto-evidente. Per questo motivo i matematici hanno provato a dedurlo a partire dai primi quattro. Nonostante i numerosi tentativi, nessuno riuscì a dimostrare la sua dipendenza dagli altri.

Allora i matematici iniziarono a pensare che si potesse negare il quinto postulato. Più precisamente, iniziarono a credere che ne potessero esistere versioni alternative: data una retta e un punto a lei esterno, la prima alternativa postula che non esiste la parallela uscente dal punto dato; la seconda afferma, invece, che ne esistono infinite.

Mentre la prima alternativa è quella che viene accettata nella geometria sferica, la seconda è quella che viene messa alla base della geometria iperbolica.

Gli scritti di Lobačevskij, insieme a quelli di Bolyai, furono il fondamento per quest'ultima geometria. Nonostante i loro scritti contenessero numerosi risultati, essi non riuscirono a trovare modelli di geometria iperbolica.

INTRODUZIONE

Il primo modello di geometria iperbolica è da attribuire a Eugenio Beltrami. Egli trovò un modo per proiettare le superfici a curvatura costante sul piano in maniera che le geodetiche venissero trasformate in linee rette e in questo modo inventò quello che noi oggi conosciamo come “disco di Beltrami”.

Un altro matematico che ha giocato un ruolo importante per lo sviluppo della geometria iperbolica, o almeno per la sua diffusione, è stato l’italiano Giuseppe Battaglini. Egli fondò nel 1863 il “Giornale di matematica di Battaglini”. Nel quinto volume, del 1867, appare una traduzione italiana fatta proprio da Battaglini di Pangeometria, che è l’opera più importante di Lobachevskij riguardante la geometria iperbolica. Sempre in questo volume è presente un articolo di Battaglini sui suoi studi in materia. Infine, nel volume dell’anno successivo, oltre ad essere stata pubblicata la traduzione degli scritti di Bolyai, viene pubblicato il “Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea” di Beltrami dove viene descritto per la prima volta il suo disco.

Secondo alcuni matematici, Battaglini non è stato fondamentale solo per la divulgazione della geometria iperbolica. Infatti essi ritengono che nell’articolo contenuto nel quinto volume si possa trovare il germe del disco di Beltrami.

Dunque, lo scopo di questo elaborato è quello di analizzare il suo contributo, ovvero cercheremo di capire se si possa ritenere Battaglini un precursore del modello di Beltrami. Per fare questo esporremo le scoperte di Lobachevskij contenute in “Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien” e in “Pangeometry”, le idee che Battaglini illustra nel suo articolo pubblicato nel 1867 e, infine, l’articolo del 1868 in cui viene introdotto il disco di Beltrami.

Capitolo 1

Lobačevskij e la fondazione della geometria iperbolica

Il matematico russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, insieme all'ungherese Janos Bolyai, viene considerato il fondatore della geometria iperbolica.

In questo capitolo esporremo le sue ultime due opere: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Ricerche Geometriche sulla Teoria delle Parallele)[4] e Pangeometry (Pangeometria)[6]. Abbiamo ritenuto fosse meglio integrare alcuni passaggi che non sono presenti nelle opere di Lobačevskij.

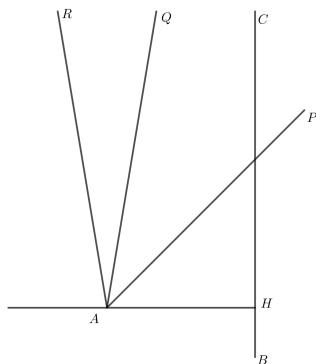


Figura 1.1

Data una retta in un piano e un punto esterno ad essa, le rette uscenti dal punto si dividono in due classi: 1) quelle che, se sufficientemente prolungate, intersecano la retta data; 2) quelle che, per quanto vengano prolungate, non intersecheranno

mai la retta data. Chiamiamo rette parallele, le rette che dividono gli elementi della prima classe dagli elementi della seconda.

Facendo riferimento alla Figura 1.1, consideriamo la retta BC e il punto A . Tracciamo la perpendicolare AH alla retta BC . Nella figura si ha che la semiretta AP incontra BC . Se facciamo ruotare la semiretta AP attorno ad A in senso antiorario di un angolo sufficientemente grande, otteniamo la semiretta AR che non interseca BC . Quindi deve esistere una semiretta AQ che funge da elemento separatore.

Similmente, ruotando AP in senso orario, si passerà da semirette intersecanti BC a semirette non intersecanti. Quindi, dovrà esistere una seconda semiretta AQ' tale che una sua qualsiasi rotazione attorno al punto A in senso orario renderà tale semiretta intersecante con BC .

Chiameremo AQ retta parallela a BC dalla parte di C , AQ' retta parallela a BC dalla parte di B ¹. Sia p la lunghezza del segmento AH , indicheremo con $\Pi(p)$ e chiameremo angolo di parallelismo l'angolo $\widehat{HAQ} = \widehat{HAQ'}$ (supponendo per ora che tale angolo dipenda solamente dalla lunghezza p).

Se $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, allora si avrà che le rette AQ e AQ' coincidono.

Riletta in chiave proiettiva, segue da questa definizione che, se $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, ogni retta possiede una coppia di punti all'infinito coincidenti, mentre, se $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, ogni retta possiede due punti distinti all'infinito.

Dunque se $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ ci sono due parallele. Tutte le altre rette si dividono in quelle non intersecanti se sono contenute nella regione del piano delimitata dalle due parallele AQ e AQ' non contenente AH e in quelle intersecanti; altrimenti se $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$ le rette possono essere o intersecanti o parallele.

Estendiamo la funzione Π ai reali negativi in maniera che

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi.$$

Osservazione 1.1. Si può notare che diminuendo p , la parallela tende a coincidere con BC . Ovvero per $p \rightarrow 0$ si ha che $\Pi(p) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

D'altro canto si vede anche che per $p \rightarrow \infty$ si ha $\Pi(p) \rightarrow 0$.

Teorema 1.2. *In un triangolo la somma degli angoli interni non può superare π .*

¹Questa definizione di retta parallela fa uso del “postulato della continuità di Dedekind”.

Dimostrazione. Sia \widehat{ABC} un triangolo in cui la somma degli angoli interni sia pari a $\pi + a$. In caso i tre lati non siano congruenti, sia BC il più corto. Sia D il punto medio di tale lato. Congiungiamo A con D . Prolunghiamo AD fino ad un punto E tale che $AD = DE$. Per ipotesi si ha che $BD = DC$ e $AD = DE$ e gli angoli \widehat{ADB} e \widehat{CDE} sono congruenti perché angoli opposti al vertice. Dunque \widehat{ABD} è congruente a \widehat{ECD} , in particolare $\widehat{BAD} = \widehat{CED}$ e $\widehat{DBA} = \widehat{DCE}$

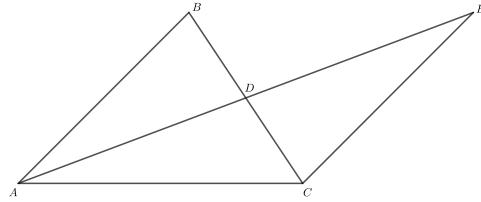


Figura 1.2

Allora la somma degli angoli interni del triangolo \widehat{ACE} continua ad essere pari a $\pi + a$. Infatti la somma degli angoli interni in \widehat{ABC} vale $\widehat{BAD} + \widehat{DAC} + \widehat{ACD} + \widehat{DBA}$, mentre quella in \widehat{ACE} vale $\widehat{CED} + \widehat{DAC} + \widehat{ACD} + \widehat{DCE}$

Iterando la costruzione, dividendo a metà sempre il lato più corto, poiché la costruzione degenera al limite in una linea, si ottiene un triangolo la cui somma degli angoli interni rimane $\pi + a$, ma con due angoli di ampiezza minore di $\frac{1}{2}a$. Poiché l'ampiezza di un angolo in un triangolo non può superare π , necessariamente si deve avere che $a \leq 0$. \square

Teorema 1.3. *Se esiste un triangolo in cui la somma degli angoli interni è pari a π , allora per ogni triangolo la somma degli angoli interni vale π .*

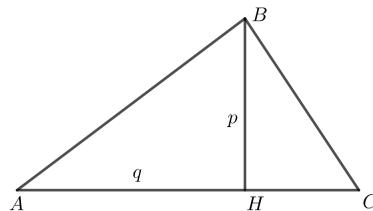


Figura 1.3

Dimostrazione. Sia \widehat{ABC} il triangolo in cui la somma degli angoli interni vale π . Necessariamente ci devono essere due angoli acuti, siano A e C tali angoli. Sia

BH l'altezza relativa ad AC . Poiché per il teorema precedente la somma degli angoli interni dei triangoli $A\widehat{B}H$ e $H\widehat{B}C$ non può essere più grande di π e la loro combinazione deve dare π , questi due triangoli devono essere tali che la somma dei loro angoli interni è π .

Così facendo abbiamo ottenuto un triangolo rettangolo i cui cateti sono $BH = p$ e $AH = q$ e quindi, possiamo ottenere un rettangolo di lati p e q .

Dati due numeri naturali m e n , possiamo unire mn rettangoli di lato p e q fino ad ottenere un rettangolo $ABCD$ con $AB = CD = mp$ e $BC = AD = nq$. Si può scomporre tale rettangolo nei due triangoli $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}D$. Poiché la somma degli angoli interni nei due triangoli è minore o uguale a π , mentre nel rettangolo vale 2π , si deve avere che in entrambi i triangoli vale esattamente π . Allora il triangolo

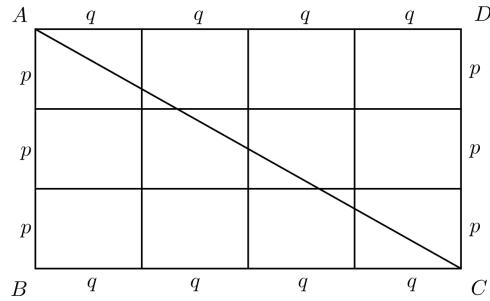


Figura 1.4

$A\widehat{B}C$ è rettangolo in B con i cateti lunghi mp e nq e con la somma degli angoli interni pari a π .

Dato un qualsiasi altro triangolo rettangolo $E\widehat{B}F$, con E ed F appartenenti alle semirette uscenti da B e passanti per A e per C . Possiamo prendere m e n sufficientemente grandi in maniera che il triangolo $E\widehat{B}F$ sia tutto contenuto in $A\widehat{B}C$.

Collegiamo A con F . Allora $A\widehat{B}C$ è formato dai due triangoli $A\widehat{F}C$ e $A\widehat{B}F$, in cui la somma degli angoli interni non può superare π e la cui combinazione deve dare π . Dunque, la somma degli angoli interni dei due triangoli deve essere π . Analogamente, poiché $A\widehat{B}F$ è formato dai triangoli $A\widehat{E}F$ e $E\widehat{B}F$, si deve avere che la somma degli angoli interni del triangolo $E\widehat{B}F$ deve essere pari a π .

Allora per ogni triangolo rettangolo si ha che la somma degli angoli interni deve essere pari a due angoli retti. Poiché ogni triangolo si può vedere come

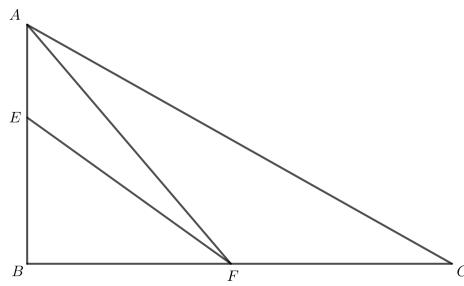


Figura 1.5

combinazione di due triangoli rettangoli, si ha che in ogni triangolo, la somma degli angoli interni è pari a π . \square

Dunque sono due le assunzioni possibili: o per ogni triangolo la somma degli angoli interni è pari a π , o è sempre minore.

Teorema 1.4. *Se due perpendicolari ad una stessa retta sono parallele, allora la somma degli angoli interni ai triangoli è pari a due angoli retti.*

Dimostrazione. Siano AB e CD due rette parallele e perpendicolari ad AC .

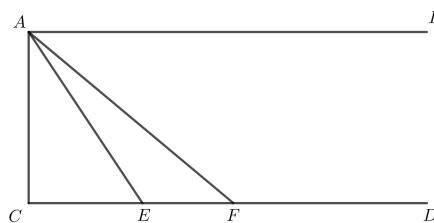


Figura 1.6

Prendiamo due punti E e F su CD tali che $CE < CF$. Congiungiamo A con E e con F . Sia la somma degli angoli interni pari a $\pi - \alpha$ nel triangolo $A\hat{C}E$ e pari a $\pi - \beta$ nel triangolo $A\hat{E}F$, con $\alpha, \beta \geq 0$. Allora la somma degli angoli interni di $A\hat{C}F$ è $\pi - \alpha - \beta$. Infatti si ha $\widehat{ACE} + \widehat{CEA} + \widehat{EAC} = \pi - \alpha$ e $\widehat{AEF} + \widehat{EFA} + \widehat{FAE} = \pi - \beta$, da cui si ottiene $\widehat{ACF} + \widehat{CFA} + \widehat{FAC} = \widehat{ACE} + \widehat{EFA} + \widehat{FAE} + \widehat{EAC} = 2\pi - \alpha - \beta - \widehat{CEA} - \widehat{AEF} = \pi - \alpha - \beta$.

Siano $a = F\hat{A}B$ e $b = A\hat{F}C$. Allora si ha anche che la somma degli angoli interni di $A\hat{C}F$ è anche pari a $\pi - a + b$. Quindi si deve avere che $a - b = \alpha + \beta$.

Allontanando F da C , si ha che gli angoli a e b tendono a zero. Quindi, necessariamente, poiché α non cambia muovendo F , si deve avere che $\alpha = 0$ e che quindi la somma degli angoli interni a $A\widehat{C}E$ è pari a π . \square

Da questo teorema segue facilmente che la somma degli angoli interni ad un triangolo è pari a due angoli retti se e solo se $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$ e che la somma degli angoli interni ad un triangolo è minore di π se e solo se $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$.

La prima assunzione è quella che porta all'usuale geometria euclidea. D'ora in poi supporremo sempre che $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$.

Teorema 1.5. *Per ogni angolo $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ esiste $p > 0$ tale che $\Pi(p) = \alpha$.*

Dimostrazione. Siano AB e AC due rette tali che $B\widehat{A}C = \alpha$. Prendiamo B' su AB e tracciamo la perpendicolare ad AC passante per B' . Sia A' il piede di tale perpendicolare. Sia $\pi - a$ la somma degli angoli interni di $A\widehat{A}'B'$.

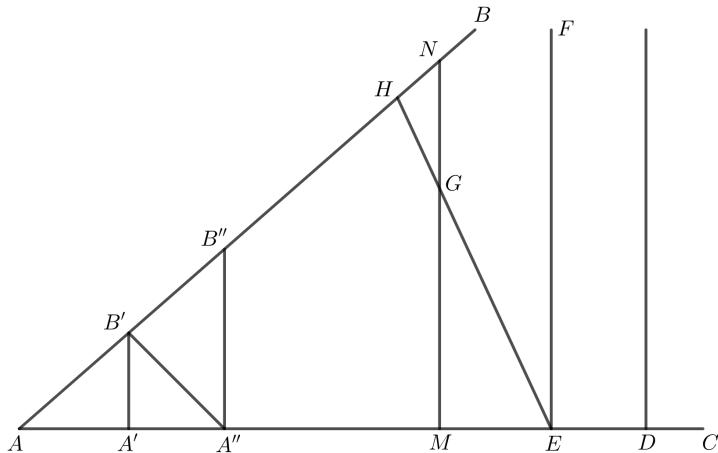


Figura 1.7

Prendiamo il punto A'' su AC tale che $AA' = A'A''$. Allora la somma degli angoli interni di $A\widehat{B'}A''$ è $\pi - 2a$. Tracciamo $A''B''$ perpendicolare ad AC . La somma degli angoli interni di $A\widehat{B''}A''$ sarà minore di $\pi - 2a$, perché è formato dal triangolo $A\widehat{B'}A''$ in cui la somma degli angoli interni è minore di $\pi - 2a$ e dal triangolo $B'\widehat{A''}B''$ in cui tale somma è minore di π .

Prendiamo ora A''' su AC tale che $AA'' = A''A'''$; similmente si ha che in $A\widehat{B''}A'''$ la somma degli angoli interni è minore di $\pi - 4a$. Tracciamo la perpendi-

olare ad AC passante per A''' e sia B''' la sua intersezione con AB ; analogamente si avrà che la somma degli angoli interni a $\widehat{AB'''A''}$ è minore di $\pi - 4a$.

Iterando la costruzione, all' n -esimo passo si ottiene un triangolo in cui la somma degli angoli interni è minore di $\pi - 2^n a$. Poiché tale somma non può essere negativa, non si può iterare la costruzione all'infinito. Dunque si arriva ad un punto D su AC tale che la perpendicolare ad AC uscente da esso non incontra AB .

Allora deve esistere una retta EF perpendicolare ad AC che divide le perpendicolari ad AC che intersecano da quelle che non intersecano AB ². Se dimostriamo che EF è parallela ad AB allora basterà prendere $p = AE$.

Sia G un punto interno ad \widehat{AEF} . Tracciamo la perpendicolare ad AC uscente da G e siano M e N i punti di intersezione di tale perpendicolare rispettivamente con AC e AB .

Per l'assioma di Pasch, poiché la retta EG incontra MN in G , dovrà anche incontrare AN in un qualche punto. Ovvero, per ogni punto interno ad \widehat{AEF} , la retta EG interseca AB . Per l'arbitrarietà di G in \widehat{AEF} , si ha che EF divide le rette uscenti da E intersecanti AB da quelle non intersecanti, ovvero EF è parallela ad AB . \square

Nella geometria euclidea si ha che due rette parallele si mantengono a distanza costante. Ciò non vale invece nella geometria iperbolica, infatti si ha il seguente teorema.

Teorema 1.6. *Più due parallele vengono prolungate nel loro lato di parallelismo, più esse si avvicinano.*

Dimostrazione. Data la retta AB , tracciamo le perpendicolari AD e BC in maniera che $AD = BC$. Congiungiamo C e D .

Otteniamo così il quadrilatero $ABCD$. Notiamo che essendo i due angoli in A e in B retti, necessariamente, i restanti due dovranno essere uguali fra loro per simmetria ed entrambi minori di $\frac{\pi}{2}$.

Sia E il punto medio di AB . Tracciamo la perpendicolare ad AB passante per E che incontra CD in F . Per la simmetria della costruzione si vede che tutti gli angoli in F sono retti.

²Anche in questo caso sfruttiamo il postulato di continuità di Dedekind

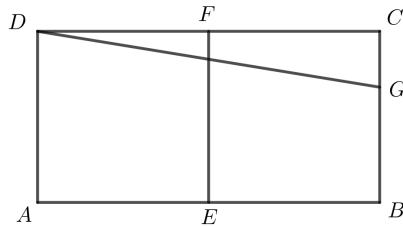


Figura 1.8

Questo implica che CD non può essere parallelo ad AB (teorema 1.4). Inoltre CD non può nemmeno intersecare AB : se CD incontrasse AB in P , nel triangolo $E\hat{P}F$ la somma degli angoli interni supererebbe π . Sia allora DG la parallela ad AB che incontra BC in G . Allora, necessariamente si deve avere che $A\widehat{D}G < A\widehat{D}C$ e quindi che $BG < BC$. \square

In un certo senso si può dire quindi che due rette parallele si “incontrano all’infinito”.

Teorema 1.7. *Se due rette sono parallele ad una terza nello stesso lato di parallelismo, allora sono parallele fra loro.*

Una dimostrazione intuitiva può essere ottenuta considerando l’idea di rette parallele come rette che condividono un punto all’infinito. Questo risultato non si limita a rette contenute nel piano. Da questo teorema segue che date due rette parallele r e r' , se un piano contenente r interseca un piano contenente r' in una retta r'' , allora r'' sarà parallela a r e r' dalla stessa parte in cui r e r' sono paralleli.

Un’altra differenza tra la geometria euclidea e quella iperbolica è che nella prima è sempre garantita l’esistenza dell’incentro di un triangolo, invece nella seconda no. Più precisamente dato un triangolo iperbolico, il suo incentro può essere un punto appartenente al piano, un punto all’infinito o può addirittura non essere incluso nel piano esteso.

Teorema 1.8. *Dato un triangolo, se due assi dei lati si incontrano in un punto I , anche il terzo asse passerà per I*

Dimostrazione. Dato il triangolo $A\widehat{B}C$, siano per ipotesi gli assi dei lati AB e BC incidenti nel punto I .

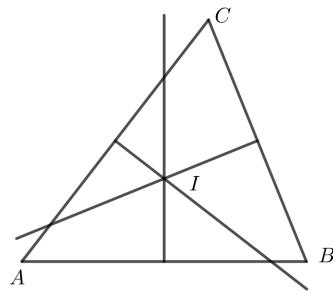


Figura 1.9

Dobbiamo dimostrare che I appartiene all'asse del lato AC . Per fare questo basta dimostrare che $AI = CI$, infatti l'asse di un segmento rappresenta il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi di tale segmento.

Ma ciò risulta banale: per ipotesi abbiamo che $AI = BI$ perché I appartiene all'asse di AB e che $BI = CI$ perché I sta sull'asse di BC . Dunque si ha che $AI = BI = CI$. \square

Teorema 1.9. *In un triangolo, se gli assi di due lati sono paralleli, anche il restante asse sarà parallelo.*

Dimostrazione. In $A\widehat{B}C$ siano le rette DE , FG e HK tracciate perpendicolarmente rispetto ai lati e uscenti dai punti medi D , F e H .

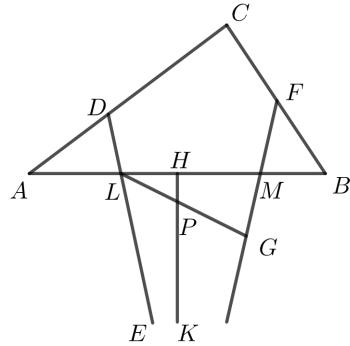


Figura 1.10

Per ipotesi siano DE e FG i due assi paralleli. Siano L e M i punti di intersezione di questi assi con AB .

Tracciamo una linea uscente da L e contenuta nell'angolo $B\widehat{L}E$ che interseca FG in G . Poiché HK non può incontrare MG per il teorema precedente, dovrà intersecare LG in P . Poiché l'angolo $G\widehat{L}E$ può essere preso arbitrariamente piccolo, si ha che HK è parallelo a DE .

Posto $AB = 2c$, $BC = 2a$ e $AC = 2b$, tracciando AA' , BB' e CC' le parallele agli assi passanti per i vertici, si vede che

$$\begin{array}{ll} \widehat{DAA'} = \Pi(b) & \widehat{HAA'} = \Pi(c) \\ \widehat{FBB'} = \Pi(a) & \widehat{HBB'} = \Pi(c) \\ \widehat{DCC'} = \Pi(b) & \widehat{FCC'} = \Pi(a) \end{array}$$

e quindi

$$\begin{aligned} A &= \widehat{CAB} = \widehat{DAA'} - \widehat{HAA'} = \Pi(b) - \Pi(c) \\ B &= \widehat{ABC} = \widehat{FBB'} - \widehat{HBB'} = \Pi(a) - \Pi(c) \\ C &= \widehat{ACB} = \widehat{DCC'} + \widehat{FCC'} = \Pi(a) + \Pi(b) \end{aligned}$$

Se invece ipotizziamo che HK e FG siano gli assi paralleli, ci sono due casi: o anche DE è parallelo a HK o interseca AA' . Se per assurdo DE non fosse parallelo, allora si dovrebbe avere che $\widehat{DCC'} > \Pi(b)$ e quindi che

$$C > \Pi(a) + \Pi(b).$$

Consideriamo il triangolo $B\widehat{C}Q$ tale che $CQ = 2b$, $BC = 2a$ e $BQ = 2c'$ e che $B\widehat{C}Q = \Pi(a) + \Pi(b)$.

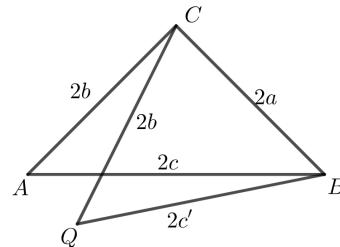


Figura 1.11

Poiché $A\widehat{B}C < Q\widehat{B}C$ si deve avere che

$$\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$$

ovvero, per la monotonia di $\Pi(p)$, si deve avere che $c' > c$.

D'altro canto $A\widehat{C}Q$ è isoscele, quindi gli angoli in A e in Q sono uguali. Questo implica che $B\widehat{A}Q < A\widehat{Q}B$. Allora si deve avere che $AB > BQ$, ovvero che $c > c'$. \square

Chiamiamo cerchio limite la curva con la proprietà che gli assi delle sue corde, chiamati assi del cerchio limite, sono tutti paralleli³. Si può costruire un cerchio limite a partire da un suo asse nel seguente modo. Per ogni reale α compreso

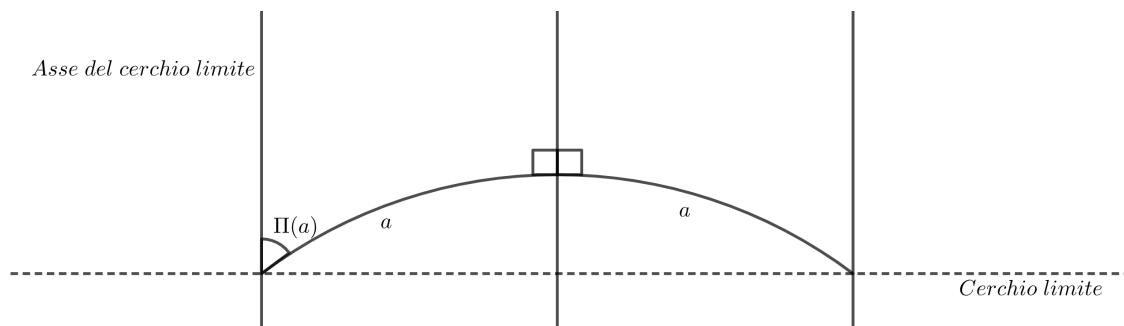


Figura 1.12

fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, esiste e unico a tale che $\Pi(a) = \alpha$. Allora, presa una retta, che sarà un asse del cerchio limite, e un suo punto A , che chiameremo vertice del cerchio limite, tracciamo il segmento uscente da A di lunghezza $2a$ che forma con la retta un angolo α . Allora il secondo estremo del segmento apparterrà al cerchio limite passante per A e avente la retta di partenza come asse. Infatti la perpendicolare al segmento lungo $2a$ passante per il suo punto medio sarà per costruzione parallelo all'asse del cerchio limite.

Chiamiamo sfera limite⁴ la rivoluzione di un cerchio limite attorno ad un suo asse. Con piano diametrale invece chiamiamo un qualsiasi piano che contiene

³Tale curva ora viene chiamata *orociclo*. Ad un orociclo corrisponde una circonferenza di raggio infinito che ha come centro un punto all'infinito.

⁴Tale superficie ora viene chiamata *orosfera*. Ad essa corrisponde una sfera con raggio infinito che ha come centro un punto all'infinito.

almeno un asse della sfera limite. Infine, definiamo triangolo sferico limite la regione di superficie della sfera limite racchiusa dall'intersezione della sfera limite con tre suoi piani diametrali.

Con i seguenti teoremi dimostreremo che in un triangolo sferico limite la somma degli angoli interni vale π^5 .

Teorema 1.10. *Due triangoli sferici che sono simmetrici rispetto al centro della sfera hanno la stessa superficie.*

Teorema 1.11. *Un angolo solido delimitato da tre archi è pari alla somma degli angoli superficiali meno due angoli retti.*

Osservazione 1.12. Questo teorema è equivalente ad affermare che in un triangolo sferico di angoli α , β e γ , la superficie vale $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Dimostrazione. Siano A , B e C i vertici del triangolo sferico. Prolunghiamo fino a completare le circonferenze i lati AB , BC e AC . Sia S la superficie del triangolo.

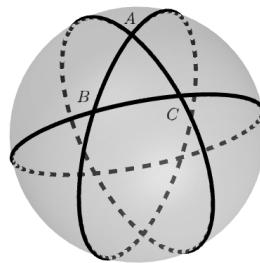


Figura 1.13

Le circonferenze passanti per AB e AC dividono la sfera in 4 spicchi: uno contenente l'angolo A del triangolo, due adiacenti ad esso e uno opposto. L'angolo in A è proporzionale alla superficie dello spicchio che lo contiene.

Da ciò si evince che, chiamata S_A la superficie dello spicchio contenente A , vale la relazione $\frac{A}{2\pi} = \frac{S_A}{4\pi}$, ovvero

$$S_A = 2A$$

⁵In questo modo si potrà vedere che la geometria sull'orosfera è del tutto equivalente alla geometria euclidea piana: prendendo come rette, le intersezioni dei piani diametrali con l'orosfera, e come punti, i punti dell'orosfera, si costruisce un modello di geometria euclidea. Infatti tale costruzione verifica i primi quattro postulati di Euclide, in più, poiché la somma degli angoli interni a un triangolo vale π , verifica anche il quinto postulato.

Similmente per gli altri angoli.

Prendendo lo spicchio contenente A , quello contenente B , quello contenente C e i loro opposti, si ricopre tutta la sfera. Ma gli spicchi si sovrappongono in maniera tale che una porzione della sfera pari ad S viene ricoperta 6 volte in tutto. Da cui si ha che $2S_A + 2S_B + 2S_C = 4\pi - 4S$ e quindi

$$S = A + B + C - \pi$$

□

Teorema 1.13. *Se tre piani si incontrano in tre rette parallele, allora la somma degli angoli diedrali è pari a π .*

Dimostrazione. Siano AA' , BB' e CC' le rette parallele in cui si incontrano i tre piani. Sia D un punto su BB' . Tracciamo AB , AC , BC , AD e CD . Siano X , Y

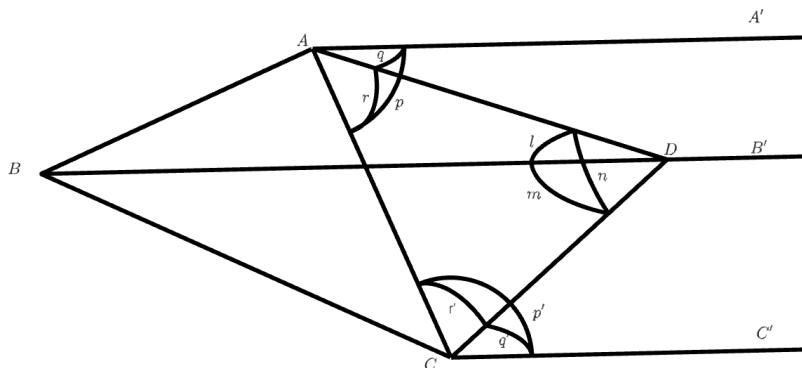


Figura 1.14

e Z gli angoli diedrali rispettivamente in AA' , BB' e CC' e w l'angolo diedrale tra il piano contenente AA' e CC' e il piano passante per AC e per D .

Tracciamo una sfera di centro A che interseca AC , AA' e AD creando un triangolo sferico di lati p , q e r . Sia α la sua superficie. L'angolo opposto a q è w , quello opposto a r è X , quindi l'angolo opposto a p vale $\pi + \alpha - X - w$ (teorema 1.11).

Con un ragionamento analogo si può tracciare un triangolo sferico con centro C di superficie β . Siano p' , q' e r' i lati; gli angoli opposti ai lati valgono rispettivamente $\pi + \beta - Z - w$, w e Z .

Infine, costruendo una sfera di centro D si può ottenere un triangolo sferico di lati l, m e n i cui angoli opposti sono $w + Z - \beta$, $w + X - \alpha$ e Y . Allora la superficie di quest'ultimo triangolo vale $\gamma = X + Y + Z - \pi + 2w - \alpha - \beta$.

Poiché w può essere scelto arbitrariamente piccolo e poiché con w che tende a 0 si ha che α, β e γ tendono a 0, si deve avere che

$$X + Y + Z - \pi = 0$$

□

In un triangolo sferico limite si ottiene intersecando piani diametrali con la sfera limite. Essendo diametrali, i piani si incontrano lungo gli assi della sfera limite. Poiché gli assi di una stessa sfera limite sono paralleli fra loro, si ha che la somma degli angoli diedrali tra tali piani fa π . Infine, in un triangolo sferico limite, gli angoli sono uguali agli angoli diedrali tra i piani che lo generano.

Quindi nei triangoli sferici limite valgono le usuali relazioni della geometria euclidea. In particolare se il triangolo sferico limite è rettangolo, si può esprimere un cateto come il prodotto tra l'ipotenusa e il coseno dell'angolo adiacente o come il prodotto tra l'ipotenusa e il seno dell'angolo opposto.

Teorema 1.14. *Siano $s, s', s''\dots$ una successione di archi di cerchi limite delimitati da due rette parallele che sono assi per i cerchi limite. Assumiamo che le porzioni delle parallele delimitate da due archi consecutivi siano tutte lunghe x . Allora si ha*

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{s''} = \frac{s''}{s'''} = \dots = E^{-x}$$

Dimostrazione. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k = \frac{s}{s'} > 1$. Per semplicità dimostreremo solo il caso in cui $k \in \mathbb{Q}$. Siano n e m due naturali tali che $k = \frac{n}{m}$.

Dividiamo l'arco s in m parti uguali. Da ogni punto di divisione tracciamo delle parallele agli assi. Queste parallele dividono gli archi in m parti uguali. Sia AB la prima parte dell'arco s , $A'B'$ la prima parte dell'arco s' e così via, in maniera tale che A, A', A'', \dots siano tutti situati su uno degli assi.

Poiché per ipotesi $\frac{s}{s'} = \frac{n}{m}$, l'arco $A'B'$ è contenuto n volte in s ; quindi possiamo ricoprire s con n copie di $A'B'$. Allo stesso modo se prendiamo n copie della regione di piano delimitata dagli assi $A'A''$ e $B'B''$ e dagli archi $A'B'$ e $A''B''$, si

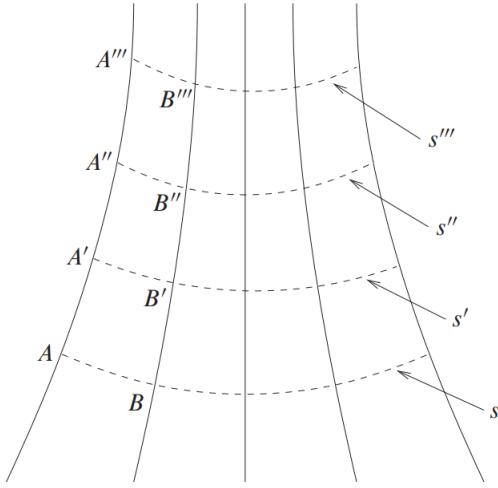


Figura 1.15

può ricoprire la porzione di piano delimitata da s e s' . Da questo si deduce che con n copie di $A''B''$ si può ricoprire s' , ovvero che

$$\frac{s'}{s''} = \frac{n}{m}.$$

Similmente si avrà $\frac{s''}{s'''} = \frac{n}{m}$ e così via.

Poiché k dipende dalla lunghezza x , si avrà che $k = f(x)$. Tale funzione $f(x)$ deve essere tale che

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Dunque deve esistere una costante $E > 1$ tale che

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{s''} = \frac{s''}{s'''} = \dots = E^{-x}.$$

□

Dati due assi di uno stesso cerchio limite AA' e BB' , sia A un vertice del cerchio limite e infine sia a la lunghezza della porzione della perpendicolare ad AA' uscente da A compresa tra AA' e BB' . Indicheremo con $L(a)$ la lunghezza dell'arco del cerchio limite AB e con $f(a)$ il segmento BB' . (Figura 1.16)

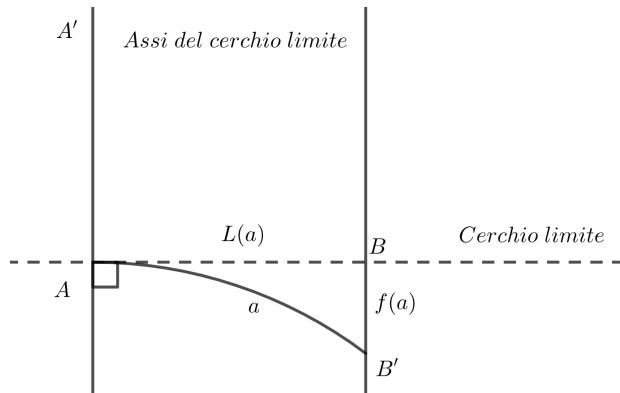


Figura 1.16

Cerchiamo le relazioni fra le parti di un triangolo rettangolo. A tale scopo, consideriamo un triangolo rettangolo di lati a , b e c e siano A , B e $\frac{\pi}{2}$ rispettivamente gli angoli opposti ai lati. Siano $\Pi(\alpha)$ e $\Pi(\beta)$ le ampiezze degli angoli in A e in B .

Tracciamo AA' perpendicolare al piano contenente il triangolo. Consideriamo il piano contenente AA' e b e il piano che passa per AA' e c . Nel secondo piano tracciamo BB' parallela ad AA' passante per B dalla parte di A' . Costruiamo un terzo piano contenente BB' e a .

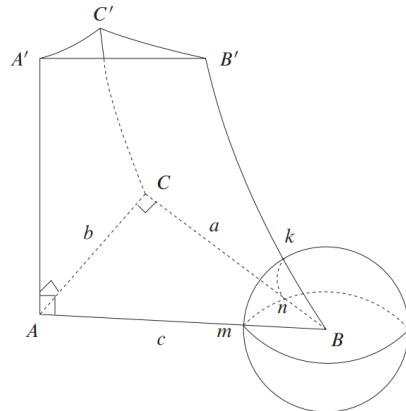


Figura 1.17

Il terzo piano incontra il primo in una retta CC' che per il teorema 1.7 sarà parallela sia ad AA' che a BB' .

Se consideriamo una sfera di centro B e avente raggio minore di a , si avrà che AB , BC e BB' individuano un triangolo sferico. Siano n , m e k i suoi vertici.

Per costruzione, a meno di riscalare le lunghezze, i lati sono lunghi $mn = \Pi(\beta)$, $km = \Pi(c)$ e $kn = \Pi(a)$. Invece gli angoli valgono $\widehat{km} = \Pi(b)$ e $\widehat{kn} = \frac{\pi}{2}$. Poiché la somma degli angoli diedrali in AA' , BB' e CC' vale π e poichè gli angoli diedrali in AA' e in CC' valgono rispettivamente $\Pi(\alpha)$ e $\frac{\pi}{2}$, si ha che $\widehat{mk}n = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$.

D'ora in avanti data una lunghezza x , indicheremo con x' la lunghezza per cui si ha la relazione

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{\pi}{2}$$

Con questa notazione si ha che $\widehat{mk}n = \Pi(\alpha')$.

Consideriamo ora un altro triangolo rettangolo di cateti α' e a e ipotenusa g . Sia $\Pi(\lambda)$ l'angolo opposto ad a , $\Pi(\mu)$ quello opposto a α' . Ripetendo la stessa costruzione fatta con il triangolo di lati a , b e c , siamo in grado di passare dal triangolo di lati a , α' e g ad un triangolo sferico di lati $\Pi(\mu)$, $\Pi(g)$ e $\Pi(a)$ e i cui angoli opposti ai lati sono rispettivamente $\Pi(\lambda')$, $\Pi(\alpha')$ e $\frac{\pi}{2}$.

Mentre il primo triangolo sferico kmn aveva lati

$$\Pi(c), \quad \Pi(\beta) \quad e \quad \Pi(a)$$

e angoli opposti

$$\Pi(b), \quad \Pi(\alpha') \quad e \quad \frac{\pi}{2},$$

il secondo triangolo sferico ha lati

$$\Pi(\mu), \quad \Pi(g) \quad e \quad \Pi(a)$$

e angoli opposti

$$\Pi(\lambda'), \quad \Pi(\alpha') \quad e \quad \frac{\pi}{2}$$

Poiché entrambi sono rettangoli, hanno la stessa ipotenusa e condividono un angolo adiacente ad essa, sono congruenti fra loro e quindi si ha

$$\mu = c \quad g = \beta \quad b = \lambda'$$

Dunque, l'esistenza di un triangolo rettangolo di lati a , b e c e angoli opposti $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ e $\frac{\pi}{2}$ implica l'esistenza di un altro triangolo rettangolo di lati a , α'

e β e angoli opposti $\Pi(b)'$, $\Pi(c)$ e $\frac{\pi}{2}$. Possiamo dunque passare da un triangolo rettangolo descritto dagli elementi

$$a, b, c, \alpha, \beta$$

a un triangolo che ha come elementi

$$a, \alpha', \beta, b', c.$$

Torniamo ora al triangolo rettangolo $A\widehat{B}C$ su cui abbiamo costruito le tre parallele AA' , BB' e CC' . Usiamo AA' come asse per costruire la sfera limite passante per A . Tale sfera incontrerà le rette BB' e CC' individuando un triangolo sferico limite. Sia p il lato ottenuto intersecando la sfera limite con il piano contenente a , q quello ottenuto intersecando la sfera limite con il piano che passa per b e r il restante.

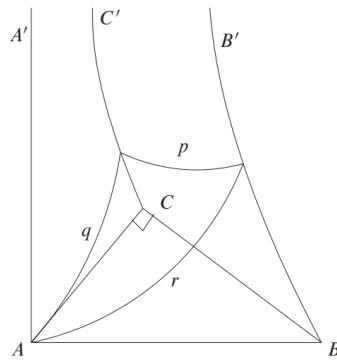


Figura 1.18

L'angolo opposto a p è $\Pi(\alpha)$ e quello opposto a r è $\frac{\pi}{2}$. Infine, si ha quindi che l'angolo opposto a q è $\Pi(\alpha')$.

Con la notazione introdotta precedentemente si ha che $q = L(b)$ e $r = L(c)$. La distanza tra C e l'intersezione della sfera limite con CC' vale $f(b)$; invece la distanza tra B e l'intersezione della sfera limite con BB' vale $f(c)$. Quest'ultima distanza si può scrivere anche come $f(a) + f(b)$. Infatti, se tracciamo la sfera limite avente CC' come asse e vertice C , essa incontrerà BB' in un punto D compreso fra B e l'intersezione di r con BB' ; si ha che $BD = f(a)$ e che la restante parte è

pari a $f(b)$. Dunque si ha

$$f(c) = f(a) + f(b)$$

Per il teorema 1.13 possiamo scrivere

$$p = r \sin \Pi(\alpha); \quad q = r \cos \Pi(\alpha)$$

Moltiplicando entrambi i membri della prima uguaglianza per $E^{f(b)}$ e notando che $pE^{f(b)} = L(a)$ si ha

$$L(a) = r \sin \Pi(\alpha) E^{f(b)}.$$

Similmente abbiamo

$$L(b) = r \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}.$$

Ma allo stesso tempo abbiamo anche che

$$L(b) = q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Comparando le due formule si ottiene

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}. \quad (1.1)$$

Poiché è lecito sostituire α con b' e β con c , otteniamo

$$\cos \Pi(b') = \sin \Pi(c) E^{f(a)}$$

o equivalentemente, poiché $\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2}$,

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) E^{f(a)}.$$

Similmente si ha

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(c) E^{f(b)};$$

da cui si ottiene

$$\sin \Pi(a) E^{f(a)} = \sin \Pi(c) E^{f(c)}.$$

Poiché in un triangolo rettangolo di ipotenusa c , il cateto a può essere arbitra-

riamente piccolo, notando che $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 0$ e $\lim_{a \rightarrow 0} \Pi(a) = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$1 = \sin \Pi(c) E^{f(c)}$$

Sostituendo $E^{f(a)}$ con $\frac{1}{\sin \Pi(a)}$ nell'equazione 1.1, si ottiene

$$\cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(\beta). \quad (1.2)$$

Sostituendo α e β con b' e c , si ha

$$\sin \Pi(b) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(c). \quad (1.3)$$

Similmente all'equazione 1.2, si ha anche

$$\cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(\alpha).$$

Sostituendo in quest'ultima equazione β , b e α con c , α' e b'

$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(b). \quad (1.4)$$

Dunque, in un triangolo rettangolo di lati a , b e c e angoli opposti rispettivamente A , B e $\frac{\pi}{2}$, mettendo insieme le equazioni 1.2, 1.3 e 1.4, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sin \Pi(a) \cos A = \sin B \\ \cos \Pi(c) \cos A = \cos \Pi(b) \\ \sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) \end{cases} \quad (1.5)$$

Permutando le lettere nelle prime due equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \sin \Pi(b) \cos B = \sin A \\ \cos \Pi(c) \cos B = \cos \Pi(a) \end{cases}$$

Combinando queste due si ha

$$\sin \Pi(b) \cos \Pi(a) = \sin A \cos \Pi(c)$$

e sostituendo $\sin \Pi(b)$ grazie alla terza equazione delle 1.5,

$$\tan \Pi(c) = \sin A \tan \Pi(a). \quad (1.6)$$

Cerchiamo ora un'espressione analitica per la funzione $\Pi(x)$. Prendiamo di nuovo un triangolo rettangolo i cui lati sono a , b e c e i cui angoli opposti sono $\Pi(a)$, $\Pi(b)$ e $\frac{\pi}{2}$. Prolunghiamo il lato c oltre l'angolo di ampiezza $\Pi(\beta)$ e sia tale prolungamento lungo β .

La perpendicolare a β passante per il suo estremo libero sarà parallelo al prolungamento di a dalla parte di $\Pi(\beta)$. Tracciamo inoltre la parallela al prolungamento di a passante per il vertice dell'angolo di ampiezza $\Pi(\alpha)$.

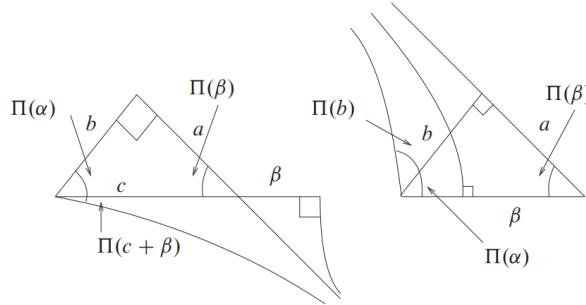


Figura 1.19

L'angolo che forma quest'ultima linea con c sarà $\Pi(c + \beta)$; mentre quello che forma con b sarà $\Pi(b)$. Quindi abbiamo

$$\Pi(b) = \Pi(c + \beta) + \Pi(\alpha). \quad (1.7)$$

Prendiamo ora un segmento lungo β in maniera che esso giaccia su c e che abbia il vertice dell'angolo $\Pi(\beta)$ come estremo in comune. Tracciamo a partire dall'altra estremità di β la perpendicolare a c dalla parte di piano contenente $\Pi(\beta)$; per costruzione questa perpendicolare sarà parallela al prolungamento di a . Tracciamo ora una linea uscente da $\Pi(\alpha)$ parallela alla perpendicolare.

Se $\beta < c$, l'angolo fra quest'ultima parallela e c sarà $\Pi(c - \beta)$ e l'angolo con b sarà $\Pi(b)$. Quindi si ha

$$\Pi(b) = \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha). \quad (1.8)$$

Questa relazione resta vera nel caso $\beta \geq c$. Se $\beta = c$ abbiamo che $\Pi(c - \beta) = \frac{\pi}{2}$ e che la parallela ad a passante per $\Pi(\alpha)$ coincide con la perpendicolare. Se $\beta > c$ si ha che il secondo estremo di β giace al di là di $\Pi(\alpha)$ ad una distanza da esso pari a $\beta - c$. Si ha quindi $\Pi(\beta - c) + \Pi(b) + \Pi(\alpha) = \pi$ perché questi tre angoli formano un angolo piatto. Ovvero

$$\Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha)$$

che, per definizione di Π per i valori negativi, diventa

$$\Pi(b) = \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha).$$

Dalle equazioni 1.7 e 1.8 si deduce

$$\Pi(b) = \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c - \beta)$$

$$\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta).$$

Sfruttando l'equazione 1.4 si ottiene

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)}$$

da cui

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \left(\frac{1}{2}\Pi(c + \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c - \beta) \right)}{\cos \left(\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \right)}.$$

Ovvero

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \cos \frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \sin \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \sin \frac{1}{2}\Pi(c - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \cos \frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \sin \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \sin \frac{1}{2}\Pi(c - \beta)}$$

$$\cos \Pi(c) = \frac{1 - \tan \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \tan \frac{1}{2}\Pi(c - \beta)}{1 + \tan \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \tan \frac{1}{2}\Pi(c - \beta)}.$$

Quindi si può dedurre dalla formula parametrica del coseno che

$$\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \tan \frac{1}{2}\Pi(c - \beta).$$

Proposizione 1.15. *Per ogni numero naturale n e per ogni numero reale x , vale la relazione*

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(nx) = \tan^n \frac{1}{2}\Pi(x)$$

Dimostrazione. Sfruttiamo l'uguaglianza

$$\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \tan \frac{1}{2}\Pi(c - \beta).$$

Poiché c e β possono variare in maniera indipendente possiamo porre $\beta = x$ e lavorare per induzione ponendo $c = nx$.

Per $n = 1$ abbiamo la tesi ricordando che $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$:

$$\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(x) = \tan \frac{1}{2}\Pi(2x)$$

. Per $n > 1$, possiamo riscrivere l'uguaglianza nel seguente modo:

$$\tan \frac{1}{2}\Pi((n+1)x) = \frac{\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(nx)}{\tan \frac{1}{2}\Pi((n-1)x)}$$

e sfruttando l'ipotesi induttiva sia al numeratore che al denominatore del secondo membro, si ha la tesi. \square

Questa uguaglianza si estende a tutti gli interi ricordando la definizione di Π per i numeri negativi ed a tutti i razionali. Dunque, per continuità, questa relazione varrà anche per ogni numero reale.

Allora, posta l'unità di misura delle lunghezze in maniera che

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(1) = e^{-1},$$

si ha che in generale

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}. \tag{1.9}$$

Ovvero

$$\Pi(x) = 2 \arctan(e^{-x}).$$

Questa espressione concorda con il fatto che $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, che $\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) = 0$ e con la definizione Π per “lunghezze negative”.

Dall’equazione 1.9 si possono dedurre altre tre identità che saranno utili per confrontare i risultati di Lobačevskij con quelli ottenuti da Battaglini: sfruttando le formule parametriche del seno e del coseno si ha

$$\sin \Pi(x) = \frac{1}{\cosh x} \quad \cos \Pi(x) = \tanh x \quad \tan \Pi(x) = \frac{1}{\sinh x}. \quad (1.10)$$

Con queste relazioni si vede facilmente che le formule 1.5 si riducono alle usuali formule della geometria euclidea per triangoli di lati infinitamente piccoli.

Cerchiamo ora le relazioni fra le parti di un triangolo qualsiasi. Siano a , b e c i lati e siano rispettivamente A , B e C gli angoli opposti ai lati. Tracciamo p l’altezza relativa al lato c . Per semplicità supponiamo che p cada all’interno di c .

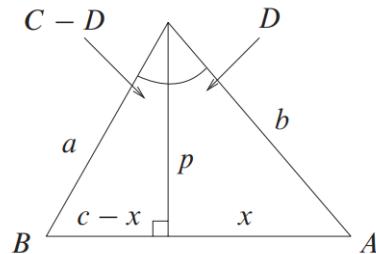


Figura 1.20

Sia quindi c diviso in due segmenti lunghi x e $c - x$ e sia D l’angolo opposto a x nel triangolo di lati b , x e p ; allora l’angolo opposto a $c - x$ sarà $C - D$.

Applicando l’equazione 1.6 si ha

$$\tan \Pi(b) = \sin A \tan \Pi(p)$$

$$\tan \Pi(A) = \sin B \tan \Pi(p)$$

da cui si ottiene la relazione

$$\sin A \tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(b). \quad (1.11)$$

Applicando le equazioni 1.5 al triangolo bpx si ha

$$\cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(x),$$

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(p) = \sin \Pi(b).$$

Similmente considerando l'altro triangolo rettangolo

$$\sin \Pi(c - x) \sin \Pi(p) = \sin \Pi(a).$$

Poiché vale la relazione

$$\sin \Pi(c - x) = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)},$$

si ha

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}.$$

Sostituendo i valori di $\sin \Pi(x)$ e $\cos \Pi(x)$ si ottiene

$$1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}. \quad (1.12)$$

Si può provare che quest'ultima equazione continua a valere anche se l'altezza p cade sul prolungamento di c .

Similmente si ha

$$1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(b)}.$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa relazione con i corrispettivi membri

della 1.12 otteniamo

$$\begin{aligned} 1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B \\ + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B = \sin^2 \Pi(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \Pi(c) - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A - \cos \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos B \\ + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B = 0. \end{aligned}$$

Eliminando il fattore comune $\cos \Pi(c)$

$$\begin{aligned} \cos \Pi(c) - \cos \Pi(b) \cos A - \cos \Pi(a) \cos B \\ + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \cos B = 0. \end{aligned}$$

Analogamente si ha anche

$$\begin{aligned} \cos \Pi(a) - \cos \Pi(b) \cos C - \cos \Pi(c) \cos B \\ + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos C \cos B = 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando l'ultima equazione per $\cos A$, la penultima per $\cos C$ e sottraendo i risultati si ottiene

$$\cos \Pi(a) \cos A - \cos \Pi(c) \cos A \cos B = \cos \Pi(c) \cos C - \cos \Pi(a) \cos B \cos C,$$

$$\begin{aligned} \cos \Pi(a) (\cos A + \cos B \cos C) &= \cos \Pi(c) (\cos C + \cos A \cos B) \\ \frac{\cos^2 \Pi(a)}{\cos^2 \Pi(c)} &= \frac{(\cos C + \cos A \cos B)^2}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'equazione 1.11 può essere riscritta in

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \Pi(c)}{\cos^2 \Pi(c)} &= \frac{\sin^2 A \tan^2 \Pi(a)}{\sin^2 C} \\ \frac{1}{\cos^2 \Pi(c)} &= 1 + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \tan^2 \Pi(a). \end{aligned}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione 1.13 si ha

$$\cos^2 \Pi(a) + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \sin^2 \Pi(a) = \frac{(\cos C + \cos A \cos B)^2}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}$$

$$1 - \sin^2 \Pi(a) + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \sin^2 \Pi(a) = \frac{\cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A \cos^2 B}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}$$

$$+ \frac{\cos^2 A + \cos^2 B \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B \cos^2 C}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}$$

$$1 - \sin^2 \Pi(a) + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \sin^2 \Pi(a) = 1 - \frac{\cos^2 C + \cos^2 A \cos^2 B - \cos^2 A - \cos^2 B \cos^2 C}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}$$

$$\sin^2 \Pi(a) \left(1 - \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \right) = \frac{\sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}.$$

Dividendo per $\sin^2 C - \sin^2 A$ ed estraendo la radice quadrata si arriva a

$$\sin \Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}$$

senza ambiguità di segno. Infatti, si ha che $\Pi(a) < \frac{\pi}{2}$, $B, C < \pi$ e quindi $\sin B \sin C > 0$. In più,

$$\cos A + \cos(B + C) = 2 \cos \frac{1}{2}(B + C + A) \cos \frac{1}{2}(B + C - A)$$

è una quantità positiva perché $A + B + C < \pi$. Aggiungendo e togliendo la quantità $\sin B \sin C$ si vede che $\cos A + \cos B \cos C > 0$.

Quindi in ogni triangolo vale la relazione

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. \quad (1.14)$$

Cambiando le lettere all'equazione 1.12 si ottiene

$$1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(c)}. \quad (1.15)$$

Moltiplicando membro a membro questa equazione con la 1.12,

$$(1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C) (1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A) = \sin^2 \Pi(b)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \Pi(b) - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \\ + \cos \Pi(a) \cos^2 \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \cos C = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \Pi(b) - \cos \Pi(a) \cos C - \cos \Pi(c) \cos A \\ + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \cos C = 0. \quad (1.16) \end{aligned}$$

Dall'equazione 1.11 si ricava che

$$\cos \Pi(c) = \frac{\sin \Pi(c) \sin C}{\sin A \tan A}.$$

Sostituendo il valore di $\sin \Pi(c)$ ottenuto da quest'ultima relazione nell'equazione 1.15, si ottiene

$$\cos \Pi(c) = \frac{\sin \Pi(b) \cos(a) \sin C}{(1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C) \sin A}.$$

Infine, sostituendo questo valore di $\cos \Pi(c)$ nell'equazione 1.16 otteniamo

$$\frac{\sin C \sin \Pi(b)}{\tan A} + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}. \quad (1.17)$$

Mettendo insieme le equazioni 1.11, 1.12, 1.14 e 1.17, otteniamo le relazioni fra le componenti di un triangolo qualsiasi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin A \tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(b) \\ 1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} \\ \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} \\ \frac{\sin C \sin \Pi(b)}{\tan A} + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Sfruttando $\tan \Pi(a) = \frac{1}{\sinh a}$, la prima equazione delle 1.18 diventa

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B}.$$

Tale formula oggi è conosciuta come teorema dei seni per i triangoli iperbolicici.

Sfruttando l'equazione 1.6 si può calcolare la lunghezza di una circonferenza di raggio r .

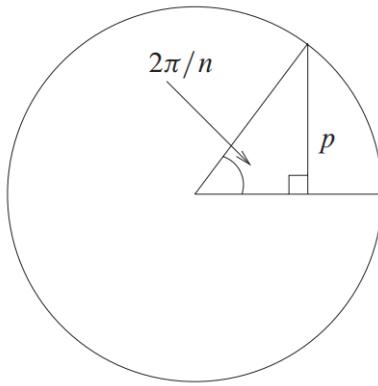


Figura 1.21

Tracciamo due raggi in maniera che l'angolo compreso sia $\frac{2\pi}{n}$. Da un estremo di uno di essi tracciamo p la perpendicolare all'altro raggio. Si ha che, facendo tendere n a infinito, il prodotto np tenderà alla lunghezza della circonferenza poiché p tenderà all' n -esima porzione di circonferenza.

Dall'equazione 1.6, abbiamo

$$\sin \frac{2\pi}{n} \tan \Pi(p) = \tan \Pi(r).$$

Poiché

$$\frac{1}{n} \tan \Pi(p) = \frac{2}{n(e^p - e^{-p})}$$

e per $n \rightarrow \infty$, ($p \rightarrow 0$)

$$n \sin \frac{2\pi}{n} \sim 2\pi \quad n(e^p - e^{-p}) \sim 2np$$

si ha che

$$\frac{2\pi}{np} \sim \sin \frac{2\pi}{n} \tan \Pi(p) = \tan \Pi(r).$$

Allora si ha

$$\text{Circ } r = \lim_{n \rightarrow \infty} np = \frac{2\pi}{\tan \Pi(r)} = (e^r - e^{-r}) \pi$$

Anche in questo caso si ha che per cerchi infinitamente piccoli si riottengono le formule della geometria euclidea, infatti $e^r - e^{-r} \sim 2r$ per $r \rightarrow 0$. Notiamo anche che

$$\text{Circ } r = (e^r - e^{-r}) \pi > 2r\pi.$$

Quindi la lunghezza di una circonferenza iperbolica di raggio $r > 0$ è sempre più grande della lunghezza di una circonferenza euclidea di raggio r .

Capitolo 2

L'articolo di Battaglini sulla geometria iperbolica

Giuseppe Battaglini fu un matematico italiano del XIX secolo. Nel 1863 fondò il “Giornale di matematica ad uso degli studenti delle Università italiane” di cui fu redattore fino alla morte. Fu colpito dalla traduzione in francese di Pangeometria di Lobačevskij, tanto che nel quinto volume del suo giornale, pubblicato nel 1867, compare una traduzione in italiano fatta dallo stesso Battaglini dell’opera del matematico russo, insieme a un articolo[1] in cui Battaglini tenta di arrivare alle stesse relazioni fra le parti di un triangolo che ottenne Lobačevskij.

Esporremo questo articolo integrando alcuni passaggi dove necessario.

Introduciamo per prima cosa quattro funzioni che chiameremo seno e coseno ciclico e seno e coseno iperbolico.

Immaginiamo di far ruotare una retta Ω attorno a un suo punto p . Sia z la “quantità di rotazione”, Ω_0 la sua posizione iniziale e Ω_z quella attuale. Sia $F(z)$ la funzione che la rotazione di quantità z che porta Ω_0 in Ω_z , si può quindi scrivere che

$$\Omega_z = \Omega_0 F(z). \quad (2.1)$$

Allora

$$\Omega_x = \Omega_0 F(x) \quad \Omega_y = \Omega_0 F(y)$$

$$\Omega_z = \Omega_x F(z - x) = \Omega_y F(z - y)$$

e quindi

$$F(x)F(z-x) = F(y)F(z-y).$$

Ponendo $x = 0$ e osservando che $F(0) = 1$ (infatti una rotazione nulla corrisponde all'identità),

$$F(z) = F(y)F(z-y)$$

o equivalentemente,

$$F(x+y) = F(x)F(y).$$

Sia h una costante, allora si deve avere che

$$F(z) = e^{hz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} h^n z^n = 1 + hz + \frac{h^2 z^2}{2!} + \frac{h^3 z^3}{3!} + \dots$$

Poiché ruotando Ω ritorna nella sua posizione iniziale, la funzione F deve essere periodica. Volendo avere la costante all'interno della definizione di F reale, poniamo¹ $F(z) = e^{ikz}$.

Chiamiamo seno e coseno ciclici nella base k le funzioni

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} k^{2n+1} z^{2n+1} = kz - \frac{k^3 z^3}{3!} + \frac{k^5 z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} k^{2n} z^{2n} = 1 - \frac{k^2 z^2}{2!} + \frac{k^4 z^4}{4!} - \dots$$

e tangente ciclica la funzione $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Allora si avrà

$$F(z) = \cos(z) + i \sin(z).$$

Con queste definizioni valgono le usuali formule del seno e del coseno.

Sia 2π il valore di kz tale che

$$e^{2i\pi} = 1.$$

Allora $\frac{2\pi}{k}$ sarà il periodo di F . Possiamo dunque prendere l'unità di rotazione

¹Semplicemente abbiamo posto $k = \frac{h}{i}$

di Ω attorno a p in maniera che dopo aver ruotato di una quantità 2π , essa sia tornata nella posizione iniziale. Sotto queste condizioni si ha che $k = 1$ e che z nelle formule precedenti rappresenta l'angolo compreso tra Ω_0 e Ω_z .

Immaginiamo ora di far traslare un punto su una retta. Sia z la “quantità di progressione”, ω_0 la sua posizione iniziale e ω_z quella attuale. Sia $\tilde{F}(z)$ la funzione che descrive la posizione del punto in maniera che

$$\omega_z = \omega_0 \tilde{F}(z). \quad (2.2)$$

Si ritrova

$$\tilde{F}(z) = e^{kz} = \cosh(z) + \sinh(z)$$

dove

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} k^{2n} z^{2n} = 1 + \frac{k^2 z^2}{2!} + \frac{k^4 z^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} k^{2n+1} z^{2n+1} = kz + \frac{k^3 z^3}{3!} + \frac{k^5 z^5}{5!} + \dots$$

che chiameremo seno e coseno iperbolico. Similmente chiameremo tangente iperbolica la funzione $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$. In queste formule z è la misura del segmento di estremi ω_0 e ω_z rispetto ad un segmento arbitrario preso come unità; a meno di cambiare unità di misura delle lunghezze possiamo supporre $k = 1$.

Dopo questa premessa, prendiamo una retta L e un punto p non appartenente a L . Siano m e n due punti fissati di L . Sia infine ω un punto qualsiasi di L .

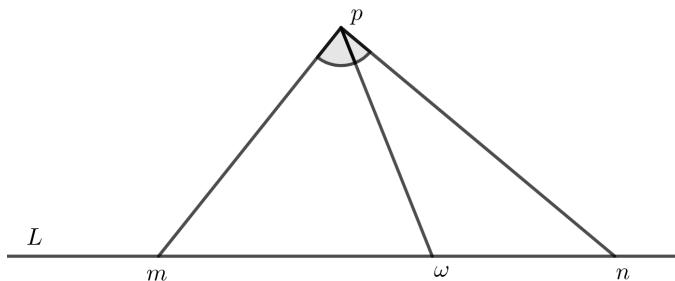


Figura 2.1

Allora si ha che la grandezza

$$\frac{\sinh(\overline{m\omega})}{\sinh(\overline{\omega n})} \frac{\sin(\widehat{\omega pn})}{\sin(\widehat{mp\omega})}$$

è costante al variare di ω in L . Quindi deve esistere una costante λ tale che²

$$\frac{\sinh(\overline{m\omega})}{\sinh(\overline{\omega n})} = \lambda \frac{\sin(\widehat{mp\omega})}{\sin(\widehat{\omega pn})}. \quad (2.3)$$

Se prendiamo m e n equidistanti da p , si ha che $\lambda = 1$. Tracciamo la perpendicolare a L passante per p e sia o l'intersezione fra la perpendicolare e L . Chiamiamo $\theta = \omega o$ e $\Theta = \widehat{op\omega}$.

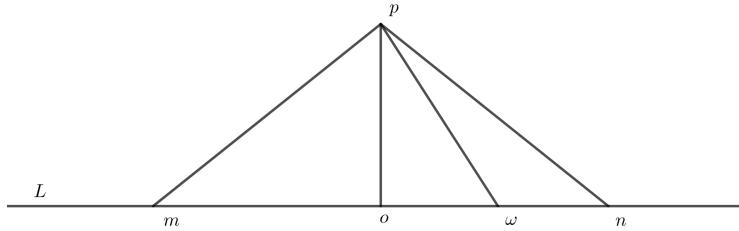


Figura 2.2

Dall'equazione 2.3 si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\frac{1}{2}\overline{mn} + \theta)}{\sinh(\frac{1}{2}\overline{mn} - \theta)} &= \frac{\sin(\frac{1}{2}\widehat{mpn} + \Theta)}{\sin(\frac{1}{2}\widehat{mpn} - \Theta)} \\ \frac{\sinh \frac{1}{2}\overline{mn} \cosh \theta + \cosh \frac{1}{2}\overline{mn} \sinh \theta}{\sinh \frac{1}{2}\overline{mn} \cosh \theta - \cosh \frac{1}{2}\overline{mn} \sinh \theta} &= \frac{\sin \frac{1}{2}\widehat{mpn} \cos \Theta + \cos \frac{1}{2}\widehat{mpn} \sin \Theta}{\sin \frac{1}{2}\widehat{mpn} \cos \Theta - \cos \frac{1}{2}\widehat{mpn} \sin \Theta} \end{aligned}$$

²Battaglini afferma ciò senza alcuna spiegazione. Comunque, questa relazione risulta essere vera in geometria iperbolica. Infatti sfruttando il teorema del seno già dimostrato da Lobachevskij, si ha che

$$\frac{\sinh(\overline{m\omega})}{\sin(\widehat{mp\omega})} = \frac{\sinh(\overline{mp})}{\sin(\widehat{m\omega p})} \quad \frac{\sinh(\overline{\omega n})}{\sin(\widehat{\omega pn})} = \frac{\sinh(\overline{np})}{\sin(\widehat{p\omega n})}$$

e che quindi la relazione risulta verificata prendendo

$$\lambda = \frac{\sinh(\overline{mp})}{\sinh(\overline{np})}.$$

Nonostante ciò, Battaglini pone l'equazione 2.3 alla base del suo articolo.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tanh \theta \coth \frac{1}{2} \overline{mn}}{1 - \tanh \theta \coth \frac{1}{2} \overline{mn}} &= \frac{1 + \tan \Theta \cot \frac{1}{2} \widehat{mpn}}{1 - \tan \Theta \cot \frac{1}{2} \widehat{mpn}} \\ \tanh \theta \coth \frac{1}{2} \overline{mn} &= \tan \Theta \cot \frac{1}{2} \widehat{mpn} \\ \frac{\tanh \theta}{\tan \Theta} &= \frac{\tanh \frac{1}{2} \overline{mn}}{\tan \frac{1}{2} \widehat{mpn}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Portando ω a distanza infinita da o si ha che

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \tanh \theta = 1$$

e posto

$$\Delta = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \Theta,$$

si ottiene

$$\tan \Delta = \frac{\tan \frac{1}{2} \widehat{mpn}}{\tanh \frac{1}{2} \overline{mn}}. \quad (2.5)$$

Con Δ indichiamo quello che Lobačevskij chiama nei suoi lavori angolo di parallellismo. Se $\Delta < \frac{\pi}{2}$, risulta evidente che da p fuoriescono due rette distinte che sono parallele a L .

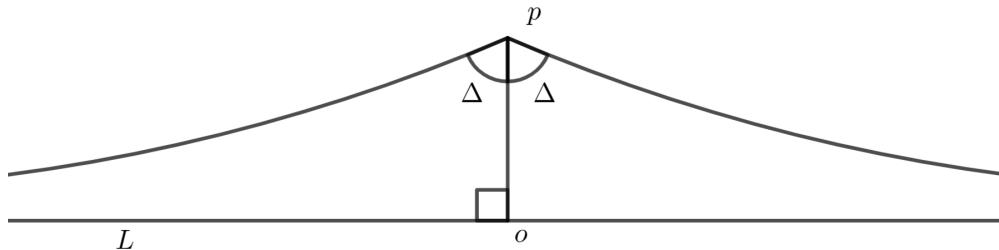


Figura 2.3

Combinando le equazioni 2.4 e 2.5 si ha

$$\tanh \theta = \frac{\tan \Theta}{\tan \Delta}. \quad (2.6)$$

Dunque ci sono tre casi: $|\tanh \theta| < 1$ se $|\Theta| < \Delta$, $|\tanh \theta| = 1$ se $|\Theta| = \Delta$ e infine $|\tanh \theta| > 1$ se $|\Theta| > \Delta$.

Quindi, le rette uscenti da p incontreranno L ad una distanza reale da o data dalla formula

$$\theta = \frac{1}{2} \log \frac{\tan \Delta + \tan \Theta}{\tan \Delta - \tan \Theta}$$

se sono contenute nell'angolo di ampiezza 2Δ ; ad una distanza infinita se l'angolo compreso fra esse e \overline{op} è Δ ; altrimenti ad una “distanza ideale” data dalla formula

$$\theta = \frac{1}{2} \log \frac{\tan \Theta + \tan \Delta}{\tan \Theta - \tan \Delta} + i \frac{\pi}{2}.$$

In un certo senso si potrebbe dire che le rette parallele a L passanti per p sono quelle che incontrano L nei punti all'infinito, mentre quelle che la incontrano nei punti ideali, si possono vedere come le rette che incontrano L “al di là dell'infinito”³.

Consideriamo ora una retta L e la sua perpendicolare M passante per o . Osserviamo che se prendiamo una retta N perpendicolare a M si ha che

$$\frac{\tan \Theta}{\tan \Delta} = \infty$$

e che quindi N e L si incontrano ad una “distanza da o ” pari a

$$\theta = i \frac{\pi}{2}.$$

Se invece prendiamo una retta N intersecante M in maniera che $1 < \frac{\tan \Theta}{\tan \Delta} < \infty$, allora N incontrerà L in un punto ideale che dista da o

$$\theta = \frac{1}{2} \log \frac{\tan \Theta + \tan \Delta}{\tan \Theta - \tan \Delta} + i \frac{\pi}{2}.$$

Allora se tracciamo M' la perpendicolare a L passante per il punto che dista da o

$$\theta = \frac{1}{2} \log \frac{\tan \Theta + \tan \Delta}{\tan \Theta - \tan \Delta},$$

si avrà che M' sarà anche perpendicolare a N .

In altre parole, date due rette L e N ne’ parallele ne’ intersecanti, esiste ed è

³Battaglini si immagina che due rette ne’ intersecanti, ne’ parallele, si incontrano in punti al di fuori del piano che indica con l'espressione di punti al di là dell'infinito. Le virgolette a tale espressione non erano presenti nell'articolo di Battaglini, ma sono state aggiunte.

unica la retta M' perpendicolare ad entrambe.

Se facciamo tendere k a 0, si ritrova la geometria euclidea. Infatti, l'equazione 2.4 si riduce a

$$\frac{\theta}{\tan \Theta} = \frac{\frac{1}{2}\overline{mn}}{\tan \frac{1}{2}\widehat{mpn}}. \quad (2.7)$$

Da ciò si deduce che, nel caso limite $k \rightarrow 0$, l'angolo di parallelismo Δ è sempre retto: mandando θ a più infinito, Θ deve tendere a $\frac{\pi}{2}$ per mantenere il rapporto costante.

Comunque nell'equazione 2.5 viene evidenziata la differenza tra la geometria euclidea e quella iperbolica già nota a Lobačevskij: mentre nella prima, ogni retta possiede un solo punto all'infinito e per ogni punto non in essa passano due rette parallele coincidenti; nella seconda, ogni retta possiede una coppia di punti all'infinito distinti e per ogni punto passano due rette distinte che sono parallele alla retta data.

L'equazione 2.5 evidenzia anche che nel caso di geometria iperbolica, l'angolo Δ dipende dalla distanza δ del punto p dalla retta L . Mentre nel capitolo dedicato a Lobačevskij scrivevamo tale dipendenza attraverso la funzione Π ; ora la descriviamo con un'altra funzione incognita Φ ponendo $\cot \Delta = \Phi(\delta)$.

Cerchiamo di riottenere le relazioni fra le parti di un triangolo. Consideriamo, per iniziare, un triangolo $A\widehat{B}C$ rettangolo in C . Siano a e b i cateti rispettivamente opposti agli angoli A e B e sia c l'ipotenusa. Utilizzando la funzione Φ appena introdotta, la relazione 2.6 diventa

$$\tanh a = \Phi(b) \tan A \quad \tanh b = \Phi(a) \tan B, \quad (2.8)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{\tanh a}{\sqrt{\tanh^2 a + \Phi^2(b)}} = \frac{\sinh a}{\sqrt{\sinh^2 a + (1 + \sinh^2 a) \Phi^2(b)}} \\ \sin B &= \frac{\tanh b}{\sqrt{\tanh^2 b + \Phi^2(a)}} = \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + (1 + \sinh^2 b) \Phi^2(a)}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Poiché per $\sin A = 0$ si deve avere $a = 0$ e per $\sin A = 1$ si deve avere $a = c$

(similmente per $\sin B$), $\sin A$ e $\sin B$ dovranno avere le seguenti espressioni:

$$\sin A = \frac{f(a)}{f(c)} \quad \sin B = \frac{f(b)}{f(c)}. \quad (2.10)$$

Inoltre, dovendo essere il lato c funzione simmetrica rispetto a a e b , si deve avere sfruttando la prima espressione delle 2.9

$$f(a) = \Phi(a) = \tanh(a) \quad f(b) = \Phi(b) = \tanh(b), \quad (2.11)$$

oppure sfruttando la seconda espressione

$$f(a) = \Phi(a) = \sinh(a) \quad f(b) = \Phi(b) = \sinh(b). \quad (2.12)$$

Le equazioni 2.11 conducono alla geometria euclidea. Infatti mettendo insieme le equazioni 2.8 e 2.11 si ottiene

$$\sin A = \frac{\tanh a}{\tanh c} = \cos B \quad \sin B = \frac{\tanh B}{\tanh C} = \cos A,$$

ovvero la somma degli angoli interni di un triangolo rettangolo è pari a π .

Invece, sostituendo le equazioni 2.12 nelle 2.10 e nelle 2.9 si ottiene

$$\sinh a = \sinh c \sin A \quad \sinh b = \sinh c \sin B \quad (2.13)$$

$$\tanh a = \sinh b \tan A \quad \tanh b = \sinh a \tan B \quad (2.14)$$

Dalla 2.10 si ha anche $\sinh^2 c = \sinh^2 a + \sinh^2 b$, aggiungendo ora 1 sia a destra che a sinistra dell'uguale si ottiene

$$\cosh c = \cosh a \cosh b. \quad (2.15)$$

Sfruttando l'uguaglianza $\sqrt{\tanh^2 a + \sinh^2 b} = \frac{\sinh c}{\cosh a}$ si ha

$$\cos A = \frac{\sinh b}{\sqrt{\tanh^2 a + \sinh^2 b}} = \frac{\sinh b \cosh a}{\sinh c},$$

ovvero

$$\cos A = \sin B \cosh a \quad \cos B = \sin A \cosh b. \quad (2.16)$$

Sostituendo questi valori nell'equazione 2.15 si ha anche

$$\cosh c = \cot A \cot B.$$

Infine, usando 2.13 si ha $\sinh c = \frac{\sinh a}{\sin A}$. Dividendo membro a membro questa equazione con la 2.15, otteniamo

$$\tanh c = \frac{\sinh a}{\sin A \cosh a \cosh b} = \frac{\tanh a}{\sin A \cosh b} = \frac{\tanh a}{\cos B},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la 2.16. Questa relazione si può quindi riscrivere così:

$$\tanh a = \tanh c \cos B. \quad (2.17)$$

Raggruppando le equazioni 2.13, 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17, troviamo le seguenti relazioni fra le parti di un triangolo rettangolo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh a = \sinh c \sin A \\ \tanh a = \tanh c \cos B \\ \cosh c = \cosh a \cosh b = \cot A \cot B \\ \cos A = \sin B \cosh a \\ \tanh a = \sinh b \tan A \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Sebbene in forma diversa, queste relazioni sono le stesse che trovò Lobačevskij. Infatti, sfruttando le equazioni 1.10, si può vedere che le 2.18 corrispondono alle 1.5 e alla 1.6.

Si ritrova anche la relazione fra l'angolo di parallelismo Δ e la distanza δ di un punto p da una retta L : sfruttando l'equazione 2.14 si ottiene

$$\tan \Delta = \frac{1}{\sinh \delta}.$$

Consideriamo ora un triangolo qualsiasi di lati a, b e c e di angoli opposti ai

lati rispettivamente A , B e C . Tracciamo h l'altezza relativa al lato c , che divide l'angolo C in C_A e C_B . Siano, infine, c_a e c_b le proiezioni di a e b su c . Allora dalle

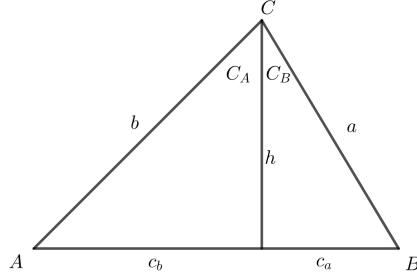


Figura 2.4

2.18 si ricava

$$\sin A \sinh b = \sin B \sinh a$$

$$\tan C_A = \frac{\cot A}{\cosh b} \quad \tan C_B = \frac{\cot B}{\cosh a}$$

$$\tanh c_a = \tanh b \cos A \quad \tanh c_b = \tanh a \cos B$$

$$\tan C = \tan(C_A + C_B) = \frac{\tan C_A + \tan C_B}{1 - \tan C_A \tan C_B} = \frac{\tan A \cosh b + \tan B \cosh a}{\tan A \tan B \cosh a \cosh b - 1}$$

$$\tanh c = \tanh(c_a + c_b) = \frac{\tanh c_a + \tanh c_b}{1 + \tanh c_a \tanh c_b} = \frac{\tanh a \cos B + \tanh b \cos A}{1 + \tanh a \tanh b \cos A \cos B}$$

dalle quali si ottiene

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B}$$

$$\frac{\tan A}{\cosh a} + \frac{\tan B}{\cosh b} + \frac{\tan C}{\cosh a \cosh b} - \tan A \tan B \tan C = 0$$

$$\frac{\tanh a}{\cos A} + \frac{\tanh b}{\cos B} - \frac{\tanh c}{\cos A \cos B} - \tanh A \tanh B \tanh C = 0$$

Da queste ultime equazioni e dalle loro analoghe, si può ottenere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sinh^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\sinh^2 b}{\sin^2 B} = \frac{\sinh^2 C}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C - 1}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \\ \frac{\sin^2 A}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sinh^2 c} = \frac{1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \\ \cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A \\ \cos A = \sin B \sin C \cosh a - \cos B \cos C \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Anche in questo caso, sfruttando le equazioni 1.10, si vede l'equivalenza fra le 2.19 e le 1.18.

Se ora tracciamo le perpendicolari ai lati a , b e c passanti per i punti medi, esse si incontreranno in un punto a distanza finita, infinita o ideale. Tale punto sarà equidistante dai vertici A , B e C . Chiamando r tale distanza, si avrà che la circonferenza di centro il punto di incontro delle perpendicolari e raggio r , sarà circoscritta al triangolo. Siano α , β e γ gli angoli al centro opposti rispettivamente ad a , b e c . Dalle equazioni 2.18 si ricava

$$\frac{\sinh \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sinh \frac{1}{2}b}{\sin \frac{1}{2}\beta} = \frac{\sinh \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \sinh r.$$

Poiché $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \pi$, ponendo

$$\begin{aligned} \Pi = & \left(\sinh \frac{1}{2}a + \sinh \frac{1}{2}b + \sinh \frac{1}{2}c \right) \left(\sinh \frac{1}{2}a + \sinh \frac{1}{2}b - \sinh \frac{1}{2}c \right) \\ & \left(\sinh \frac{1}{2}b + \sinh \frac{1}{2}c - \sinh \frac{1}{2}a \right) \left(\sinh \frac{1}{2}c + \sinh \frac{1}{2}a - \sinh \frac{1}{2}b \right) \end{aligned}$$

e sfruttando le relazioni note dalla geometria euclidea, si ottiene

$$\sinh r = \frac{\sinh \frac{1}{2}a \sinh \frac{1}{2}b \sinh \frac{1}{2}c}{\Pi}. \quad (2.20)$$

Supponendo che $a < b < c$, dalla 2.20 si vede che i tre assi di un triangolo si incontrano in un punto a distanza finita, infinita o ideale dai vertici a seconda che

$$\sinh \frac{1}{2}a + \sinh \frac{1}{2}b \gtrless \sinh \frac{1}{2}c.$$

In questo modo Battaglini riesce a trovare le condizioni per l'esistenza dell'incentro di un triangolo.

Da queste relazioni si evince che prese due circonference, una di raggio r e una di raggio r' , si ha

$$\frac{\text{Circ } r}{\text{Circ } r'} = \frac{\sinh r}{\sinh r'}.$$

Facendo tendere r' a 0, si ottiene

$$\frac{\text{Circ } r}{2\pi r'} = \frac{\sinh r}{r'}.$$

Da questa relazione si riottiene la formula per la lunghezza di una circonferenza già ottenuta da Lobachevskij:

$$\text{Circ } r = 2\pi \sinh r.$$

Infine, notiamo che nella geometria euclidea, poiché i punti all'infinito di una stessa retta coincidono, il piano è una superficie indefinita “rientrante in se stessa”, infatti si può ripassare per uno stesso punto percorrendo tutta la retta oltrepassando il punto all'infinito; invece, nella geometria iperbolica, il piano è una superficie indefinita i cui punti all'infinito appartengono ad una “circonferenza di centro un qualsiasi punto della superficie e raggio infinito”, infatti ogni retta possiede due punti all'infinito distinti⁴.

⁴quest'ultima osservazione potrebbe essere letta come un'anticipazione del disco di Beltrami: Battaglini intuì che il piano iperbolico si può descrivere attraverso la regione interna ad una circonferenza, il cui bordo è formato dai punti all'infinito del piano.

Capitolo 3

Beltrami e il primo modello di geometria iperbolica

Eugenio Beltrami fu un matematico italiano del 1800. Si occupò principalmente di geometria differenziale e fu il primo matematico a trovare un modello di geometria iperbolica che oggi noi conosciamo con il nome di *disco di Beltrami*.

Tra i suoi più importanti risultati che gli furono utili per la creazione dell'omonimo disco, c'è la risoluzione del seguente problema: come proiettare le superfici sul piano in maniera che le geodetiche finissero in linee rette. Si accorse che era possibile fare ciò solo per le superfici a curvatura di Gauss costante. Pubblicò tale risultato negli “Annali di Matematica pura ed applicata” del 1865[2].

Inoltre, solo sulle superfici a curvatura costante si può usare quello che Beltrami definisce “il criterio fondamentale di dimostrazione della geometria elementare” che è la sovrappponibilità delle figure uguali. Infatti, come dimostra il teorema egregium di Gauss, le isometrie lasciano invariata la curvatura; quindi se si vogliono sovrapporre due figure qualsiasi attraverso delle isometrie per confrontarle, è necessario che queste due figure giacciono su una superficie a curvatura costante.

Mentre nell'articolo del 1865 si interessò principalmente alle superfici a curvatura positiva, notò in seguito che tale risultato si poteva estendere anche alle superfici a curvatura di Gauss costante negativa. Studiando queste superfici, si accorse che si poteva creare un modello di geometria iperbolica considerando i punti interni ad un disco e prendendo come rette le sue corde; questo risultato è

stato presentato in un articolo del sesto volume del “Giornale di matematica” di Battaglini del 1868[3].

In questo capitolo studieremo il disco di Beltrami basandoci sull’articolo del 1868¹.

Se si mette su una porzione di \mathbb{R}^2 la metrica descritta dal seguente tensore metrico

$$(g_{ij})_{i,j=x,y} = \frac{R^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} a^2 - y^2 & xy \\ xy & a^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

si ottiene una superficie che ha curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$ e in cui le geodetiche sono descritte da equazioni lineari in x e in y^2 .

Prima di dimostrare queste due proprietà, osserviamo che non possiamo considerare tutto \mathbb{R}^2 : per fare sì che il tensore sia ben definito, dobbiamo restringerci alla porzione di piano $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < a\}$, ovvero all’interno di un disco che “dal punto di vista euclideo” ha centro nell’origine e raggio a .

Calcoliamo i simboli di Christoffel che serviranno per dimostrare le due proprietà citate precedentemente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} &= R^2 \frac{4x(a^2 - y^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} & \frac{\partial g_{xx}}{\partial y} &= R^2 \frac{2y(a^2 + x^2 - y^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} &= -R^2 \frac{y(y^2 - a^2 - 3x^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} & \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} &= -R^2 \frac{x(x^2 - a^2 - 3y^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} &= R^2 \frac{2x(a^2 + y^2 - x^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} & \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} &= R^2 \frac{4y(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3}. \end{aligned}$$

¹Nel seguito useremo alcune nozioni di geometria differenziale a cui abbiamo dedicato l’appendice A.

² R e a presenti nel tensore sono costanti arbitrarie; usualmente sono poste pari a 1.

Quindi i simboli di Christoffel di seconda specie sono

$$\begin{aligned}\Gamma_{xxx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} \right] = R^2 \frac{2x(a^2 - y^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \Gamma_{xxy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial y} \right] = R^2 \frac{2x^2y}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \Gamma_{xyx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xy}}{\partial x} \right] = R^2 \frac{y(a^2 + x^2 - y^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \Gamma_{xyy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} \right] = R^2 \frac{x(a^2 - x^2 + y^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \Gamma_{yyx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial g_{yy}}{\partial x} \right] = R^2 \frac{2xy^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^3} \\ \Gamma_{yyy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} \right] = R^2 \frac{2y(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2 - y^2)^3}.\end{aligned}$$

Sia g il determinante del tensore metrico:

$$g = \det(g_{ij}) = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = \frac{R^4 a^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^3}.$$

Allora

$$\begin{aligned}g^{xx} &= \frac{1}{g} g_{yy} = \frac{(a^2 - x^2)(a^2 - x^2 - y^2)}{R^2 a^2} \\ g^{xy} &= -\frac{1}{g} g_{xy} = -\frac{xy(a^2 - x^2 - y^2)}{R^2 a^2} \\ g^{yy} &= \frac{1}{g} g_{yy} = \frac{(a^2 - y^2)(a^2 - x^2 - y^2)}{R^2 a^2}.\end{aligned}$$

Infine possiamo ottenere i simboli di Christoffel di prima specie

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}^x &= g^{xx}\Gamma_{xxx} + g^{xy}\Gamma_{xxy} = \frac{2x}{a^2 - x^2 - y^2} \\ \Gamma_{xx}^y &= g^{xy}\Gamma_{xxx} + g^{yy}\Gamma_{xxy} = 0 \\ \Gamma_{xy}^x &= g^{xx}\Gamma_{xyx} + g^{xy}\Gamma_{xyy} = \frac{y}{a^2 - x^2 - y^2} \\ \Gamma_{xy}^y &= g^{xy}\Gamma_{xyx} + g^{yy}\Gamma_{xyy} = \frac{x}{a^2 - x^2 - y^2} \\ \Gamma_{yy}^x &= g^{xx}\Gamma_{yyx} + g^{xy}\Gamma_{yyy} = 0 \\ \Gamma_{yy}^y &= g^{xy}\Gamma_{yyx} + g^{yy}\Gamma_{yyy} = \frac{2y}{a^2 - x^2 - y^2}.\end{aligned}$$

Per poter calcolare la curvatura, abbiamo bisogno delle seguenti derivate

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma_{yx}^x}{\partial x} &= \frac{2xy}{(a^2 - x^2 - y^2)^2} & \frac{\partial\Gamma_{xx}^x}{\partial y} &= \frac{4xy}{(a^2 - x^2 - y^2)^2} \\ \frac{\partial\Gamma_{yx}^y}{\partial x} &= \frac{a^2 + x^2 - y^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2} & \frac{\partial\Gamma_{xx}^y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

A questo punto possiamo ottenere l'elemento del tensore di curvatura

$$R_{xyxy} = g_{xy} \left[\frac{\partial\Gamma_{yx}^x}{\partial x} - \frac{\partial\Gamma_{xx}^x}{\partial y} \right] + \Gamma_{yx}^x \Gamma_{xxy} - \Gamma_{xx}^x \Gamma_{yxy} + \\ g_{yy} \left[\frac{\partial\Gamma_{yx}^y}{\partial x} - \frac{\partial\Gamma_{xx}^y}{\partial y} \right] + \Gamma_{yx}^y \Gamma_{xyy} - \Gamma_{xx}^y \Gamma_{yyy} = \frac{R^2 a^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^3}$$

Allora la curvatura della superficie vale

$$K = -\frac{R_{xyxy}}{g} = -\frac{1}{R^2}$$

Verifichiamo ora che le geodetiche sono rappresentate da segmenti rettilinei. Per prima cosa dimostriamo che ogni corda è una geodetica. Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva in D^2 . Essa sarà una geodetica se

$$\begin{cases} x''(t) = -\Gamma_{xx}^x x'(t)^2 - 2\Gamma_{xy}^x x'(t)y'(t) - \Gamma_{yy}^x y'(t)^2 \\ y''(t) = -\Gamma_{xx}^y x'(t)^2 - 2\Gamma_{xy}^y x'(t)y'(t) - \Gamma_{yy}^y y'(t)^2 \end{cases}$$

ovvero se

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{2x}{a^2-x^2-y^2}x'(t)^2 - \frac{2y}{a^2-x^2-y^2}x'(t)y'(t) \\ y''(t) = -\frac{2x}{a^2-x^2-y^2}x'(t)y'(t) - \frac{2y}{a^2-x^2-y^2}y'(t)^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Sia $p_0 = (x_0, y_0) \in D^2$ un punto della nostra superficie e $v = (v_1, v_2) \in T_{p_0}D^2$ un vettore. Un segmento rettilineo passante per p_0 con direzione v avrà una parametrizzazione del tipo:

$$\gamma_v^{p_0}(t) = (v_1 u(t) + x_0, v_2 u(t) + y_0)$$

dove $u(t)$ è una funzione incognita. Andando a sostituire questa parametrizzazione nelle equazioni 3.1, si ottiene la seguente equazione differenziale

$$u'' = -2 \frac{(v_1 u + x_0) v_1 + (v_2 u + y_0) v_2}{a^2 - (v_1 u + x_0)^2 - (v_2 u + y_0)^2} u'^2.$$

Quindi sia $u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$ ³. Più avanti dimostreremo che u è ben definita su tutto \mathbb{R} facendo vedere che i punti sul bordo di D^2 si trovano a distanza infinita da un qualsiasi punto del disco. Infatti, se il dominio della soluzione u avesse come estremo superiore un numero reale l , si dovrebbe avere che il segmento geodetico tra p_0 e il punto sul bordo del disco corrispondente a l sarebbe lungo $\frac{l}{\|v\|_g} < \infty$ e ciò è assurdo. Allora $\gamma_v^{p_0}(t)$ parametrizza una geodetica.

Per dimostrare che le geodetiche sono tutte e sole le corde basta ricordare che per ogni punto p_0 della superficie e per ogni direzione v , esiste una sola geodetica uscente da quel punto con quella direzione. Poiché il segmento rettilineo $\gamma_v^{p_0}$ è una geodetica uscente da p_0 con direzione v , si ha che non esistono altre geodetiche al di fuori dei segmenti rettilinei.

Calcoliamo la distanza ρ dal punto $(0, 0)$ di un punto di coordinate $x = r \cos \mu$ e $y = r \sin \mu$. Possiamo parametrizzare il segmento geodetico che congiunge i due

³Nel caso particolare $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(v_1, v_2) = (1, 0)$ si può vedere che l'equazione differenziale si riduce a

$$\frac{u''}{u'} = \frac{-2uu'}{a^2 - u^2}$$

e la soluzione del problema di Cauchy è $u(t) = a \tanh \frac{t}{a}$. Essendo poi $\|(0, 1)\|_g = \frac{R}{a}$, una parametrizzazione naturale della geodetica $y = 0$ è $\alpha(t) = a \tanh \frac{t}{R}$.

punti con

$$\gamma(t) = (t \cos \mu, t \sin \mu), \quad t \in [0, r],$$

da cui

$$\gamma'(t) = (\cos \mu, \sin \mu)$$

e quindi

$$\|\gamma'(t)\|_g = R \frac{a}{a^2 - t^2}.$$

Allora

$$\rho = \int_0^r \|\gamma'(t)\|_g dt = \frac{R}{2} \log \frac{a+r}{a-r} = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{x^2 + y^2}}{a - \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.2)$$

Inversamente si ha che

$$r = a \tanh \frac{\rho}{R}. \quad (3.3)$$

Dunque, un punto sul bordo di D^2 , ovvero un punto le cui coordinate sono tali che $x^2 + y^2 = a^2$, si trova a distanza infinita dal punto $(0, 0)$ e di conseguenza a distanza infinita da ogni altro punto interno al disco. Da questo discorso segue che il disco D^2 con la metrica $(g_{ij})_{i,j=x,y}$ è completo, ovvero che ogni segmento geodetico di D^2 si può prolungare indefinitamente.

In questo modo abbiamo costruito un modello di geometria iperbolica. Infatti se consideriamo solo i punti interni al disco D^2 e come rette consideriamo le corde del bordo, otteniamo un modello di geometria che verifica i primi quattro postulati di Euclide. In più, in tale modello, data una retta, esistono due parallele uscenti da un punto esterno alla retta data: esse sono rappresentate dalle due corde che incontrano la retta in uno dei due punti sul bordo del disco.

Calcoliamo la lunghezza di una circonferenza centrata in $(0, 0)$. Possiamo parametrizzare un arco di circonferenza σ con la legge

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \mu],$$

dove μ rappresenta l'angolo “euclideo” compreso fra i raggi che individuano l'arco. Allora si ha

$$\sigma = \int_0^\mu \|\gamma'(t)\|_g dt = \int_0^\mu R \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dt = \frac{Rr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mu.$$

Poiché σ è proporzionale a μ qualunque sia il raggio della circonferenza, si vede che in $(0, 0)$ gli angoli misurati nella metrica $(g_{ij})_{i,j=x,y}$ sono uguali a quelli misurati con la metrica euclidea⁴.

Dalla 3.3 si ricava che

$$\sigma = \mu R \sinh \frac{\rho}{R}.$$

Allora

$$\text{Circ } \rho = 2\pi R \sinh \frac{\rho}{R} \quad (3.4)$$

che, ponendo $R = 1$, è la stessa formula per la lunghezza di una circonferenza di raggio ρ che era già stata trovata sia da Lobačevskij sia da Battaglini.

Vediamo che due rette che si “incontrano all’infinito” (ovvero che sono parallele), formano un angolo nullo nella loro “intersezione”. In generale, consideriamo un punto $P = (x, y)$ del disco e due geodetiche passanti per P . Le due geodetiche saranno individuate da due vettori tangenti a D^2 in P ; siano $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ tali vettori. Sia θ l’angolo compreso fra le due geodetiche. Allora, poiché $\cos \theta = \frac{g(v, w)}{\|v\|_g \|w\|_g}$, si ha che $\cos \theta$ vale

$$\frac{a^2 v_1 w_1 + a^2 v_2 w_2 - x^2 v_2 w_2 - y^2 v_1 w_1 + xy(v_1 w_2 + v_2 w_1)}{\sqrt{a^2 v_1^2 + a^2 v_2^2 - x^2 v_2^2 - y^2 v_1^2 + 2xyv_1 v_2} \sqrt{a^2 w_1^2 + a^2 w_2^2 - x^2 w_2^2 - y^2 w_1^2 + 2xyw_1 w_2}}.$$

Per $x^2 + y^2 \rightarrow a^2$, il numeratore tende a

$$x^2 v_1 w_1 + y^2 v_2 w_2 + xy(v_1 w_2 + v_2 w_1),$$

il denominatore tende a

$$(xv_1 + yv_2)(xw_1 + yw_2) = x^2 v_1 w_1 + y^2 v_2 w_2 + xy(v_1 w_2 + v_2 w_1)$$

e quindi si ha che

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow a^2} \theta = 0.$$

Sfruttando ancora la relazione $\cos \theta = \frac{g(v, w)}{\|v\|_g \|w\|_g}$, si può vedere che due geodetiche

⁴Ci si può convincere di questo fatto anche notando che il tensore metrico in $(0, 0)$ si riduce a $\begin{pmatrix} \frac{R^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{a^2} \end{pmatrix}$.

perpendicolari sono rappresentate da due corde “ortogonalni nel senso euclideo” se e solo se almeno una delle due geodetiche passa per $(0, 0)$.

Dall'espressione di $\cos \theta$ si può giungere a

$$\tan \theta = \frac{a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (v_1 w_2 - v_2 w_1)}{a^2 (v_1 w_1 + v_2 w_2) - (x v_2 - y v_1) (x w_2 - y w_1)}. \quad (3.5)$$

Dimostriamo ora che D^2 è omogeneo e isotropo. Per prima cosa vediamo che le rotazioni attorno al punto $(0, 0)$

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

sono delle isometrie. Infatti abbiamo che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x', y') = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

da cui, calcolando $Jf^*(g_{ij})Jf$,

$$\frac{R^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 - y^2 & xy \\ xy & a^2 - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$(g'_{ij})_{i,j=1,2} = \frac{R^2}{(a^2 - x'^2 - y'^2)^2} \begin{pmatrix} a^2 - y'^2 & x'y' \\ x'y' & a^2 - x'^2 \end{pmatrix}$$

Vediamo ora che è possibile mandare un punto arbitrario del disco $P = (x_0, y_0)$ in $O = (0, 0)$ attraverso un'isometria. Sia $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Per semplicità, poiché le rotazioni intorno all'origine sono delle isometrie, possiamo supporre $y_0 = 0$. Da un punto arbitrario del disco $Q = (x, y)$ tracciamo la perpendicolare alla geodetica $y = 0$. Sia S l'intersezione fra tale perpendicolare e $y = 0$. Infine, siano $p = d_g(O, S)$, $q = d_g(Q, S)$ e $p_0 = d_g(O, P)$. Per la 3.2 si ha

$$p = \frac{R}{2} \log \frac{a+x}{a-x}, \quad p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a+r_0}{a-r_0}.$$

Per calcolare q , consideriamo la geodetica parametrizzata da $\gamma(t) = (x, t)$ con

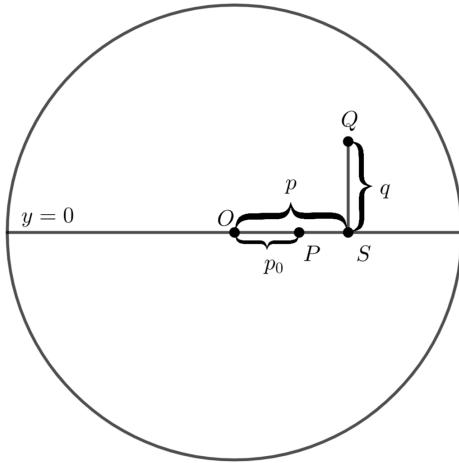


Figura 3.1

$t \in [0, y]$. Quindi

$$q = \int_0^y \|\gamma'(t)\|_g dt = \int_0^y \frac{R\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - x^2 - t^2} dt = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + y}{\sqrt{a^2 - x^2} - y}.$$

Infine, si ha che

$$d_g(P, S) = p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + x}{a - x} \frac{a - r_0}{a + r_0}.$$

Sia φ l'isometria che manda P in O e che lascia invariata la geodetica $y = 0$. Sia $Q' = (x', y') = \varphi(Q)$. Dopo l'applicazione di φ , le distanze q e $p - p_0$, si riscrivono nei seguenti modi:

$$q = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - x'^2} + y'}{\sqrt{a^2 - x'^2} - y'}, \quad p - p_0 = \frac{R}{2} \log \frac{a + x'}{a - x'}.$$

Confrontando i due diversi modi di scrivere queste distanze si ottiene:

$$\begin{cases} x' = \varphi_x(x, y) = \frac{a^2(x - r_0)}{a^2 - xr_0} \\ y' = \varphi_y(x, y) = \frac{a\sqrt{a^2 - r_0^2}}{a^2 - xr_0}y \end{cases}$$

Analogamente a come fatto con le rotazioni, si può vedere che la φ così definita

è un'isometria. Il fatto che si può mandare un qualsiasi punto in $(0, 0)$ dimostra che D^2 è omogeneo; il fatto che le rotazioni sono isometrie, invece, dimostra che questa superficie è anche isotropa.

Per le proprietà appena dimostrate risulta che la formula 3.4 è verificata anche per le circonferenze non centrate nell'origine. Dalla 3.3 si vede che le circonferenze centrate nell'origine e aventi raggio ρ sono descritte dall'equazione

$$x^2 + y^2 = a^2 \tanh^2 \frac{\rho}{R};$$

in generale, invece, applicando le isometrie trovate a questa equazione, si vede che le circonferenze di raggio ρ centrate in (x_0, y_0) sono descritte dall'equazione

$$\frac{a^2 - x_0 x - y_0 y}{\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)(a^2 - x_0^2 - y_0^2)}} = \cosh^2 \frac{\rho}{R}.$$

Consideriamo ora due geodetiche uscenti da un punto, parallele ad una retta data. Sia δ la lunghezza della perpendicolare uscente dal punto a questa retta. Indichiamo con Δ l'angolo compreso fra la perpendicolare e una delle due parallele. Con la notazione che abbiamo introdotto nel capitolo dedicato a Lobačevskij, possiamo scrivere $\Delta = \Pi(\delta)$. Cerchiamo un'espressione per la funzione Π . Per

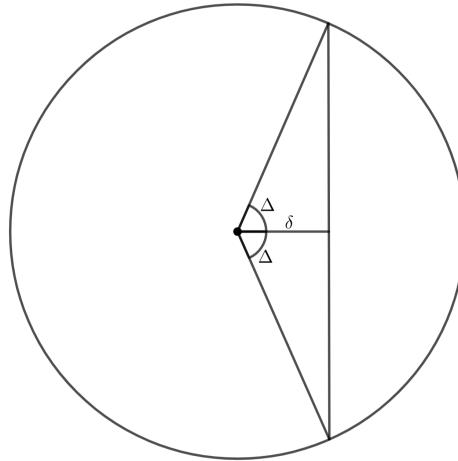


Figura 3.2

l'omogeneità e l'isotropia, possiamo supporre per semplicità che il punto dato sia

$(0,0)$ e che la geodetica sia perpendicolare alla geodetica $y = 0$ (ovvero che la geodetica sia rappresentata da una corda verticale). Dalla 3.3 si deduce che la geodetica avrà equazione

$$x = a \tanh \frac{\delta}{R}.$$

Uno dei due punti all'infinito di tale geodetica avrà ordinata $y = \frac{a}{\cosh \frac{\delta}{R}}$. La parallela che "incontra" la geodetica in tale punto sarà descritta da

$$y = \frac{1}{\sinh \frac{\delta}{R}} x.$$

Poiché gli angoli calcolati nella metrica $(g_{ij})_{i,j=x,y}$ e gli "angoli euclidei" sono uguali in $(0,0)$, si deve avere che

$$\tan \Delta = \frac{1}{\sinh \frac{\delta}{R}},$$

dunque si ritrova la stessa espressione già trovata da Lobačevskij e da Battaglini.

Infine, consideriamo il triangolo rettangolo formato dalla geodetica $y = 0$, da

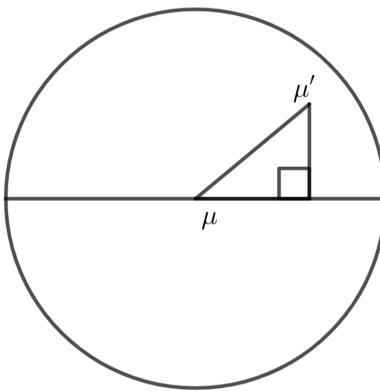


Figura 3.3

una delle geodetiche ad essa perpendicolari $x = \text{cost}$ e dalla geodetica uscente dall'origine con inclinazione μ , la cui equazione è

$$y = x \tan \mu.$$

Chiamiamo il terzo angolo del triangolo μ' . Da 3.5 si ottiene

$$\tan \mu' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a \tan \mu}$$

dove (x, y) sono le coordinate del vertice dell'angolo μ' . Poiché $y = x \tan \mu$, si ha

$$\tan \mu' = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \mu - x^2}}{a \sin \mu},$$

da cui

$$d\mu' = -\frac{a \sin \mu \, x \, dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 \cos^2 \mu - x^2}},$$

espressione che esprime l'incremento dell'angolo μ' quando, tendendo fisso l'angolo μ , muoviamo il cateto opposto a quest'ultimo. Se integriamo in y l'elemento di superficie

$$\sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} dxdy = R^2 a \frac{dxdy}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

tra $y = 0$ e $y = x \tan \mu$, otteniamo

$$R^2 \frac{a \sin \mu \, x \, dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 \cos^2 \mu - x^2}},$$

ovvero

$$-R^2 d\mu'$$

che rappresenta l'incremento dell'area del triangolo quando si muove il cateto opposto a μ . Integrando tra $\frac{\pi}{2} - \mu$ ($x = 0$) e μ' , si ottiene che l'area del triangolo rettangolo è pari a

$$R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \mu - \mu' \right).$$

Poiché poi ogni triangolo si può dividere in due triangoli rettangoli, si ha che in generale l'area di un triangolo di angoli A, B e C vale⁵

$$R^2 (\pi - A - B - C).$$

⁵Questo risultato, in realtà, era già stato trovato da Lobachevskij. La sua dimostrazione si può trovare in Pangeometria.

Questa formula in primis mostra che nella geometria iperbolica non esistono similitudini non banali; in più mostra che in ogni triangolo limite, i cui vertici si trovano sul bordo del disco, l'area vale π .

Capitolo 4

Considerazioni finali

Così come nota Lucio Lombardo-Radice nell'introduzione della traduzione “Nuovi principi della geometria” [5], per Lobačevskij la geometria è esclusivamente lo studio della struttura dello spazio fisico. L'intento di Lobačevskij non è quello di inventare una costruzione sconnessa dalla natura che verificasse la geometria iperbolica. Infatti, all'epoca di Lobačevskij, non si sentiva ancora l'esigenza di mostrare modelli matematici che rispettassero dei dati assiomi: tale esigenza inizia a diffondersi nella seconda metà del 1800 e si afferma poi con Hilbert.

Lo scopo di Lobačevskij, invece, è quello di capire se la “realtà esterna a noi” sia o no euclidea. Ne è una prova il fatto che egli abbia eseguito delle misurazioni e abbia calcolato che in un triangolo i cui lati sono paragonabili alla distanza Terra-Sole, la somma degli angoli interni è $180^\circ \pm 0,0003''$. Da questa misurazione conclude che nella scala del misurabile (per lo meno nella scala di ciò che si poteva misurare ai suoi tempi) la geometria euclidea sia più che sufficiente. Però non esclude che se si considerassero misure ancora più grandi si possa ricadere nella geometria iperbolica.

Neanche in Battaglini si riscontra un tentativo di costruzione di modello di geometria iperbolica: lo stesso Battaglini, in una nota introduttiva del suo articolo, afferma che lo scopo delle sue ricerche era quello di ottenere gli stessi risultati di Lobačevskij ma per vie diverse, così da consolidare tali risultati. Nonostante ciò, Battaglini nota che il piano iperbolico si comporta come una circonferenza di raggio infinito. questa osservazione, che sembra annunciare il disco di Beltrami, fa pensare

CAPITOLO 4. CONSIDERAZIONI FINALI

che Battaglini avesse intuito che si potesse costruire un modello matematico che rispettasse gli assiomi della geometria iperbolica.

D'altra parte, come si evince dall'articolo del 1868, Beltrami non sfrutta gli studi di Battaglini, ma parte da risultati di geometria differenziale. Allora, viene naturale considerare Beltrami come ideatore dell'omonimo disco.

Il ruolo giocato da Battaglini resta però fondamentale. È grazie a lui che la nuova teoria delle parallele si diffuse in Italia, traducendo i lavori di Lobačevskij e di Bolyai e pubblicando sia il suo articolo che quello di Beltrami.

Appendice A

Conoscenze preliminari sulle superfici riemanniane

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. $g_s = \{g_p\}$ prodotto scalare su $T_p S$ per $p \in S$ definisce una metrica riemanniana se e solo se per definizione $\forall \omega : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione locale di S con parametro $x = (x_1, x_2)$ si ha che $g_{ij}(x) = g_{\omega(x)}(X_i(x), X_j(x))$ sono funzioni differenziabili ($X_i(x) = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)$). Chiameremo S con la metrica g_S superficie riemanniana.

Dati due vettori $V = \sum_{i=1}^2 v_i X_i$ e $W = \sum_{j=1}^2 w_j X_j$ di $T_{\omega(x)} S$ si ha che

$$g_{\omega(x)}(V, W) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} v_i w_j.$$

Da cui definiamo

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V, V)}$$

e l'angolo compreso fra i due vettori

$$\theta = \arccos \frac{g(V, W)}{\|V\|_g \|W\|_g}.$$

Infine, sia $C \subset S$ una curva parametrizzata da $\gamma : I \rightarrow S$, definiamo la lunghezza di C

$$\text{Lung } C = \int_I \|\gamma'(t)\|_g dt$$

e sia $D = \omega(E)$ una porzione di S , definiamo l'area di D

$$\text{Area } D = \int_E \sqrt{g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}(x)^2} dx_1 dx_2.$$

Un omeomorfismo differenziabile fra superfici $f : S_1 \rightarrow S_2$ si chiamerà isometria se la trasformazione indotta sui vettori tangenti $f^* : T_{S_1} \rightarrow T_{S_2}$ è un'isometria lineare, ovvero se conserva il prodotto scalare

$$g_{f(p)}^{S_2}(f^*(V), f^*(W)) = g_p^{S_1}(V, W) \quad \forall p \in S_1.$$

Siano $\omega_1 : D_1 \rightarrow S_1$ e $\omega_2 : D_2 \rightarrow S_2$ due parametrizzazioni delle due superfici con parametri rispettivamente $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ e sia $f : S_1 \rightarrow S_2$ un omeomorfismo differenziabile

$$f : \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad f^{-1} : \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2) \\ x_2 = x_2(y_1, y_2) \end{cases} .$$

Si può provare che f è un'isometria se e solo se

$$g_{hk}^{\omega_2}(y) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial y_h}(x) \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(x) g_{ij}^{\omega_1}(x) \quad \forall h, k = 1, 2.$$

Su una superficie riemanniana si può introdurre un concetto di derivata “interna” alla superficie che chiamiamo derivata covariante. Indichiamo con $\nabla_V W$ la derivata covariante del campo vettoriale W rispetto a V . Tale derivata gode di 5 proprietà:

1. $\nabla_{aV_1+bV_2} W = a\nabla_{V_1} W + b\nabla_{V_2} W;$
2. $\nabla_V aW_1 + bW_2 = a\nabla_V W_1 + b\nabla_V W_2;$
3. $\nabla_V fW = \frac{\partial f}{\partial V} W + f\nabla_V W;$
4. $\frac{\partial g(W_1, W_2)}{\partial V} = g(\nabla_V W_1, W_2) + g(W_1, \nabla_V W_2);$
5. $\nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{X_2} X_1$ per ogni parametrizzazione ω .

Indicando con $\Gamma_{ij} = \nabla_{X_i} X_j$, chiamiamo simboli di Christoffel di prima specie Γ_{ij}^k le componenti del vettore Γ_{ij} rispetto a $\{X_1, X_2\}$ ($\Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k X_k$) e chiamiamo simboli di Christoffel di seconda specie Γ_{ijk} le proiezioni di Γ_{ij} su $\{X_1, X_2\}$ ($\Gamma_{ijk} = g(\Gamma_{ij}, X_K)$).

Allora si può dimostrare che

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right)$$

e che

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{h=1}^2 g^{hk} \Gamma_{ijh},$$

dove g^{ij} sono gli elementi della matrice inversa $(g_{ij})_{i,j}^{-1}$.

Chiameremo una curva $C \subset S$ parametrizzata dalla legge $\gamma : I \rightarrow S$, $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ geodetica, se $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma' = 0$. Questa condizione si traduce in

$$x''_k(t) = - \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k x'_i(t) x'_j(t), \quad k = 1, 2.$$

Proposizione A.1. $\forall p \in S$ e $\forall V \in T_p S$ $\exists! \gamma_V : I_V \rightarrow S$ parametrizzazione geodetica massimale t.c. $\gamma_V(0) = p$ e $\gamma'_V(0) = V$.

Dimostrazione. γ_V unica soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''_k(t) = - \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k x'_i(t) x'_j(t) & k = 1, 2 \\ \sum_{k=1}^2 x'_k(0) X_k = V \\ x(0) = p \end{cases}$$

□

Introduciamo il tensore di curvatura

$$R_{ijkh} = g(\nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k, X_h), \quad i, j, k, h = 1, 2.$$

Attraverso passaggi algebrici si può vedere che

$$R_{ijkh} = \sum_{l=1}^2 g_{hl} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right) + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{ilh} - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jlh}.$$

Definiamo curvatura riemanniana

$$K = -\frac{R_{1212}}{g}$$

dove $g = \det(g_{ij})_{i,j} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Si può provare che K è ben definita, in quanto non dipende dalla parametrizzazione ω di S . Tale definizione risulta essere l'estensione alle superfici riemanniane del concetto di curvatura di Gauss.

Bibliografia

- [1] G. Battaglini. Sulla geometria immaginaria di lobatschhewsky. *Giornale di matematiche di Battaglini*, 5:217–231, 1867.
- [2] E. Beltrami. Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 7:185–204, 1865.
- [3] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Giornale di matematiche di Battaglini*, 6:284–322, 1868.
- [4] N. I. Lobačevskij. *Geometrical researches on the theory of parallels*. University of Texas, 1891.
- [5] N. I. Lobačevskij. *Nuovi principi della geometria. Con una teoria completa delle parallele*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [6] N. I. Lobačevskij. *Pangeometry*. European Mathematical Society, 2010.